CAPITOLO 13

MACCHINE ALTERNATIVE: MOTORI A C.I.

13.1 Introduzione

In questo capitolo viene riportato lo studio meccanico di una macchina alternativa, dedicando un'attenzione particolare ai motori a c.i. alternativi; questo studio, oltre ad avere un interesse oggettivo, che deriva dalla grande diffusione di questa macchina motrice, costituisce un valido esempio di come si affronta lo studio meccanico di una macchina.

A questo proposito va ricordato che lo studio di una macchina comprende l'esame di aspetti diversi, che trovano posto in discipline diverse.

Così, ad esempio, si può dire, in maniera evidentemente schematica, che lo studio di un motore alternativo a c.i. comprende l'esame del comportamento meccanico del motore, l'esame del ciclo secondo il quale evolve il fluido motore, l'esame della resistenza degli organi che lo compongono e ciascuno di questi forma l'oggetto di una o più discipline diverse.

Nella pratica tecnica le fasi suddette non hanno una successione definita, in quanto i risultati di ciascuna di esse possono condizionare in misura notevole lo sviluppo delle altre.

Nelle macchine motrici o generatrici lo studio della trasformazione energetica, che ha luogo nella macchina, ha un rilievo particolare, perché è quello che ne caratterizza il funzionamento e che per molti aspetti ne condiziona l'efficienza.

Ma anche in queste macchine lo studio meccanico e quello della resistenza degli organi che le compongono hanno una importanza altrettanto grande,

in quanto essi per molti aspetti ne determinano l'affidabilità.

Nelle macchine operatrici l'aspetto della trasformazione energetica è meno rilevante rispetto agli altri, in quanto in queste macchine l'energia meccanica fornita viene utilizzata per eseguire un lavoro meccanico.

Per quanto si riferisce allo studio del comportamento meccanico di una macchina, esso comprende due passi successivi: lo studio cinematico e quello dinamico.

Nel primo vengono esaminate le caratteristiche del moto degli organi che la compongono e per ognuno di questi si definiscono le relazioni che danno lo spostamento, la velocità e l'accelerazione.

Col secondo si determinano le forze che agiscono sugli organi che la compongono.

13.2 Il manovellismo di spinta rotativa

Il manovellismo di spinta rotativa, o manovellismo ordinario, è un meccanismo piano utilizzato in tutte le macchine alternative, siano esse motrici od operatrici.

Nelle prime, come ad es. i motori a c.i., il manovellismo ha la funzione di trasformare il moto alternativo del pistone nel moto rotatorio dell'albero motore; nelle seconde, ad es. i compressori alternativi, trasforma il moto rotatorio dell'albero a manovella nel moto alternativo del pistone.

Il manovellismo è costituito (v.fig.13.2-1) da una manovella m, avente l'estremo A incernierato alla parte fissa (telaio), da una biella l, incernierata in B alla manovella ed in C al corsoio c, che, per la presenza delle guide g, si muove lungo l'asse AC.

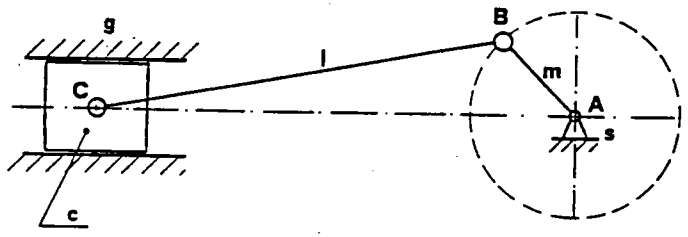


Fig. 13.2-1

La manovella m è in genere costituita (v.fig.13.2-2) da due perni di banco p, che ruotano intorno all'asse a dei due supporti di banco s, da due bracci

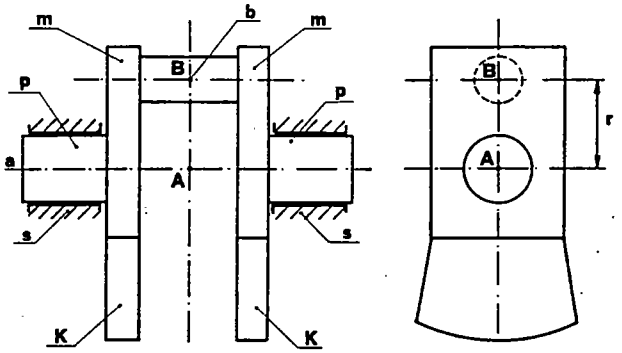


Fig. 13.2-2

di manovella m e dal bottone di manovella b.

La distanza r tra gli assi del perno di banco e del bottone di manovella prende il nome di raggio di manovella.

Per esigenze di bilanciamento, la manovella è spesso dotata di due contrappesi K.

La biella l è costituita da un fusto f, che porta alle sue estremità la testa di biella t ed il piede di biella p (v.fig.13.2-3): la testa di biella t serve a collegare la biella al bottone di manovella ed è in genere costruita in due pezzi per ragioni di montaggio. Essa porta un cuscinetto ricoperto da una lega antifrizione e costituito, ancora per ragioni di montaggio, da due parti (gusci).

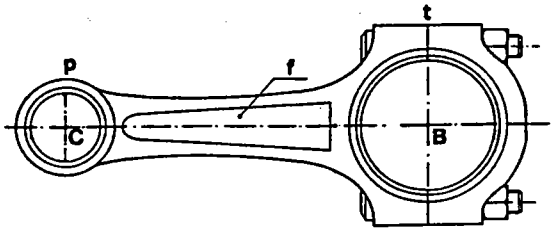


Fig. 13.2-3

Il piede di biella p, che costituisce l'estremità più piccola della biella, porta un cuscinetto in genere di bronzo: questa estremità della biella viene collegata al corsoio mediante uno spinotto.

Nelle macchine alternative il corsoio è costituito dal pistone o stantuffo

(v.fig.13.2-4), che si muove all'interno del cilindro della macchina. Il pistone, di forma apparentemente cilindrica, è costruito in genere in ghisa o in alluminio, è cavo e presenta il foro f per l'alloggiamento dello spinotto s. Esso presenta inoltre un certo numero di cave c, dove vengono disposte le fasce elastiche e: le fasce disposte in corrispondenza della testa t del pistone hanno la funzione di tenuta, impedendo che il fluido, che evolve nella macchina (vapore, aria, gas combusti, ecc.) passi dal cilindro nel carter della macchina.

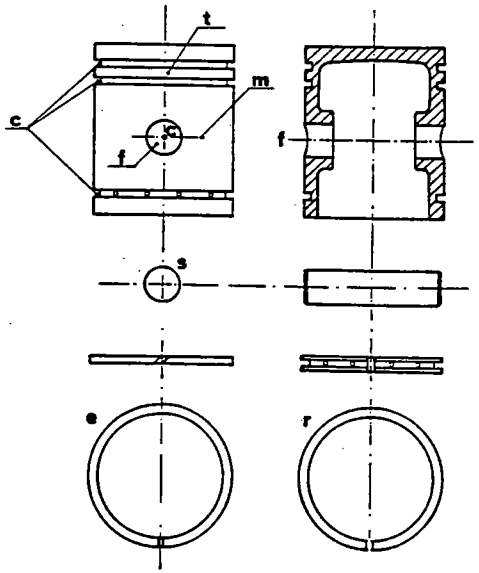


Fig. 13.2-4

La fascia elastica, disposta sul mantello m del pistone, prende il nome di fascia raschiaolio ed ha la funzione di rimandare nel carter l'eccesso di olio lubrificante che ha raggiunto le pareti del cilindro.

In fig.13.2-5 è schematicamente rappresentata la sezione di un motore a c.i. monocilindrico a quattro tempi, effettuata con un piano normale all'asse di rotazione del motore stesso.

Salvo casi particolari le macchine alternative vengono costruite a più cilindri. I motivi che giustificano questa scelta sono fondamentalmente due: il primo è quello di rendere il momento, motore o resistente, più uniforme di quello relativo ad una macchina monocilindrica; il secondo è legato al bilanciamento delle forze d'inerzia.

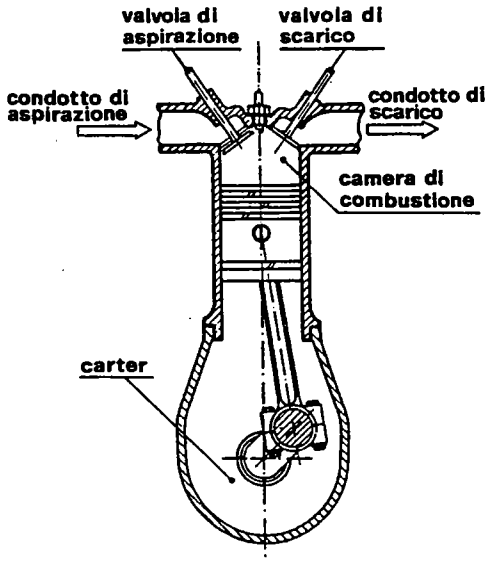


Fig. 13.2-5

13.3 Studio cinematico

Lo studio cinematico viene eseguito ritenendo rigidi gli organi del manovellismo e trascurabili i giochi: in queste ipotesi il manovellismo è un meccanismo piano ad un grado di libertà.

Se si assume come coordinata indipendente l'angolo di rotazione θ della manovella (v.fig.13.3-1) è possibile esprimere in funzione di questa sola variabile le grandezze (spostamento, velocità, accelerazione) che definiscono il moto di ogni punto del sistema.

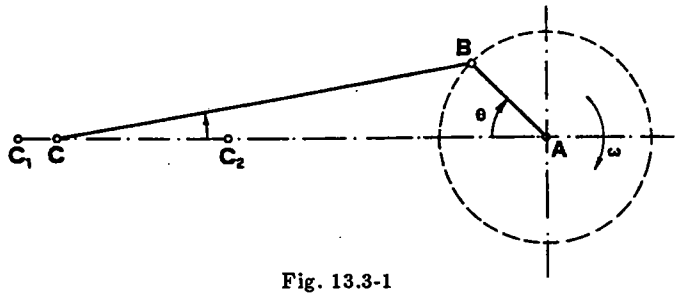


Fig. 13.3-1

Lo studio cinematico sarà però limitato al moto del bottone di manovella B, del piede di biella C e dei punti della biella appartenenti al suo asse di simmetria.

Lo studio cinematico sarà effettuato ritenendo che la macchina funzioni in condizioni di regime; si supporrà inoltre costante la velocità di rotazione della manovella e pari al valor medio relativo alle condizioni di regime considerato.

A questo proposito va ricordato che in un gruppo comprendente una macchina alternativa la velocità angolare in condizioni di regime non risulta costante(v.Cap.2). Per un gruppo così costituito infatti il regime è periodico ed è caratterizzato da una variazione periodica della velocità angolare: il grado di irregolarità nel periodo viene però contenuto entro valori piuttosto bassi, che dipendono dalle caratteristiche del gruppo: questo risultato si ottiene, come è noto, calettando sull'albero della macchina alternativa un opportuno volano.

Se si accetta l'ipotesi semplificativa di ritenere costante la velocità angolare ω, l'angolo θ, che la manovella forma con l'asse del cilindro (v.fig.13.3-1), è dato da:

$$\theta = \omega t$$

13.4 Il moto del bottone di manovella

Il moto del punto B, intersezione dell'asse del bottone di manovella col piano del moto, è, per l'ipotesi fatta ($\omega = \text{cost}$), un moto circolare uniforme.

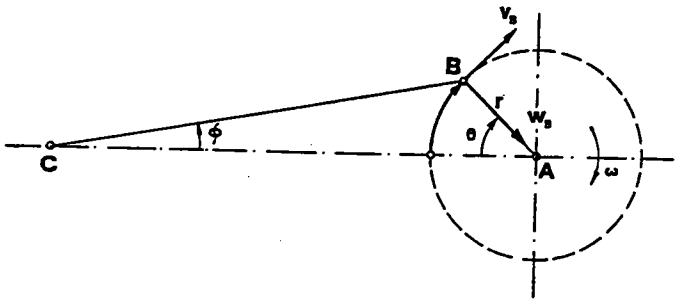


Fig. 13.4-1

Il punto B descrive una traiettoria circolare di raggio r; indicato con s_B l'arco di circonferenza descritto da B, risulta:

$$s_B = r\theta = r\omega t$$

La velocità v_B di B è data da:

$$v_B = ds_B/dt = r\omega$$

Questa velocità risulta costante ed è rappresentata da un vettore tangente alla traiettoria di B ed orientato nel verso di ω.

L'accelerazione $\bar{w}_B$ di B è centripeta ed il suo modulo vale:

$$w_B = r\omega^2$$

è diretta secondo il raggio di manovella ed è orientata verso il centro A della traiettoria circolare di B.

13.5 Il moto del piede di biella

Il punto C, intersezione dell'asse dello spinotto col piano del moto, descrive, come qualsiasi altro punto del pistone, una traiettoria rettilinea compresa tra i punti C_1 e C_2 , mentre la manovella ruota di un angolo θ compreso tra 0 e π (v.fig.13.5-1).

Il segmento C_1C_2 viene indicato col nome di corsa del pistone ed ha una lunghezza pari a $2r$: il punto C_1 è detto punto morto superiore, *PMS*, o esterno, il punto C_2 punto morto inferiore, *PMI*, o interno.

Quando la manovella ruota di un altro mezzo giro ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$), il punto C compie un'altra corsa, passando da C_2 a C_1.

Il moto di C è dunque periodico ed il suo periodo è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi n}{60}} = \frac{60}{n}s$$

con n = velocità angolare della manovella in giri/min.

Se si assume come variabile indipendente l'angolo $\theta = \omega t$, il moto di C risulta funzione di θ di periodo pari a 2π.

Il moto di C viene detto alterno o alternativo, essendo la corsa s percorsa alternativamente in versi opposti.

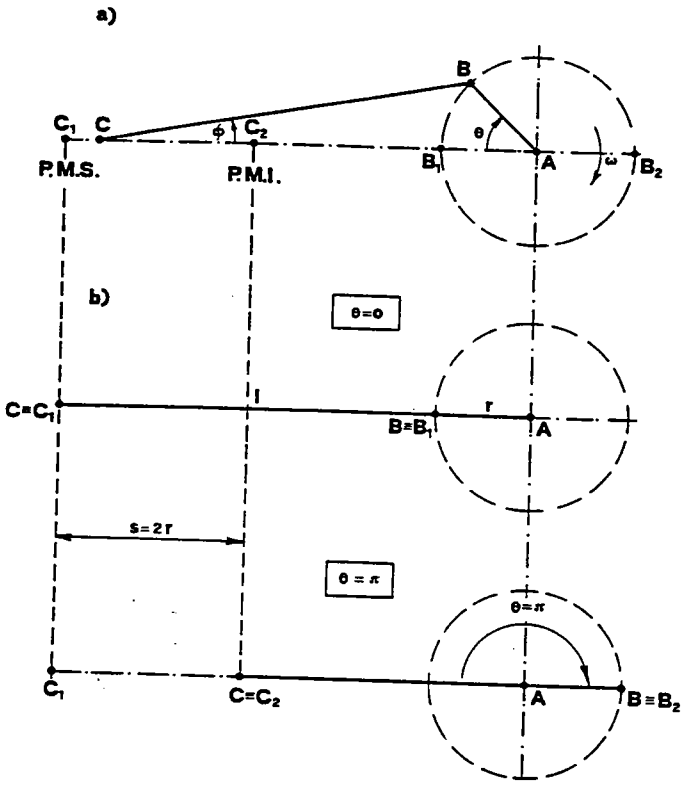


Fig. 13.5-1

In corrispondenza dei punti morti il moto del meccanismo risulta indeterminato ed il meccanismo si dice aperto; infatti ad uno stesso spostamento ds_C di C corrisponde una rotazione $\pm d\theta$.

a) Lo spostamento del punto C

Lo spostamento s_C di C, misurato a partire dal *PMS* C_1 (v.fig.13.5-2), è dato da:

$$s_C = C_1A - CA$$

Essendo (v.fig.13.5-1,b):

$$C_1A = l + r$$

e (v.fig.13.5-2):

$$CA = CR + RA = l\cos\phi + r\cos\theta$$

risulta:

$$s_C = l + r - (l\cos\phi + r\cos\theta) = r(1 - \cos\theta) + l(1 - \cos\phi) \qquad (13.5\text{-}1)$$

avendo indicato con ϕ l'angolo formato dalla biella con l'asse dei punti morti C_1C_2.

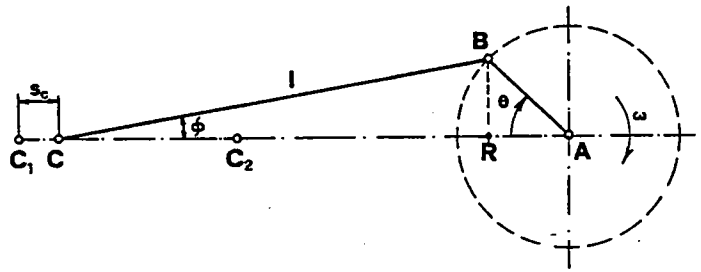


Fig. 13.5-2

La relazione che lega ϕ a θ si ottiene osservando che:

$$BR = l\sin\phi = r\sin\theta$$

Risulta quindi:

$$\sin\phi = (r/l)\sin\theta = (1/\mu)\sin\theta$$

avendo indicato con μ il rapporto caratteristico l/r, rapporto che nelle macchine alternative assume di solito un valore prossimo a 4.

Ponendo nella (13.5-1):

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \sqrt{1 - (\sin\theta/\mu)^2}$$

si ottiene:

$$s_C = r\left[1 - \cos\theta + \mu - \mu\sqrt{1 - (\sin\theta/\mu)^2}\right] \qquad (13.5\text{-}2)$$

La relazione (13.5-2) è la formula esatta per il calcolo di s_C in funzione di θ.

Per il calcolo di s_C si usano spesso formule approssimate.

Una formula di prima approssimazione si ottiene trascurando nella (13.5-1) il termine $l(1-\cos\phi)$, cioè trascurando l'inclinazione ϕ della biella ($\phi = 0$): si ottiene così:

$$s_C^{(1)} = r(1-\cos\theta) \qquad (13.5\text{-}3)$$

La stessa formula si ottiene dalla (13.5-2), ritenendo "infinita" cioè molto grande rispetto ad r, la lunghezza l della biella: in questa ipotesi il termine $(\sin\theta/\mu)^2$ risulta trascurabile rispetto ad 1.

Poiché il termine $l(1-\cos\phi)$ è nullo in corrispondenza dei punti morti ($\phi = 0$ per $C \equiv C_1$ e $C \equiv C_2$), i valori di s_C ed $s_C^{(1)}$ coincidono per $\theta = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Per tutti gli altri valori di θ il termine $l(1-\cos\phi)$ risulta positivo, essendo $\cos\phi < 1$, e quindi il valore $s_C^{(1)}$ è in difetto rispetto al valore esatto s_C, dato dalla (13.5-2).

Questa circostanza è messa in evidenza in fig.13.5-3, nella quale sono segnati gli spostamenti s_C ed $s_C^{(1)}$; quest'ultimo tracciato nell'ipotesi che la biella si sposti parallelamente all'asse dei punti morti.

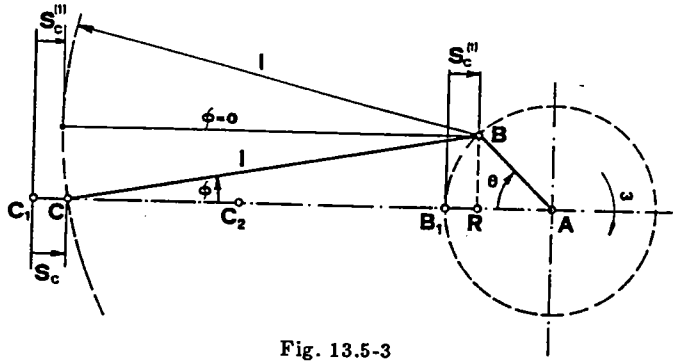


Fig. 13.5-3

Una formula di seconda approssimazione si ottiene sviluppando il termine $\sqrt{1-(\sin\theta/\mu)^2}$, che figura nella (13.5-2), con la formula della serie binomiale:

$$(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots$$

Posto $x = (\sin\theta/\mu)^2$ ed osservando che per $\mu = 4$ risulta:

$$x = (\sin\theta/\mu)^2 \leq 1/16$$

si possono trascurare i termini con x elevato a potenze superiori alla prima, ottenendo così :

$$\sqrt{1-(\sin\theta/\mu)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}$$

Sostituendo questo valore nella (13.5-2) si ottiene:

$$s_C^{(2)} = r(1-\cos\theta+\mu-\mu+\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\theta}{\mu}) = r\left(1-\cos\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{4\mu}\right) \qquad (13.5\text{-}4)$$

b) La velocità del punto C

La velocità v_C di C è data da:

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{ds_C}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = r\omega\left[\sin\theta + \frac{1}{2\mu}\,\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-(\sin\theta/\mu)^2}}\right] =$$

$$= r\omega\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{\mu^2-\sin^2\theta}}\right) \qquad (13.5\text{-}5)$$

Un'espressione di seconda approssimazione di v_C si ottiene trascurando sotto radice $\sin^2\theta$ rispetto a μ^2:

$$v_C^{(2)} = r\omega(\sin\theta + \sin 2\theta/2\mu) \qquad (13.5\text{-}6)$$

Se in questa relazione si trascura il termine $\sin 2\theta/2\mu$ rispetto a $\sin\theta$, si ottiene la formula di prima approssimazione:

$$v_C^{(1)} = r\omega\sin\theta \qquad (13.5\text{-}7)$$

È da osservare che risulta:

$$v_C^{(1)} = ds_C^{(1)}/dt \quad ; \quad v_C^{(2)} = ds_C^{(2)}/dt$$

c) L'accelerazione del punto C

L'accelerazione w_C di C, avendo supposto ω costante, è data da:

$$w_C = dv_C/dt = \frac{dv_C}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} =$$

$$= r\omega^2\left[\cos\theta + \frac{1}{2}\,\frac{2\cos 2\theta\sqrt{\mu^2-\sin^2\theta} - \sin 2\theta\dfrac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\mu^2-\sin^2\theta}}}{\mu^2-\sin^2\theta}\right] =$$

$$= r\omega^2\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta(\mu^2-\sin^2\theta)+(\sin^2 2\theta)/4}{(\mu^2-\sin^2\theta)^{3/2}}\right] \qquad (13.5\text{-}8)$$

Un'espressione di seconda approssimazione si ottiene trascurando $\sin^2\theta$ rispetto a μ^2 e $(\sin^2 2\theta)/4$ rispetto a $\mu^2\cos 2\theta$:

$$w_C^{(2)} = r\omega^2(\cos\theta + \cos 2\theta/\mu) \qquad (13.5\text{-}9)$$

Trascurando infine $(\cos 2\theta)/\mu$ rispetto a $\cos\theta$, si ottiene l'espressione di prima approssimazione:

$$w_C^{(1)} = r\omega^2\cos\theta \qquad (13.5\text{-}10)$$

È ancora da osservare che risulta:

$$w_C^{(1)} = dv_C^{(1)}/dt \quad ; \quad w_C^{(2)} = dv_C^{(2)}/dt$$

Riprendendo in esame l'espressione di $w_C^{(2)}$, si osservi che essa è composta da due termini:

$$\begin{aligned} w'_C &= w_C^{(1)} = r\omega^2\cos\theta \\ w''_C &= r\omega^2\cos 2\theta/\mu \end{aligned} \qquad (13.5\text{-}11)$$

che vengono indicati come accelerazione del primo e del secondo ordine rispettivamente.

L'accelerazione del primo ordine w'_C è una funzione armonica di ampiezza $r\omega^2$ e pulsazione ω, mentre l'accelerazione del secondo ordine w''_C è una funzione armonica di ampiezza $r\omega^2/\mu$ e pulsazione 2ω: si tenga presente che quest'ultima ampiezza risulta, per $\mu = 4$, quattro volte più piccola di quella dell'accelerazione del primo ordine.

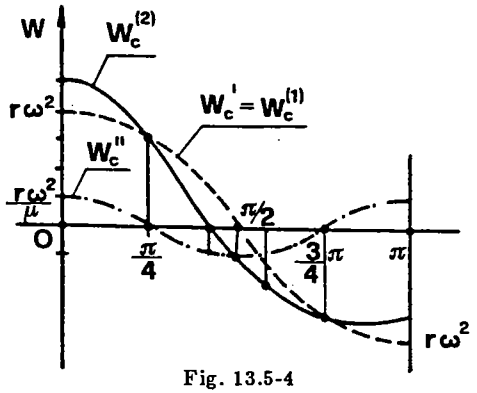


Fig. 13.5-4

In fig.13.5-4 sono riportati gli andamenti di w'_C, w''_C e di $w_C^{(2)}$ in funzione di θ nell'ipotesi di $\mu = 4$.

Per ottenere l'espressione di w_C in funzione di s_C è necessario eliminare la variabile θ nelle espressioni di w_C ed s_C.

Così, ad es., se si assumono per w_C ed s_C le espressioni di prima approssimazione:

$$s_C^{(1)} = r(1-\cos\theta) \quad ; \quad w_C^{(1)} = r\omega^2\cos\theta$$

ricavando dalla prima:

$$r\cos\theta = r - s_C^{(1)}$$

e sostituendo il valore così ottenuto nella seconda, si ottiene:

$$w_C^{(1)} = r\omega^2 - \omega^2 s_C^{(1)} \qquad (13.5\text{-}12)$$

Da questa relazione si deduce che $w_C^{(1)}$ varia linearmente con $s_C^{(1)}$; la retta $w_C^{(1)} = f(s_C^{(1)})$ si traccia osservando che:

$$\begin{array}{lll} \text{per } \theta = 0 & s_C^{(1)} = 0 & w_C^{(1)} = r\omega^2 \\ \text{per } \theta = \pi & s_C^{(1)} = 2r & w_C^{(1)} = -r\omega^2 \end{array}$$

In fig.13.5-5, congiungendo i due punti definiti da queste due coppie di coordinate, si è tracciato il diagramma $w_C^{(1)} = f(s_C^{(1)})$.

La (13.5-12) ed il diagramma che la rappresenta non hanno una approssimazione sufficiente alle applicazioni tecniche. Per questa ragione si

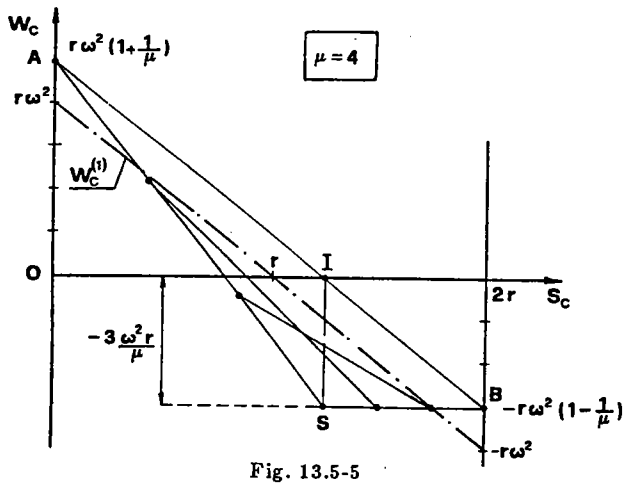


Fig. 13.5-5

preferisce assumere per w_C ed s_C i valori di seconda approssimazione $w_C^{(2)}$ ed $s_C^{(2)}$: si può dimostrare che, eliminando θ dalle espressioni di $w_C^{(2)}$ ed $s_C^{(2)}$, l'andamento di $w_C^{(2)}$ in funzione di $s_C^{(2)}$ è parabolico.

Rinunciando a questa dimostrazione, si riporta il metodo grafico che consente di tracciare la parabola $w_C^{(2)} = f(s_C^{(2)})$; tale metodo comprende i seguenti passi:

1°) si osservi in primo luogo che agli estremi della corsa i valori di $w_C^{(2)}$ ed $s_C^{(2)}$ coincidono con i valori esatti, dati dalle (13.5-8) e -2), risultando:

per $\theta = 0$	$s_C^{(2)} = s_C = 0$	$w_C^{(2)} = w_C = r\omega^2(1+1/\mu)$
per $\theta = \pi$	$s_C^{(2)} = s_C = 2r$	$w_C^{(2)} = w_C = -r\omega^2(1-1/\mu)$

2°) segnati sul diagramma di fig.13.5-5 i punti A e B, individuati da queste due coppie di valori, si congiungano questi punti con un segmento di retta;

3°) per il punto I, intersezione della retta suddetta con l'asse delle ascisse, si tracci, sulla normale per I allo stesso asse, il segmento IS, avente nella scala delle ordinate una lunghezza pari a $-3\omega^2 r/\mu$.

4°) le tangenti alla parabola nei punti estremi del diagramma si ottengono congiungendo A e B con S;

5°) divisi i segmenti AS e SB in un egual numero n di parti eguali ($n = 3$ in figura) e congiungendo opportunamente gli estremi dei segmenti

così ottenuti, si ottengono $n-1$ tangenti alla parabola, che può essere quindi tracciata per inviluppo. In fig. 13.5-6 è riportata la parabola che così si ottiene.

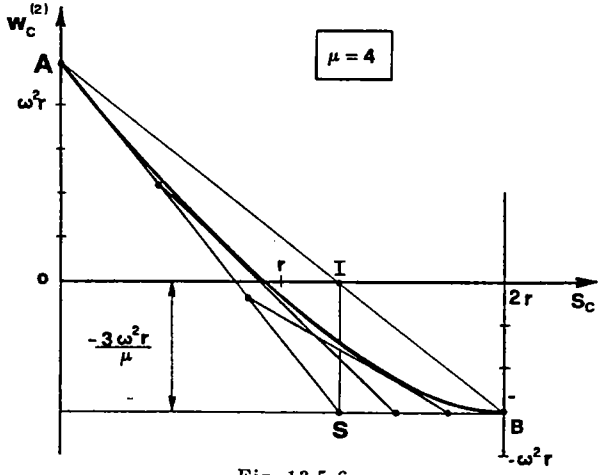


Fig. 13.5-6

È da osservare che la parabola $w_C^{(2)} = f(s_C^{(2)})$ dipende da μ: nelle figg.13.5-5 e 13.5-6 si è assunto $\mu = 4$; in questo caso la tangente alla parabola nel punto B risulta parallela all'asse delle s_C, risultando B ed S equidistanti da tale asse.

Da quanto precede risulta che l'accelerazione w_C assume il valore più grande in corrispondenza del punto morto superiore o esterno, si annulla per $\theta < \pi/2$ ed $s_C < r$ e diventa negativa nell'ultima frazione della corsa verso il punto morto inferiore o interno (v. figg.13.5-4 e 13.5-6).

La velocità v_C, nulla in corrispondenza dei punti morti a causa dell'inversione del moto, assume il suo valore massimo quando $w_C = 0$, cioè per $\theta < \pi/2$ ed $s_C < r$.

13.6 Il moto della biella

Il moto della biella è un moto piano e, nell'ipotesi già fatta di biella rigida, risulta dalla composizione di un moto di traslazione nel piano del moto e di un moto di rotazione intorno ad un asse normale allo stesso piano: il moto relativo tra due suoi punti è dovuto al solo moto di rotazione della biella.

Da ciò deriva che, se è noto il moto di un punto P della biella, il moto di un qualsiasi altro punto Q della stessa può ottenersi come risultante della traslazione nota di P e della rotazione di Q intorno a P.

Considerato che, una volta assegnata la velocità angolare ω della manovella, il moto del punto B è, come si è visto, di immediata determinazione, è conveniente riferire il moto di qualsiasi punto della biella a quello di B.

A questo scopo si assuma (v.fig.13.6-1) un riferimento fisso $\Omega\xi\eta$ con l'asse ξ diretto secondo l'asse CA del cilindro ed un riferimento mobile Bxy, che durante il moto di B si mantenga parallelo a $\Omega\xi\eta$.

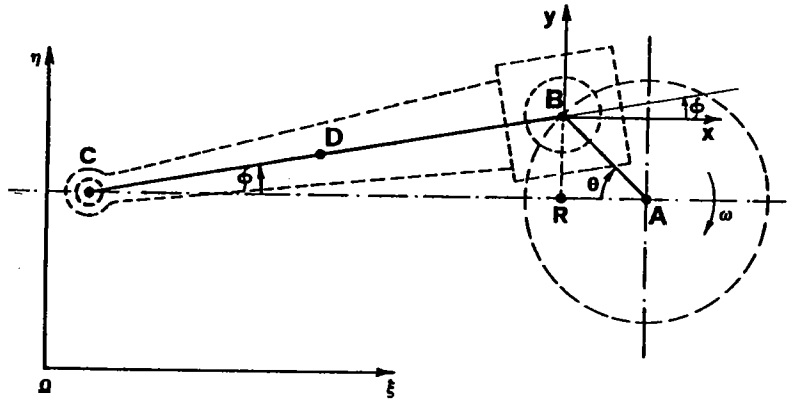


Fig. 13.6-1

La rotazione della biella è individuata dall'angolo ϕ (v.fig.13.6-1): esso risulta funzione di θ e per $\theta < \pi$ risulta di segno opposto a θ.

La relazione che lega ϕ a θ si ottiene osservando (v.fig.13.6-1) che:

$$BR = l \sin\phi = r \sin\theta$$

Si ottiene quindi che:

$$\phi = \arcsin(\sin\theta/\mu) \tag{13.6-1}$$

Dalla fig.13.6-1 e dalla (13.6-1) si deduce che per $0 \le \theta \le \pi/2$ il valore di ϕ cresce al crescere di θ, raggiungendo il massimo per $\theta = \pi/2$; per $\mu = 4$ il valore di ϕ_{max}, che si ricava dalla (13.6-1) vale:

$$\phi_{max} = \arcsin(1/4) \approx 0.2527 \text{ rad} = 14.48°$$

e risulta sufficientemente piccolo per poter ritenere con buona approssimazione:

$$\phi \approx \sin\phi = \frac{1}{\mu}\sin\theta \tag{13.6-1'}$$

È da osservare che l'errore che si commette nel calcolare il valore di ϕ con la (13.6-1') risulta massimo per $\theta = \pi/2$: poiché da questa relazione si calcola:

$$\phi_{max} \approx \frac{1}{\mu}\sin\pi/2 = 0.25$$

si può concludere che l'errore percentuale che si commette calcolando il valore di ϕ con la (13.6-1') è in ogni caso minore dell'1% .

Per $\pi \le \theta \le 2\pi$ il valore di ϕ è negativo e raggiunge un minimo per $\theta = 3\pi/2$.

Derivando la (13.6-1) rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot\phi = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\,\frac{\frac{1}{\mu}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}}} \tag{13.6-2}$$

e derivando ancora:

$$\ddot\phi = \frac{d\dot\phi}{dt} = \frac{d\dot\phi}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \omega^2\,\frac{-\frac{1}{\mu}\sin\theta\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}} - \frac{1}{2\mu}\cos\theta\,\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\mu^2\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}}}}{1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}} =$$

$$= \omega^2\,\frac{\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{2\mu^3} - \frac{\sin\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}\right)}{\mu}}{\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\mu^2}\right)^{3/2}} \tag{13.6-3}$$

Trascurando nelle (13.6-2) e -3) i termini che contengono al denominatore μ^2 e μ^3, si ottengono per $\dot\phi$ e $\ddot\phi$ le formule di prima approssimazione:

$$\dot\phi^{(1)} = \frac{\omega}{\mu}\cos\theta \tag{13.6-4}$$

$$\ddot\phi^{(1)} = -\frac{\omega^2}{\mu}\sin\theta \tag{13.6-5}$$

Queste relazioni approssimate si ottengono direttamente dalla (13.6-1').

In fig.13.6-2 sono riportati i diagrammi di $\phi(\theta)$, $\phi^{(1)}(\theta)$ e $\ddot{\phi}^{(1)}(\theta)$, tracciati sulla base delle formule approssimate (13.6-1'), (13.6-4), (13.6-5); da essi risulta che durante la corsa C_1C_2 la velocità $\dot{\phi}$ è massima per $\theta = 0$, si annulla per $\theta = \pi/2$ ed assume un massimo negativo per $\theta = \pi$.

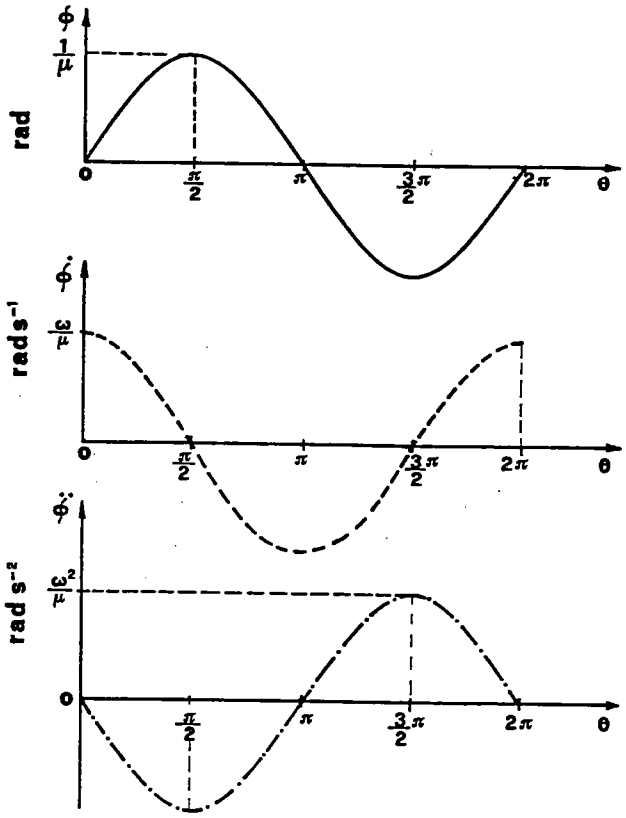


Fig. 13.6-2

È ancora importante osservare che $\ddot{\phi}$ è negativa per tutta la corsa C_1C_2.

a) La traiettoria di un punto dell'asse della biella

Sia D un punto dell'asse CB della biella e z la sua distanza da C (v.fig.13.6-3).

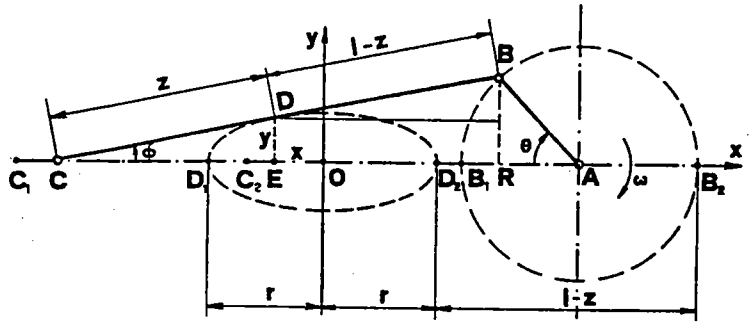


Fig. 13.6-3

Durante il moto del manovellismo il punto D verrà a trovarsi sull'asse CA due volte per ogni giro della manovella e cioè per $\theta = 0$ e per $\theta = \pi$: dette D_1 e D_2 le posizioni di D su AC, dall'esame della fig.13.6-3 si deduce:

$$D_1D_2 = C_1C_2 = B_1B_2 = 2r \quad ; \quad B_2D_2 = l - z$$

Detto O il punto medio del segmento D_1D_2 ed assunto come riferimento la coppia di assi Oxy, segnata in figura, le coordinate x ed y di D risultano date da:

$$x = OA - EA \quad ; \quad y = z\sin\phi \tag{13.6-6}$$

Dalla figura si deduce inoltre che:

$$OA = OB_2 - AB_2 = r + l - z - r = l - z$$
$$EA = ER + RA = (l - z)\cos\phi + r\cos\theta$$
$$BR = l\sin\phi = r\sin\theta$$

e quindi risulta:

$$\begin{cases} x = l - z - (l - z)\cos\phi - r\cos\theta \\ y = (z/\mu)\sin\theta \end{cases}$$

Trascurando l'inclinazione della biella ($\phi = 0$) si ottiene:

$$\begin{cases} x = -r\cos\theta \\ y = (z/\mu)\sin\theta \end{cases} \tag{13.6-7}$$

e quindi:

$$\begin{cases} x/r = -\cos\theta \\ y/(z/\mu) = \sin\theta \end{cases}$$

Quadrando e sommando si ottiene infine:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{z}{\mu}\right)^2} = 1 \qquad (13.6\text{-}8)$$

Questa relazione mette in evidenza che, con l'approssimazione alquanto grossolana di ritenere ϕ trascurabile, la traiettoria del punto D risulta un'ellisse di semiassi r e z/μ, distesi sugli assi x ed y.

Sempre nello spirito dell'approssimazione suddetta si può quindi concludere che i punti dell'asse della biella descrivono orbite ellittiche aventi l'asse maggiore disteso lungo l'asse del cilindro; mentre la lunghezza di questo asse è sempre pari alla corsa $2r$ del pistone, la lunghezza $2z/\mu$ dell'asse minore è pari a zero per $D \equiv C$, cresce al crescere di z fino a raggiungere il valore di $2r$ per $D \equiv B$: in corrispondenza dei punti estremi della biella le ellissi degenerano quindi rispettivamente nel segmento di retta C_1C_2 e nella circonferenza di raggio r e centro A.

b) La velocità del punto D

Tenendo presente che l'atto di moto piano della biella è una rotazione intorno al centro di istantanea rotazione O, in fig.13.6-4 si è determinato tale punto come intersezione delle normali, CO e BO, alle traiettorie descritte da B e C rispettivamente.

La velocità di D è quindi rappresentata da un vettore $\bar{v}_D$ diretto normalmente alla congiungente D con O ed avente il verso definito da quello di Ω.

Una conveniente espressione vettoriale di $\bar{v}_D$ si può ottenere osservando che, con riferimento alla particolare coppia di assi mobili Bxy (v.fig.13.6-5), già definita nell'introduzione di questo paragrafo, può scriversi:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_t + \bar{v}_r = \bar{v}_B + \bar{v}_{DB} \qquad (13.6\text{-}9)$$

avendo indicato con:

$\bar{v}_D$ = velocità assoluta del punto D,

$\bar{v}_t$ = velocità di trascinamento = $\bar{v}_B$ = velocità assoluta di B,

$\bar{v}_r$ = velocità relativa = $\bar{v}_{DB}$ = velocità relativa di D rispetto a B.

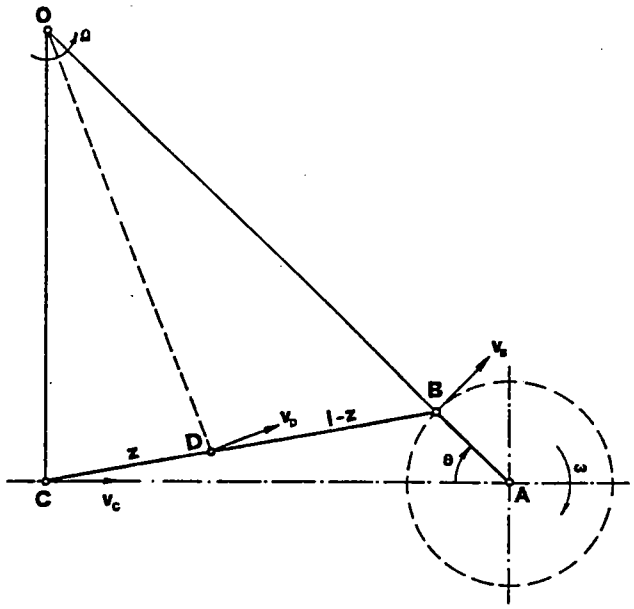


Fig. 13.6-4

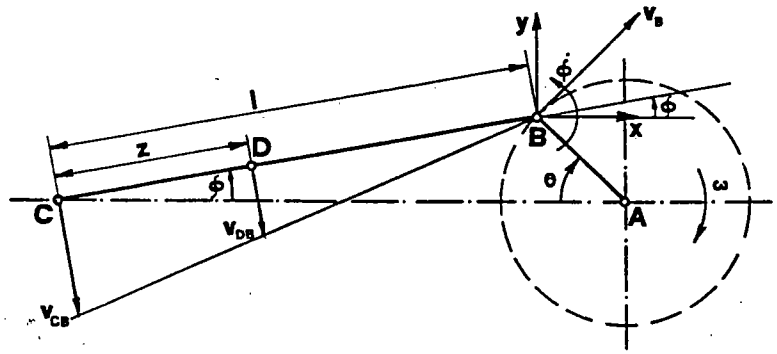


Fig. 13.6-5

Tenendo presente che il moto relativo a B di un qualsiasi altro punto dell'asse della biella, è una rotazione ϕ intorno ad un asse passante per B e normale al piano del moto, si deduce che:

$$\bar{v}_{DB} = (B - D) \wedge \dot{\bar{\phi}} \qquad (13.6\text{-}10)$$

Il vettore $\bar{v}_{DB}$ giace quindi nel piano del moto, risulta normale all'asse della biella, ha modulo pari a $\dot{\phi}(l - z)$ e verso definito dal verso di $\dot{\phi}$ (v.fig.13.6-5).

Per il punto C si può scrivere analogamente:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} \qquad (13.6\text{-}11)$$

essendo $\bar{v}_{CB}$, velocità relativa di C rispetto a B, data da:

$$\bar{v}_{CB} = (B - C) \wedge \dot{\bar{\phi}} \qquad (13.6\text{-}12)$$

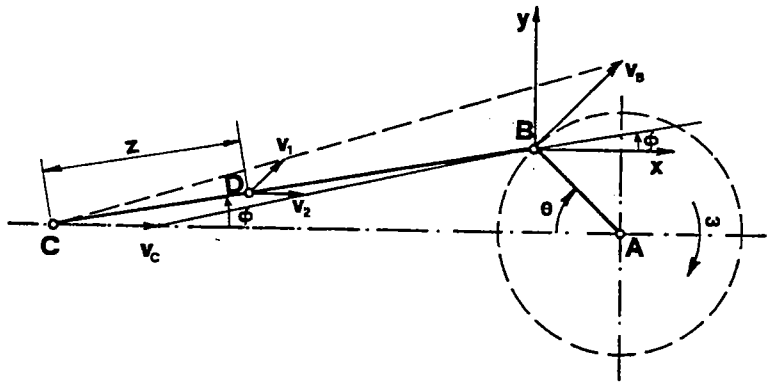


Fig. 13.6-6

Il vettore $\bar{v}_{CB}$ risulta ancora normale alla biella, parallelo a $\bar{v}_{DB}$ e di modulo pari a $\dot{\phi}l$ (v.fig.13.6-5).

Essendo $\bar{v}_{DB}$ e $\bar{v}_{CB}$ paralleli, si può scrivere ancora:

$$\bar{v}_{DB}/\bar{v}_{CB} = \dot{\phi}(l - z)/\dot{\phi}l = (l - z)/l$$

Riprendendo in esame la (13.6-9) e la (13.6-11) si può scrivere:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_B + \bar{v}_{DB} = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}(l - z)/l = \bar{v}_B + (\bar{v}_C - \bar{v}_B)(l - z)/l = \\ = \bar{v}_B z/l + \bar{v}_C(l - z)/l = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \qquad (13.6\text{-}13)$$

Questa relazione mette in evidenza che il vettore velocità di un punto qualsiasi D dell'asse della biella è somma di due componenti $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, paralleli ai vettori $\bar{v}_B$ e $\bar{v}_C$ e di moduli proporzionali alle distanze del punto stesso dai punti C e B rispettivamente.

È interessante infine osservare che, per tutti i punti dell'asse della biella, la componente v della velocità assoluta lungo lo stesso asse risulta costante e pari alla componente di $\bar{v}_B$ lungo tale asse, ossia:

$$v = v_B \cos[\pi/2 - (\theta + \phi)] = v_B \sin(\theta + \phi) \qquad (13.6\text{-}14)$$

essendo la velocità relativa v_{DB} normale all'asse della biella.

Questo risultato è una conseguenza dell'ipotesi fatta, che considera la biella come un corpo rigido.

c) L'accelerazione del punto D

Poiché gli assi di riferimento Bxy sono dotati di moto di sola traslazione, l'accelerazione di Coriolis:

$$\bar{w}_c = 2\bar{\omega}_r \wedge \bar{v}_r$$

è nulla e si può quindi scrivere:

$$\bar{w}_D = \bar{w}_r + \bar{w}_r = \bar{w}_B + \bar{w}_{DB} \qquad (13.6\text{-}15)$$

D'altra parte, essendo il moto relativo di D rispetto a B un moto di pura rotazione, risulta:

$$\bar{w}_{DB} = \bar{w}_{DB,c} + \bar{w}_{DB,t} \qquad (13.6\text{-}16)$$

con (v.fig.13.6-7):

$\bar{w}_{DB,c}$ = componente centripeta della $\bar{w}_{DB}$

$\bar{w}_{DB,t}$ = componente tangenziale della $\bar{w}_{DB}$

Per il punto C si può scrivere analogamente:

$$\bar{w}_{CB} = \bar{w}_{CB,c} + \bar{w}_{CB,t} \qquad (13.6\text{-}17)$$

In fig.13.6-7, ricordando quanto già detto a proposito del segno di $\ddot{\phi}$, sono stati tracciati i vettori componenti di $\bar{w}_{DB}$ e $\bar{w}_{CB}$.

È da notare che i vettori $\bar{w}_{DB}$ e $\bar{w}_{CB}$ risultano tra loro paralleli e proporzionali alle distanze di D e C da B rispettivamente; infatti essi sono