L'aliquota dell'energia cinetica di S dovuta alla sola rotazione, nei due riferimenti, è data da:

$$E = (1/2)\{\omega^T\}[I]\{\omega\} \quad ; \quad E' = (1/2)\{\omega'\}^T[I']\{\omega'\}$$

Nelle macchine di un certo rilievo il costruttore, che ha effettu
razioni di bilanciamento, è tenuto a fornire il valore dello sbila
residuo, che viene in genere indicato come sbilanciamen
residuo e^*.

la matrice di rotazione è ortogonale in quanto risulta:

$$[R(\alpha)][R(\alpha)]^T = [1]$$

e quindi:

$$[R(\alpha)]^T = [R(\alpha)]^{-1} \tag{3.4-7}$$

L'uso della matrice di rotazione consente di determinare facilmente come varia la matrice d'inerzia di un corpo rigido al variare dell'orientazione della terna di riferimento.

Si consideri infatti (v. fig.3.4–2) un corpo rigido S ed una terna $Oxyz$; sia $[I]$ la matrice d'inerzia di S rispetto alla terna suddetta.

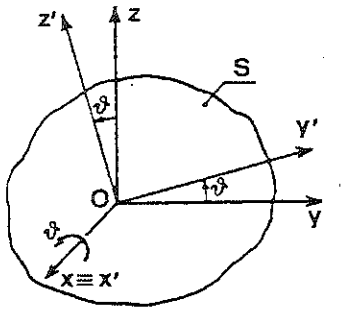


Fig.3.4–2

Si consideri adesso un'altra terna $Ox'y'z'$, ruotata rispetto alla prima di un angolo θ intorno all'asse x e si indichi con $[I']$ la matrice d'inerzia di S rispetto a questa nuova terna.

Indicate con ω_x, ω_y, ω_z le componenti di $\bar{\omega}$ sulla terna $Oxyz$ e con ω'_x, ω'_y, ω'_z, le componenti della stessa sulla terna $Ox'y'z'$, risulta:

$$\{\omega'\} = [R_x(\theta)]\{\omega\}$$

e quindi, premoltiplicando per $[R_x(\theta)]^T$:

$$\{\omega\} = [R_x(\theta)]^T\{\omega'\}$$

L'aliquota dell'energia cinetica di S dovuta alla sola rotazione, nei due riferimenti, è data da:

$$E = (1/2)\{\omega^T\}[I]\{\omega\} \quad ; \quad E' = (1/2)\{\omega'\}^T[I']\{\omega'\}$$

Dovendo evidentemente risultare $E = E'$, si deduce che:

$$\{\omega'\}^T[R_x(\theta)][I][R_x(\theta)]^T\{\omega'\} = \{\omega'\}^T[I']\{\omega'\}$$

e quindi che:

$$[I'] = [R_x(\theta)][I][R_x(\theta)]^T$$

La (3.4-8) è la relazione che consente di determinare la matri di un corpo rigido al variare dell'orientazione della terna di rife

3.5 Sbilanciamento statico e dinamico di un rotore

La condizione ideale, che vede il rotore di una macchina ruot ad un asse centrale d'inerzia, corrisponde ad un'ipotesi di perfezi che è impossibile raggiungere in pratica.

Tuttavia solo in questa condizione forze e coppie d'inerzia i sarebbero assenti e la rotazione del rotore risulterebbe "tranqui

Per avvicinarsi a questa situazione, a conclusione delle fasi cos rotore, vengono effettuate sullo stesso due operazioni, non neces distinte, che prendono il nome di bilanciamento statico e bil dinamico del rotore (v. Cap.6).

Un rotore si dice staticamente sbilanciato, quando il suo bari appartiene all'asse di rotazione.

Lo sbilanciamento statico viene in genere espresso come la di del baricentro dall'asse di rotazione.

L'operazione di bilanciamento statico consiste nel portare il va al disotto di un valore limite e^*.

Tale valore limite è fissato, per ogni tipo di rotore, in considera sue condizioni di funzionamento, da norme internazionali.

Un rotore si dice dinamicamente sbilanciato, quando il suo tazione, pur essendo baricentrico, non è centrale d'inerzia.

L'operazione, che tende a far coincidere l'asse di rotazione c centrale d'inerzia, prende il nome di bilanciamento dinamico de

Le due operazioni vengono in genere effettuate contemporan macchine, indicate col nome di macchine bilanciatrici.

A valle di queste operazioni resterà però sempre un piccolo v sbilanciamento, che viene indicato come "sbilanciamento residu

Nelle macchine di un certo rilievo il costruttore, che ha effettu razioni di bilanciamento, è tenuto a fornire il valore dello sbil residuo, che viene in genere indicato come sbilanciamen residuo e^*.

Da quanto detto risulta che un rotore reale, per quanto sottoposto alle più moderne operazioni di bilanciamento, risulterà alla fine un corpo che ruota intorno ad un asse, che non è né baricentrico né principale d'inerzia.

3.6 Forza e coppia d'inerzia dovute allo sbilanciamento

Sia R il rotore di una macchina che ruota con velocità angolare ω intorno ad un asse r (v. fig.3.6–1).

Considerata la terra come un riferimento inerziale e l'asse r solidale alla terra (ovvero solidale ad un mobile che si muove di moto rettilineo uniforme), l'unica forza attiva, applicata al baricentro del corpo, è la forza peso.

Per effetto della rotazione, ogni elemento di massa del rotore diventa sede di una forza d'inerzia centrifuga e di una forza d'inerzia tangenziale ed il rotore di un sistema di forze d'inerzia.

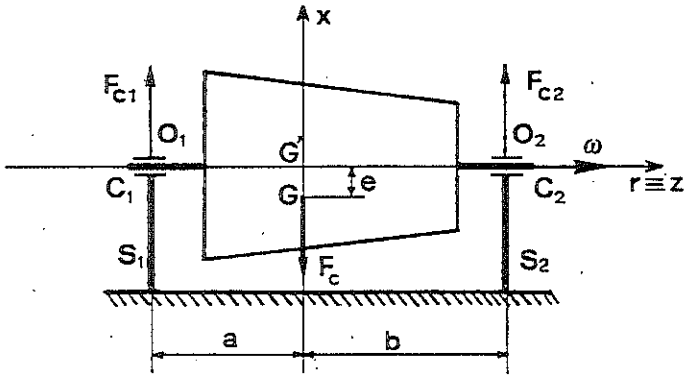


Fig.3.6–1

Come è noto, qualsiasi sistema di forze applicate, può ridursi al proprio risultante, applicato in un punto arbitrariamente fissato O e ad una coppia di momento pari al momento risultante del sistema di forze rispetto allo stesso punto O.

Allo scopo di determinare solo la forza e la coppia d'inerzia suddette, non considereremo la forza peso e le corrispondenti reazioni vincolari. Tali reazioni possono facilmente ricavarsi a parte ed essere poi "aggiunte" a quelle che derivano dalle sollecitazioni dinamiche che ci proponiamo di calcolare.

Considereremo inoltre i due cuscinetti C_1 e C_2 dei due support S_2, che vincolano il rotore R a ruotare intorno all'asse fisso r, vinc di attrito.

Dalla prima equazione cardinale si deduce che:

$$m\bar{a}_G = \bar{R}^{(v)}$$

Essendo:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_c + \bar{a}_t$$

con:

$\bar{a}_c$ = accelerazione centripeta di G,

$\bar{a}_t$ = accelerazione tangenziale di G;

la (3.6-1) può scriversi:

$$\bar{R}^{(v)} - m\bar{a}_c - m\bar{a}_t = 0$$

La (3.6-2) mette in evidenza che, nelle ipotesi fatte, le forze d centrifuga, $\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$, e tangenziale, $\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$, sono equilibra reazioni dei vincoli, cioè dei supporti, di risultante $\bar{R}^{(v)}$.

La forza centrifuga F_c vale:

$$F_c = me\omega^2$$

dove con "e" si è indicata la distanza del baricentro G dall'asse di ro

La forza tangenziale F_t è data da:

$$F_t = me\dot{\omega}$$

La prima è diretta costantemente secondo il raggio "e" della circon descritta da G durante la rotazione di R (v. fig.3.6–1) e costituisce u rotante con R.

La seconda, ancora applicata in G, è diretta secondo la tange suddetta circonferenza ed ha verso contrario al verso di rotazione s ovvero verso concorde ad ω se $\dot{\omega} < 0$.

Considerando (v. fig.3.6–1) come piano di rappresentazione que passando per r, contiene il baricentro G di R ed indicate con a distanze dalla mezzeria dei supporti del punto G', proiezione ort di G su r, le reazioni dei supporti si calcolano facilmente, consid l'equilibrio dei momenti rispetto ai punti O_1 ed O_2.

Procedendo in questo modo ed avendo indicato con $F_{c,1}$ e $F_{c,2}$ le reazioni dei supporti relative alla F_c e con $F_{t,1}$ e $F_{t,2}$ quelle relative alla F_t, si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{c,1} &= F_c \frac{b}{a+b} \qquad F_{c,2} = F_c \frac{a}{a+b} \\ F_{t,1} &= F_t \frac{b}{a+b} \qquad F_{t,2} = F_t \frac{a}{a+b} \end{aligned} \tag{3.6-5}$$

Per il calcolo della coppia d'inerzia si assuma come polo dei momenti il punto G': questo punto può essere assunto come polo dei momenti in quanto, appartenendo all'asse di rotazione r, è un punto fisso del rotore.

In conseguenza di questa scelta del polo, il risultante delle forze $\bar{F}_c$ ed $\bar{F}_t$, già calcolate, deve ritenersi applicato nello stesso punto G'.

Considerata quindi una terna $Oxyz$, solidale ad R, con $O \equiv G'$ e z coincidente con r, la seconda equazione cardinale della dinamica si scrive:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{xz}\dot{\omega} \\ -I_{yz}\dot{\omega} \\ I_{zz}\dot{\omega} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -I_{xz}\omega \\ -I_{yz}\omega \\ I_{zz}\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{xz}\dot{\omega} \\ -I_{yz}\dot{\omega} \\ I_{zz}\dot{\omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_{yz}\omega^2 \\ -I_{xz}\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.6-6}$$

Le componenti $M_x^{(v)}$, $M_y^{(v)}$, $M_z^{(v)}$ risultano quindi essere:

$$\begin{aligned} M_x^{(v)} &= -I_{xz}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2 \\ M_y^{(v)} &= -I_{yz}\dot{\omega} - I_{xz}\omega^2 \\ M_z^{(a)} &= I_{zz}\dot{\omega} \end{aligned} \tag{3.6-7}$$

Dalle prime due delle (3.6-7) si deduce che i supporti S_1 e S_2 esercitano una coppia di reazioni vincolari il cui momento $M_0^{(v)}$ è dato da:

$$M_0^{(v)} = \sqrt{\left(M_x^{(v)}\right)^2 + \left(M_y^{(v)}\right)^2}$$

Essendo il sistema di riferimento ruotante col corpo R, anche $\bar{M}_0^{(}$ piano che contiene la coppia di reazioni vincolari è ruotante con R.

Un momento uguale e contrario ad $\bar{M}_0^{(v)}$ costituisce inoltre il m delle forze d'inerzia, che si genera con la rotazione del corpo R.

Dalla terza delle (3.6-7) si deduce, infine, un risultato ovvio: p corpo R ruoti con un'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ è necessario che su agisca un momento attivo $M_z^{(a)}$ pari a $I_{zz}\dot{\omega}$; tale momento è positi è motore se $\dot{\omega} > 0$; è invece resistente se $\dot{\omega} < 0$.

Se la velocità angolare ω è costante, risulta $\dot{\omega} = 0$ e quindi delle d d'inerzia applicate in G resta solo la forza d'inerzia $\bar{F}_c$, data dalla mentre le (3.6-7) diventano:

$$\begin{cases} M_x^{(v)} = I_{yz}\omega^2 \\ M_y^{(v)} = -I_{xz}\omega^2 \\ M_z^{(a)} = 0 \end{cases}$$

Dalle (3.6-7′) si deduce che anche in questo caso la rotazione del genera una coppia d'inerzia rotante e quindi una coppia di reazi supporti il cui momento $M_0^{(v)}$ ha modulo pari a:

$$M_0^{(v)} = \omega^2 \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}$$

Dalla terza delle (3.6-7′) si deduce infine che il momento risultant delle forze attive è nullo, il che sta a significare che in queste co il momento motore ed il momento resistente, agenti sul rotore, s equilibrio.

Se l'asse di rotazione r è baricentrico ($e = 0$) ma non principale d si avrà:

$$\dot{\omega} \neq 0 \begin{cases} F_c = 0 \\ F_t = 0 \\ M_x^{(v)}, M_y^{(v)}, M_z^{(a)} \text{ dati dalle (3.6-7)} \end{cases}$$

$$\dot{\omega} = 0 \begin{cases} F_c = 0 \\ F_t = 0 \\ M_x^{(v)}, M_y^{(v)}, M_z^{(a)} \text{ dati dalle (3.6-7′)} \end{cases}$$

Infine se l'asse di rotazione è centrale d'inerzia si avrà:

$$\dot{\omega} \neq 0 \begin{cases} F_c = 0 & M_x^{(v)} = 0 \\ & M_y^{(v)} = 0 \\ F_t = 0 & M_z^{(a)} = I_{zz}\dot{\omega} \end{cases} \tag{3.6-9}$$

$$\dot{\omega} = 0 \begin{cases} F_c = 0 & M_x^{(v)} = 0 \\ & M_y^{(v)} = 0 \\ F_t = 0 & M_z^{(a)} = 0 \end{cases} \tag{3.6-10}$$

Le (3.6-9) e (3.6-10) mettono in evidenza che nel caso ideale di un rotore, che ruoti intorno ad un asse centrale d'inerzia, la forza e la coppia d'inerzia rotanti si annullano.

Esercizio 3.I

Il rotore di una turbina ha uno sbilanciamento statico residuo $e = 4 \cdot 10^{-3}$ mm, una massa $m = 1500$ kg e ruota con velocità angolare pari a 6000 giri/min.

Nota la posizione del baricentro G del rotore rispetto alla mezzeria dei supporti (v. fig.3.I–1), calcolare:

1) la forza d'inerzia rotante,
2) le reazioni dei supporti,
3) le forze armoniche orizzontali e verticali che sollecitano i supporti della macchina,
4) la frequenza di queste forze armoniche.

Svolgimento

La forza centrifuga F_c vale:

$$F_c = m \cdot e \cdot \omega^2 = 1500\left(2\pi\frac{6000}{60}\right)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 2369 \text{ N}$$

Le reazioni R_1 e R_2 dei supporti sono date da:

$$R_1 = F_c \cdot \frac{1000}{1500} = 1579 \text{ N}$$

$$R_2 = F_c \cdot \frac{500}{1500} = 790 \text{ N}$$

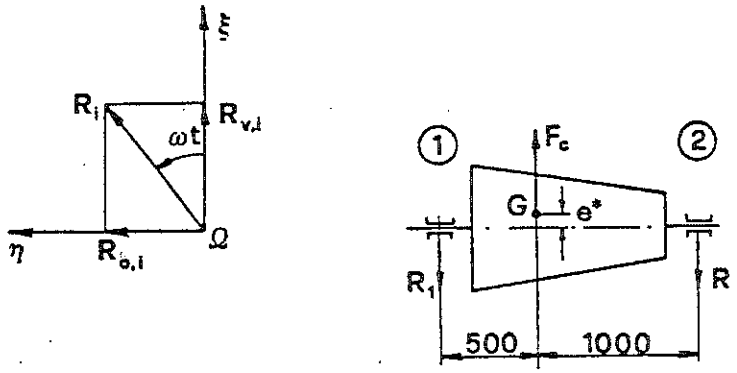


Fig.3.I–1

Assunta come riferimento fisso la terna $\Omega\xi\eta\zeta$ con $\Omega = G'$, (v. fig.3 componenti orizzontali e verticali delle azioni $-R_1$ e $-R_2$, che il rotore ese supporti, espresse in newton, sono date da:

$$\begin{cases} -R_{0,1} &= R_1 \sin\omega t = 1579 \sin\omega t \\ -R_{v,1} &= R_1 \cos\omega t = 1579 \cos\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_{0,2} &= R_2 \sin\omega t = 790 \sin\omega t \\ -R_{v,2} &= R_2 \cos\omega t = 790 \cos\omega t \end{cases}$$

La frequenza f delle suddette azioni è data da:

$$f = \text{ frequenza} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 6000}{2\pi \cdot 60} = 100 \text{ Hz}$$

Oltre alle reazioni rotanti R_1 ed R_2, i supporti esercitano le reazioni dovute al peso del rotore.

Indicato con P il peso del rotore:

$$P = \text{ mg} = 1500 \cdot 9.81 = 14715 \text{ N}$$

I valori di P_1 e P_2 sono dati da:

$$P_1 = P \cdot \frac{1000}{1500} = 9810 \text{ N}$$

$$P_2 = P \cdot \frac{500}{1500} = 4905 \text{ N}$$