CAPITOLO 5

VIBRAZIONI MECCANICHE

5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti le macchine sono state considerate come sistemi costituiti da organi meccanici rigidi e si è visto che in questa ipotesi un gruppo di macchine si comporta come un sistema ad un grado di libertà.

Gli organi di una macchina sono però sollecitati da forze periodiche e per questo motivo subiscono deformazioni variabili con lo stesso periodo.

Una deformazione variabile configura una vibrazione, sicché si può affermare che, quando la macchina è in funzione, gli organi della stessa vibrano a causa di azioni forzanti periodiche.

Se le ampiezze di queste vibrazioni sono modeste, è ancora accettabile l'ipotesi di sistema rigido, ma se al variare delle condizioni di funzionamento della macchina, le ampiezze della vibrazione e della deformazione diventano molto grandi, la resistenza meccanica della macchina stessa può risultarne compromessa.

Situazioni pericolose di questo tipo sono dovute a fenomeni di risonanza, che si verificano quando la frequenza delle forze, che sollecitano un organo della macchina, eguaglia una delle frequenze con le quali l'organo stesso può naturalmente vibrare.

Per evitare che fenomeni di questo tipo si verifichino durante il funzionamento di un gruppo di macchine, è necessario che in sede di progetto del gruppo stesso, possibili fenomeni vibratori del tipo descritto vengano esaminati, in modo che sia possibile adottare, già in quella sede, tutti gli

accorgimenti adatti ad assicurare un funzionamento esente da pericolose risonanze.

In questo capitolo verranno esaminati gli aspetti fondamentali delle vibrazioni meccaniche: i risultati ottenuti verranno utilizzati nei capitoli successivi per studiare i fenomeni vibratori, che più frequentemente si verificano nelle macchine.

5.2 Moto periodico

La vibrazione $x(t)$ di un sistema meccanico (v. fig.5.2–1) è periodica, se il valore dello spostamento x del sistema assume lo stesso valore ad intervalli di tempo T, cioè se risulta:

$$x(t+T) = x(t) \tag{5.2-1}$$

L'intervallo di tempo T viene detto periodo della vibrazione ed è in genere misurato in secondi.

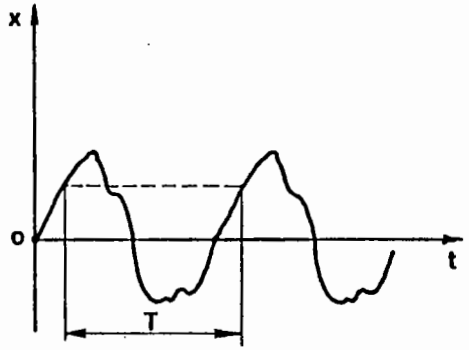


Fig.5.2–1

Poiché, come sarà detto nel par.5.7, un moto periodico, come qualsiasi altra grandezza periodica, è esprimibile in serie di Fourier :

$$x(t) = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} X_n \cos\left(n\omega t + \phi_{0,n}\right) \tag{5.2-2}$$

cioè come somma di moti armonici semplici, è opportuno iniziare lo studio di una vibrazione nell'ipotesi che essa sia costituita da un moto armonico semplice.

5.3 Moto armonico

Un moto armonico $x(t)$ è rappresentato dalla funzione:

$$x(t) = X\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \tag{5.3-1}$$

e risulta completamente definito (v. fig.5.3–1) se di esso sono note l'ampiezza X, la pulsazione ω e la fase iniziale $\phi_0 = \omega t_0$.

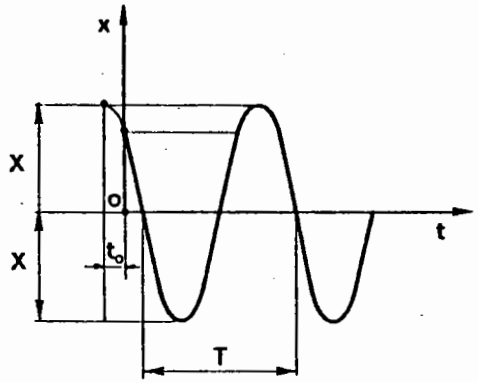


Fig.5.3–1

La pulsazione ω è legata al periodo T, espresso in secondi, ed alla frequenza f, espressa in Hz (hertz), dalle relazioni:

$$T = 2\pi/\omega \text{ s} \quad ; \quad f = 1/T = \omega/2\pi \text{ Hz} \tag{5.3–2}$$

La pulsazione ω ha quindi le stesse dimensioni, $[T^{-1}]$, della velocità angolare.

La velocità $\dot{x}(t)$ del moto armonico si ottiene derivando rispetto al tempo la (5.3-1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = dx/dt &= -X\omega\sin\left(\omega t + \phi_0\right) = \\ &= X\omega\cos\left(\omega t + \phi_0 + \pi/2\right) \end{aligned} \tag{5.3-3}$$

e risulta quindi essere una grandezza armonica di pulsazione ω, avente cioè lo stesso periodo T e la stessa frequenza f del moto armonico $x(t)$ e di ampiezza pari ad ωX.

Dalla (5.3-3) si deduce inoltre che la velocità $\dot{x}(t)$ è sfasata di $\pi/2$ in anticipo rispetto allo spostamento $x(t)$ e per questo motivo si dice in quadratura con questo.

L'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico si ottiene derivando rispetto al tempo la $\dot{x}(t)$:

$$\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2 = -X\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = \\ = X\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0 + \pi) \qquad (5.3\text{-}4)$$

Da questa relazione si deduce che l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico è ancora una grandezza armonica di pulsazione ω, sfasata di π rispetto a $x(t)$ (in opposizione di fase rispetto a x) e di ampiezza $\omega^2 X$.

5.4 Rappresentazione vettoriale di un moto armonico

Come qualsiasi altra grandezza armonica, il moto armonico (5.3-1) può essere rappresentato da un vettore rotante con velocità angolare pari alla pulsazione ω e di modulo uguale all'ampiezza X del moto armonico. Infatti se, come in fig.5.4–1, si traccia un vettore di modulo X e si immagina che tale vettore ruoti in verso antiorario con velocità angolare ω, in ogni istante la posizione del vettore sarà individuata dall'angolo $(\omega t + \phi_0)$, che il vettore stesso forma con l'asse v, e la proiezione del vettore rotante sullo stesso asse coincide con il moto armonico (5.3-1).

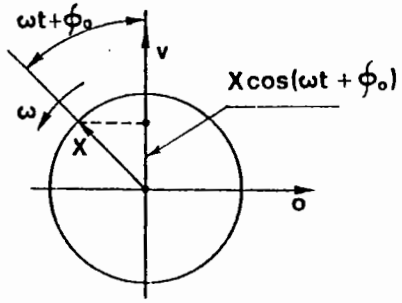


Fig.5.4–1

Si può concludere quindi che il vettore rotante con velocità angolare ω e di modulo X può rappresentare il moto armonico (5.3-1), nel senso che la proiezione di questo vettore sull'asse v coincide con il moto armonico assegnato.

È da osservare che all'istante iniziale $t = 0$ il vettore rotante risulterà spostato o sfasato rispetto all'asse v di un angolo pari alla fase iniziale ϕ_0 (v. fig.5.4–2).

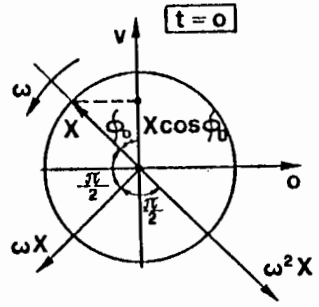


Fig.5.4–2

Tenendo presente che la velocità $\dot{x}(t)$ e l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ del moto armonico $x(t)$, definito dalla (5.3-1), sono grandezze armoniche rappresentate dalle (5.3-3) e (5.3-4) rispettivamente, si può concludere che tali grandezze sono rappresentate da due vettori rotanti (v. fig.5.4–2) con velocità ω, sfasati di $\pi/2$ e π rispetto al vettore X, e di modulo rispettivamente uguale a ωX ed $\omega^2 X$.

È da osservare che, poiché i tre vettori X, ωX ed $\omega^2 X$ ruotano tutti con la stessa velocità angolare ω, la loro posizione relativa non cambia durante la rotazione e quindi il vettore velocità ed il vettore accelerazione risultano sempre in quadratura ed in opposizione di fase col vettore X.

L'utilità della rappresentazione vettoriale di una grandezza armonica sarà messa in evidenza nei paragrafi successivi.

5.5 Composizione di due moti armonici diretti secondo lo stesso asse: battimenti

Si considerino due moti armonici $x_1(t)$ ed $x_2(t)$, definiti dalle relazioni:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) \\ x_2(t) = X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) \qquad (5.5\text{-}1)$$

Il moto $s(t)$, somma dei due moti armonici suddetti, risulta dato da:

$$s(t) = x_1(t) + x_2(t) = \\ = X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) \qquad (5.5\text{-}2)$$

Se un punto materiale si muove lungo un asse x con un moto definito dalla (5.5-2), si dirà che il punto si muove con un moto, che risulta dalla composizione di due moti armonici diretti lungo lo stesso asse x.

Solo se i due moti componenti (5.5-1) hanno la stessa pulsazione ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) il moto risultante:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi_{0,1}) + X_2 \cos(\omega t + \phi_{0,2}) \qquad (5.5\text{-}3)$$

è un moto armonico, caratterizzato, oltre che dalla pulsazione ω, da una ampiezza X e da una fase iniziale ϕ_0.

Ciò può essere dimostrato sia analiticamente, sviluppando con le formule di trigonometria il secondo membro delle (5.5-3), sia ricorrendo alla rappresentazione vettoriale. Quest'ultima via è la più semplice e quindi è questa che seguiremo.

Rappresentati come in fig.5.5–1 i due vettori rotanti X_1 ed X_2 all'istante $t = 0$, si può determinare graficamente il vettore risultante X, del quale risulta determinata, oltre che il modulo X, anche la fase iniziale ϕ_0.

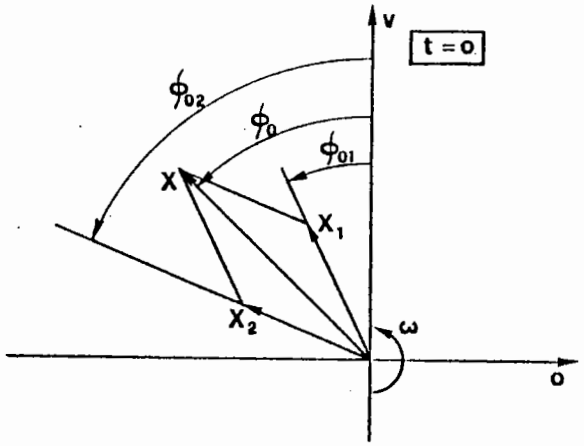


Fig.5.5–1

Dalla fig.5.5–1 si deduce che:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos(\phi_{0,2} - \phi_{0,1})}$$
$$\tan\phi_0 = \frac{X\sin\phi_0}{X\cos\phi_0} = \frac{X_1\sin\phi_{0,1} + X_2\sin\phi_{0,2}}{X_1\cos\phi_{0,1} + X_2\cos\phi_{0,2}} \qquad (5.5\text{-}4)$$

Poiché i due vettori X_1 ed X_2 ruotano alla stessa velocità angolare ω, l'angolo $(\phi_{0,2} - \phi_{0,1})$, compreso tra i due vettori suddetti, non cambia al variare di t e quindi il vettore X, ruotando con la stessa velocità angolare ω, avrà una posizione rispetto ai due vettori X_1 ed X_2 costante e quindi modulo X costante e dato dalla prima delle (5.5-4).

Da quanto detto si deduce che in ogni istante $t > 0$ la somma delle proiezioni sull'asse v dei due vettori X_1 ed X_2 è uguale alla proiezione sullo stesso asse del vettore risultante e quindi:

$$x(t) = X_1\cos(\omega t + \phi_{0,1}) + X_2\cos(\omega t + \phi_{0,2}) = X\cos(\omega t + \phi_0) \qquad (5.5\text{-}5)$$

con X e ϕ_0 dati dalle (5.5-4).

La (5.5-5) esprime che la somma dei due moti armonici x_1 ed x_2 di uguale pulsazione ω è un moto armonico della stessa pulsazione, caratterizzato dai valori di X e ϕ_0 dati dalle (5.5-4).

Se le pulsazioni ω_1 ed ω_2 dei due moti armonici $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono diverse, il moto risultante non è un moto armonico: basta a questo proposito considerare che i due vettori X_1 ed X_2, ruotando a velocità angolari diverse, daranno luogo ad un vettore risultante il cui modulo non è più costante ma è variabile con t.

In questo caso il moto risultante, oltre che non essere armonico, non è in genere neanche periodico: ciò avviene se le pulsazioni ω_1 ed ω_2 non sono commensurabili, cioè se il loro rapporto non è un numero razionale.

Se invece risulta:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = k_1/k_2 \qquad (5.5\text{-}6)$$

con k_1 e k_2 due numeri interi e primi tra loro, il moto risultante $x(t)$ è periodico di periodo T dato da:

$$T = k_1T_1 = k_2T_2 = k_1 \cdot 2\pi/\omega_1 = k_2 \cdot 2\pi/\omega_2 \qquad (5.5\text{-}7)$$

Infatti al tempo $(t+T)$ il moto risultante $x(t)$ è dato per la (5.5-2) e le (5.5-1) da:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= X_1\cos[\omega_1(t+T) + \phi_{0,1}] + X_2\cos[\omega_2(t+T) + \phi_{0,2}] = \\ &= X_1\cos(\omega_1 t + k_1 \cdot 2\pi + \phi_{0,1}) + X_2\cos(\omega_2 t + k_2 \cdot 2\pi + \phi_{0,2}) = \\ &= X_1\cos(\omega_1 t + \phi_{0,1}) + X_2\cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) = \\ &= x(t) \end{aligned} \qquad (5.5\text{-}8)$$

Se a titolo di esempio supponiamo che sia:

$$f_1 = 2.5Hz \quad ; \quad f_2 = 1.5Hz \tag{5.5-9}$$

si avrà:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = 2.5/1.5 = 5/3 = k_1/k_2$$

Le grandezze ω_1 ed ω_2 sono quindi commensurabili ed il moto risultante è periodico di periodo:

$$T = k_1T_1 = k_2T_2 = 5/2.5 = 3/1.5 = 2 \text{ s}$$

È da notare che se le frequenze f_1 ed f_2 variano di poco rispetto ai valori dati dalle (5.5-9), cioè se, ad es., risulta:

$$f_1 = 2.55Hz \quad ; \quad f_2 = 1.55 \text{ Hz}$$

le due grandezze f_1 ed f_2 (e quindi ω_1 ed ω_2) risultano ancora commensurabili essendo:

$$\omega_1/\omega_2 = f_1/f_2 = T_2/T_1 = 2.55/1.55 = 51/31 = k_1/k_2$$

ma il periodo T del moto risultante si allunga notevolmente, passando dal valore di 2 s al valore:

$$T = k_1T_1 = k_2T_2 = 51/2.55 = 31/1.55 = 20 \text{ s}$$

Un interessante fenomeno si verifica se i due moti armonici hanno pulsazioni ω_1 ed ω_2 poco differenti tra loro, cioè se il valore:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \tag{5.5-10}$$

è molto piccolo, essendo $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

Il moto risultante $x(t)$ può scriversi:

$$x(t) = X_1 \cos[(\omega_2 - \Delta\omega)t + \phi_{0,1}] + X_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{0,2}) \tag{5.5-11}$$

Se per semplicità assumiamo come istante iniziale quello per il quale risulta:

$$\phi_{0,1} = \phi_{0,2} = 0$$

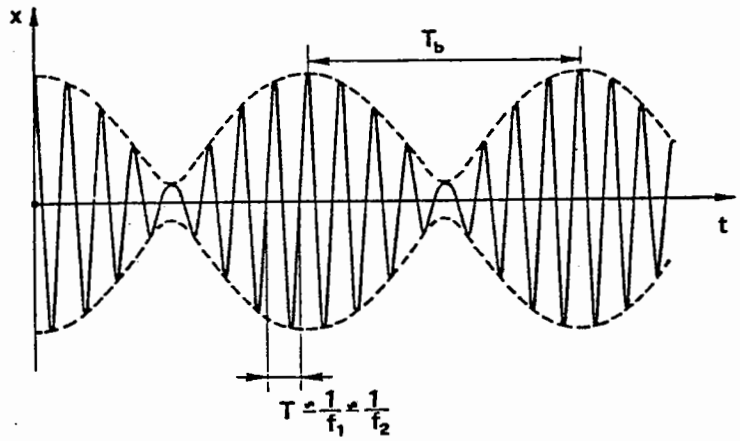


Fig.5.5–2

la (5.5-11) può scriversi:

$$x(t) = X_1 \cos\omega_2 t \cos\Delta\omega t + X_1 \sin\omega_2 t \sin\Delta\omega t + X_2 \cos\omega_2 t =$$

$$= (X_1 \cos\Delta\omega t + X_2)\cos\omega_2 t + X_1 \sin\Delta\omega t \sin\omega_2 t =$$

$$= (X_1 \cos\Delta\omega t + X_2)\cos\omega_2 t + X_1 \sin\Delta\omega t \cos(\omega_2 t - \pi/2) \tag{5.5-12}$$

Da questa relazione si deduce che il moto $x(t)$ può essere considerato, nelle ipotesi fatte ($\Delta\omega/\omega \ll 1$), come risultante di due moti di pulsazione $\omega_2 (\approx \omega_1)$, sfasati tra loro di $\pi/2$, di ampiezza X data da:

$$X = \sqrt{(X_1 \cos\Delta\omega t + X_2)^2 + X_1^2 \sin^2\Delta\omega t} =$$

$$= \sqrt{X_1^2 \cos^2\Delta\omega t + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos\Delta\omega t + X_1^2 \sin^2\Delta\omega t} =$$

$$= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos\Delta\omega t} \tag{5.5-13}$$

L'ampiezza X del moto risultante non è quindi costante, ma varia periodicamente con t tra i valori $(X_1 + X_2)$ e $(X_1 - X_2)$: il periodo T_b di questa funzione periodica è dato da:

$$T_b = 2\pi/\Delta\omega = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) = 1/(f_2 - f_1) \tag{5.5-14}$$

Il fenomeno descritto prende il nome di battimento ed è caratterizzato da un moto risultante rappresentato in fig.5.5–2.

5.6 Composizione di due moti armonici diretti secondo assi ortogonali

Consideriamo il sistema rappresentato in fig.5.6–1, costituito da una massa m vincolata al telaio T mediante quattro molle di eguale rigidità K, disposte come in figura.

Se la massa m, inizialmente in quiete, viene "spostata" lungo l'asse x e quindi lasciata libera, essa compie lungo questo asse una oscillazione libera che, nell'ipotesi di smorzamenti trascurabili, può considerarsi armonica e quindi definita dalla legge:

$$x(t) = X\cos(\omega_n t + \phi_{0,x}) \tag{5.6-1}$$

Come si dimostrerà nel par.5.12 il valore di ω_n dipenderà dalle caratteristiche (m e K) del sistema, mentre X e $\phi_{0,x}$, oltre che da ω_n, dipenderanno dalle condizioni iniziali, cioè dallo spostamento e dalla velocità impressi alla massa m all'istante $t = 0$.

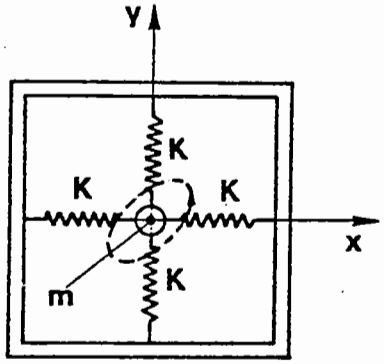


Fig.5.6–1

Analogamente se la massa m viene inizialmente "spostata" lungo l'asse y, essa compie una oscillazione armonica $y(t)$ rappresentabile dalla legge:

$$y(t) = Y\cos(\omega_n t + \phi_{0,y}) \tag{5.6-2}$$

Le due oscillazioni suddette, mentre avranno ampiezze (X ed Y) e fasi iniziali ($\phi_{0,x}$ e $\phi_{0,y}$) in genere diverse, sono però caratterizzate dall'avere la stessa pulsazione ω_n.

Se la massa m viene inizialmente "spostata" lungo un asse diverso da x ed y, ma contenuto nel piano xy, la massa m descriverà una traiettoria in genere ellittica con un periodo $T = 2\pi/\omega_n$; tale traiettoria risulterà dalla composizione dei due moti armonici (5.6-1) e (5.6-2), diretti secondo assi ortogonali.

È evidente che se le due coppie di molle vengono sostituite con due coppie di rigidità diversa, i due moti $x(t)$ ed $y(t)$ avranno pulsazioni ω_x ed ω_y diverse e la massa m, opportunamente spostata dalla posizione di equilibrio, percorrerà una traiettoria che risulterà dalla composizione di due moti armonici ancora diretti secondo assi ortogonali (x ed y), ma aventi pulsazione diversa.

Le traiettorie si presenteranno, in questo caso più generale, come curve piane piuttosto complesse, che prendono il nome di curve di Lissajous, dal nome del matematico francese che nel secolo scorso (1855) studiò per primo l'andamento di tali curve.

Solo nel caso che le due pulsazioni ω_x ed ω_y siano due grandezze commensurabili il moto risultante è periodico.

In questo caso se, in analogia con quanto detto nel par.5.5, indichiamo con k_x e k_y due numeri interi primi tra loro, potrà porsi:

$$\omega_x/\omega_y = f_x/f_y = T_y/T_x = k_x/k_y \tag{5.6-3}$$

ed il moto piano, risultante dei due moti:

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos(\omega_x t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y\cos(\omega_y t + \phi_{0,y}) \end{aligned} \tag{5.6-4}$$

risulterà periodico di periodo $T = k_x T_x = k_y T_y$; la traiettoria risulterà una curva chiusa, percorsa periodicamente ad intervalli di tempo pari a T.

Limitando l'esame al caso più semplice di composizione di moti armonici della stessa pulsazione ω:

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y\cos(\omega t + \phi_{0,y}) \end{aligned} \tag{5.6-5}$$

vedremo come sia possibile determinare, in funzione delle grandezze X, Y, $\phi_{0,x}$, $\phi_{0,y}$, la traiettoria risultante dei due moti armonici.

Nel caso in cui i due moti sono in fase tra loro, cioè se è:

$$\phi_{0,x} = \phi_{0,y} = \phi_0 \tag{5.6-6}$$

dalle (5.6-5) si deduce che per qualsiasi valore di t risulta:

$$x/y = X/Y$$

e quindi:

$$y = (Y/X)x \tag{5.6-7}$$

La (5.6-7) è l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi x, y e di coefficiente angolare Y/X.

Tenendo presente che per le (5.6-5) i valori di x e di y debbono soddisfare alle relazioni:

$$-X \le x \le X \qquad -Y \le y \le Y \tag{5.6-8}$$

si deduce (v. fig.5.6–2,a) che la traiettoria è costituita in questo caso dalla diagonale del rettangolo di lati $2X$ e $2Y$ rispettivamente.

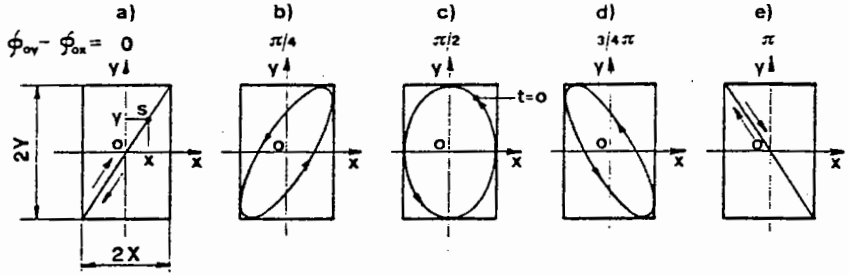


Fig.5.6–2

Tale traiettoria è percorsa con una legge del moto $s(t)$ data da (vedi fig.5.6–2,a):

$$s(t) = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}\cos(\omega t + \phi_0) \tag{5.6-9}$$

Da questa relazione si deduce che il punto si sposta lungo la diagonale del rettangolo con legge armonica di pulsazione ω, percorrendola nei due sensi (5.6–2,a).

Se i due moti sono in quadratura, cioè se risulta:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \pm\pi/2 \tag{5.6-10}$$

i due moti armonici avranno le espressioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y\cos(\omega t + \phi_{0,x} \mp \pi/2) = \pm Y\sin(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \tag{5.6-11}$$

che possono essere scritte:

$$\begin{aligned} x/X &= \cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y/Y &= \pm\sin(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \tag{5.6-12}$$

Quadrando e sommando le (5.6-12) si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$x^2/X^2 + y^2/Y^2 = 1 \tag{5.6-13}$$

Da questa relazione risulta che la traiettoria è un'ellisse di semiassi X ed Y, disposti sugli assi di riferimento x ed y (v. fig.5.6–2,c).

Il verso con il quale la traiettoria viene descritta dipende dal segno di $\Delta\phi$ risultando:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \begin{cases} \pi/2 \longrightarrow \text{antiorario} \\ -\pi/2 \longrightarrow \text{orario} \end{cases} \tag{5.6-14}$$

Per convincersi di ciò basta considerare che per $t = 0$ le (5.6-11) si scrivono:

$$\begin{aligned} x(0) &= X\cos\phi_{0,x} \\ y(0) &= \pm Y\sin\phi_{0,x} \end{aligned} \tag{5.6-15}$$

Per $\Delta\phi = \pi/2$ e $0 < \phi_{0,x} < \pi/2$, all'istante $t = 0$ il punto si trova dunque nel primo quadrante (v. fig.5.6–2,c) ed al crescere di t, decrescendo la x e crescendo la y, il punto si muove in senso antiorario.

Per $\Delta\phi = -\pi/2$ e $0 < \phi_{0,x} < \pi/2$, all'istante $t = 0$ il punto si trova nel quarto quadrante, ed al crescere di t, decrescendo la x e la y, il punto si muove in verso orario.

Se i due moti x ed y sono in opposizione di fase, risulta:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y} = \pm\pi \tag{5.6-16}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y\cos(\omega t + \phi_{0,x} \pm \pi) = -Y\cos(\omega t + \phi_{0,x}) \end{aligned} \tag{5.6-17}$$

Dividendo membro a membro le (5.6-17), si ottiene:

$$x/y = -X/Y$$

e la traiettoria coincide con la diagonale a tangente negativa del rettangolo di lati $2X$ e $2Y$ e di centro O.

Anche in questo caso il punto si muove sulla diagonale con legge armonica:

$$s(t) = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}\cos(\omega t + \phi_{0,x})$$

percorrendola nei due sensi (v. fig.5.6–2,e).

Per $0 < \Delta\phi < \pi/2$, l'ellisse risulterà sempre inscritta nel rettangolo di lati $2X$ e $2Y$, e, partendo dalla condizione $\Delta\phi = 0$, che si può considerare caratterizzata da un'ellisse con uno dei due semiassi di lunghezza zero, presenterà tale semiasse crescente e l'altro decrescente con $\Delta\phi$ ed i semiassi stessi ruotanti in senso antiorario fino a disporsi secondo gli assi di riferimento x, y per $\Delta\phi = \pi/2$ (fig.5.6–2,c).

Per $\pi/2 < \Delta\phi < \pi$, partendo in questo caso dalla condizione di fig.5.6–2,c), l'ellisse, ruotando sempre inscritta nel rettangolo di lati $2X$ e $2Y$, tende con continuità, al variare di $\Delta\phi$, alla configurazione di ellisse degenere, rappresentata in fig.5.6–2,e).

In alcune applicazioni tecniche si presenta spesso il problema inverso di quello descritto: in questi casi, infatti, nota la traiettoria di un punto, è necessario conoscere le ampiezze X ed Y e la differenza di fase $\Delta\phi$ dei due moti armonici componenti.

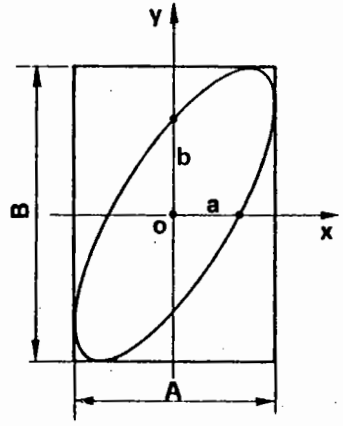


Fig.5.6–3

In questi casi, tracciato (v. fig.5.6–3) il rettangolo che inscrive la traiettoria nota e misurate le lunghezze A e B, dei due lati di questo rettangolo, i valori di X ed Y saranno dati da:

$$X = A/2 \quad ; \quad Y = B/2$$

La differenza di fase $\Delta\phi$ si determina con la relazione:

$$|\Delta\phi| = \arcsin[b/(B/2)] = \arcsin[a/(A/2)] \qquad (5.6\text{-}18)$$

essendo a e b (v. fig.5.6–3) le lunghezze dei segmenti compresi tra l'origine O degli assi x ed y e le intersezioni di questi con l'ellisse. La (5.6-18) si giustifica osservando che i due moti componenti possono essere espressi dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= X\cos(\omega t + \phi_{0,x}) \\ y(t) &= Y\cos(\omega t + \phi_{0,x} - \Delta\phi) \end{aligned} \qquad (5.6\text{-}19)$$

con:

$$\Delta\phi = \phi_{0,x} - \phi_{0,y}$$

e che le intersezioni dell'ellisse, per es. con l'asse y, si ottengono per:

$$\omega t + \phi_{0,x} = \pi/2 \qquad (5.6\text{-}20)$$

Agli istanti t definiti da questa relazione risulta infatti:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= Y\cos(\pi/2 - \Delta\phi) = Y\sin\Delta\phi = \pm b \end{aligned}$$

e quindi:

$$|\Delta\phi| = \arcsin(b/Y) = \arcsin[b/(B/2)]$$

Il segno di $\Delta\phi$ resta definito dal verso col quale l'ellisse viene descritta, risultando, per quanto è stato detto:

$\Delta\phi > 0$ verso antiorario

$\Delta\phi < 0$ verso orario

È opportuno osservare che per ellissi orientate come in fig.5.6–2,d) risulta $\Delta\phi = -\arcsin[b/(B/2)]$.

Se le ampiezze dei due moti armonici sono uguali:

$$X = Y = R$$

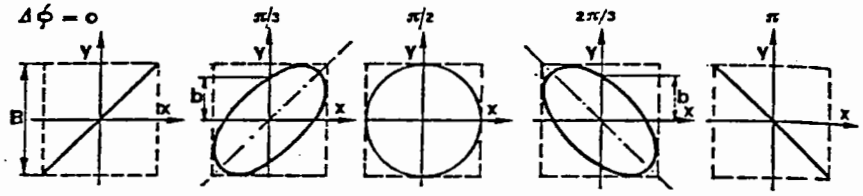


Fig.5.6–4

le curve di Lissajous si presentano come in fig.5.6–4; nel caso particolare in cui $\Delta\phi = \pi/2$ la curva è una circonferenza.

5.7 Analisi armonica

Una funzione periodica $f(t)$ (v. fig.5.7–1) di periodo T:

$$f(t) = f(t+T) \tag{5.7-1}$$

se soddisfa ad alcune condizioni (condizioni di Dirichlet) certamente verificate in tutti i problemi meccanici, può essere sviluppata nella serie di Fourier:

$$f(t) = A_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n A_n \cos(n\omega t + \phi_{0,n}) \tag{5.7-2}$$

può essere cioè decomposta in un termine costante A_0 ed in una serie di funzioni armoniche di ampiezza A_n, di pulsazione $n\omega$ e di fase iniziale $\phi_{0,n}$.

La (5.7-2) esprime il concetto abbastanza intuitivo che l'andamento della funzione $f(t)$, rappresentato in fig.5.7–1,a) può essere "ottenuto" a meno del valore costante A_0, mediante la somma di infinite funzioni armoniche f_n (v. fig.5.7–1,b) in genere indicate come componenti armoniche o armoniche di $f(t)$, ciascuna di periodo:

$$T_n = 2\pi/n\omega \qquad\qquad n = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

di opportuna ampiezza A_n e che tale risultato si raggiunge sfasando opportunamente tra loro le varie armoniche f_n.

Quest'ultima circostanza non è stata, per semplicità, rappresentata in fig.5.7–1, dove tutte le armoniche sono inizialmente in fase tra loro. L'importanza pratica della serie di Fourier risiede nel fatto che, noto il periodo T della funzione periodica, risulta determinato il valore della pulsazione fondamentale ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

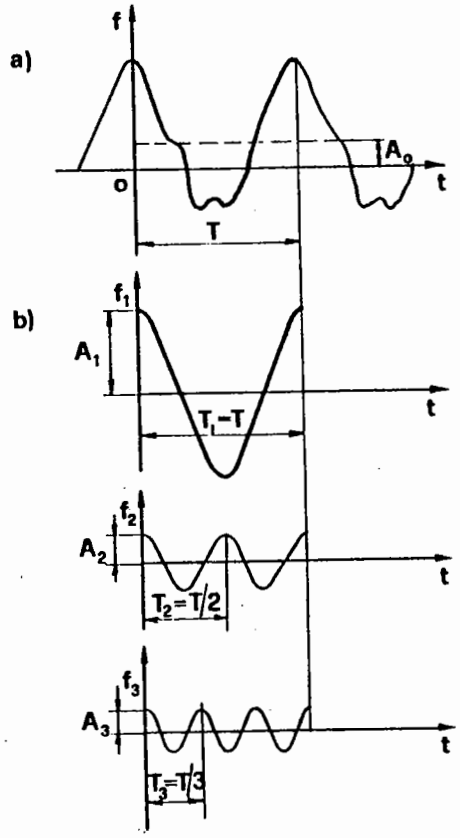


Fig.5.7–1

e risultano ovviamente determinati i valori delle pulsazioni di tutte le altre armoniche della serie.

Tenendo presente che:

$$\begin{aligned} A_n \cos(n\omega t + \phi_{0,n}) &= A_n(\cos n\omega t \cdot \cos\phi_{0,n} - \sin n\omega t \sin\phi_{0,n}) = \\ &= a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \end{aligned} \tag{5.7-2}$$

con:

$$a_n = A_n \cos\phi_{0,n} \quad ; \quad b_n = -A_n \sin\phi_{0,n} \tag{5.7-3}$$

e quindi:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ; \quad \tan\phi_{0,n} = -b_n/a_n \tag{5.7-4}$$

la serie di Fourier (5.7-2) può scriversi:

$$f(t) = A_0 + \sum_1^\infty{}_n (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad (5.7\text{-}5)$$

I due modi (5.7-2) e (5.7-5) di esprimere la serie di Fourier sono equivalenti e dall'una all'altra espressione si passa mediante le (5.7-3) o le (5.7-4).

Posto:

$$x = \omega t$$

risulta:

$$\omega T = 2\pi$$

e la (5.7-5) può essere scritta:

$$f(x) = f(x + 2\pi) = A_0 + \sum_1^\infty{}_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (5.7\text{-}6)$$

Le costanti a_n e b_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ che definiscono, a meno di A_0, la serie a secondo membro della (5.7-6), prendono il nome di coefficienti di Fourier: essi dipendono evidentemente da $f(x)$ e le relazioni che li legano ad $f(x)$ possono essere facilmente determinate.

Integrando infatti la (5.7-6) tra 0 e 2π ed osservando che per qualsiasi valore di n è:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0 \qquad (5.7\text{-}7)$$

si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx = 2\pi A_0$$

dalla quale si deduce che:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \qquad (5.7\text{-}8)$$

Questa relazione sta a indicare che la costante A_0 non è altro che il valor medio della funzione $f(x)$ (v. fig.5.7–1,a).

Moltiplicando primo e secondo membro della (5.7-6) per $\cos nx$ ed integrando tra 0 e 2π si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = A_0 \int_0^{2\pi} \cos nx dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_1^\infty{}_m (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos nx dx \qquad (5.7\text{-}9)$$

Osservando che oltre alle (5.7-7) risulta:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \qquad (n \neq m) \qquad (5.7\text{-}10)$$

dalla (5.7-9) si deduce che:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi$$

e quindi:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \qquad (5.7\text{-}11)$$

Analogamente, moltiplicando primo e secondo membro della (5.7-6) per $\sin nx$ e tenendo presente che, oltre alle (5.7-7) e (5.7-10), risulta anche:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \qquad (n \neq m) \qquad (5.7\text{-}12)$$

si deduce che:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = b_n \pi$$

e quindi:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (5.7\text{-}13)$$

Le (5.7-8), (-11) e (-13) sono le relazioni che legano i coefficienti di Fourier alla funzione periodica $f(x)$.

Se è nota l'espressione analitica di $f(x)$ le suddette relazioni permettono il calcolo di A_0 e dei coefficienti di Fourier: tale procedimento prende il nome di analisi armonica di una funzione periodica $f(x)$.

È molto frequente però il caso in cui della funzione $f(x)$ non è nota l'espressione analitica, ma è nota invece solo la rappresentazione grafica.

In questi casi gli integrali, che figurano al secondo membro delle (5.7-8), (-11) e (-13), vengono calcolati in modo approssimato come sommatorie.

Si ricorda a questo proposito che per una funzione (reale e continua) $\phi(x)$ (v. fig.5.7–2), indicata con A l'area $(A_1 + A_3 - A_2)$ risulta:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_0^{z-1} {}_i\phi(x_i)\Delta x_i$$

con:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = 2\pi/z = \text{ cost}$$

$z =$ numero degli intervalli uguali Δx.

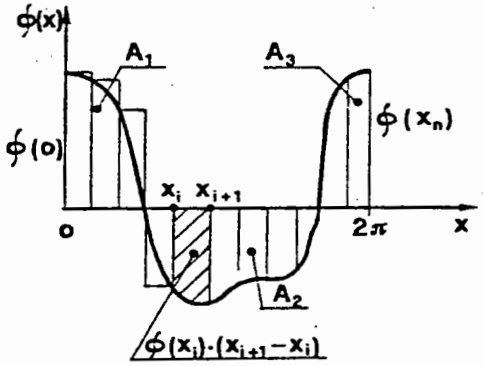


Fig.5.7–2

Per z sufficientemente grande si può quindi ritenere che:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(x)dx \approx \sum_0^{z-1} {}_i\phi(x_i)\Delta x \qquad (5.7\text{-}14)$$

In pratica, noto il grafico di $f(x)$, si suddivide l'intervallo $(0, 2\pi)$ in $2r$ parti uguali (v. fig.5.7–3) di lunghezza Δx:

$$\Delta x = 2\pi/2r = \pi/r \qquad (5.7\text{-}15)$$

e si leggono i valori $(y_1, y_2, ..., y_{2r})$ della funzione agli estremi di questi intervalli.

Si potrà così scrivere:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0 && y_0\\
&x_1 = \pi/r && y_1\\
&x_2 = 2\pi/r && y_2\\
&\text{.....} && \\
&x_q = q\pi/r && y_q\\
&\text{.....} && \\
&x_{2r-1} = (2r-1)\pi/r && y_{2r-1}\\
&x_{2r} = 2\pi && y_{2r} = y_0
\end{aligned} \qquad (5.7\text{-}16)$$

Dalle (5.7-8), (-11) e (-13), tenendo presente la relazione (5.7-14), si ottiene:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx \frac{1}{2\pi}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q \Delta x = \frac{1}{2r}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \approx \frac{1}{\pi}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q \cos\left(nq\frac{\pi}{r}\right)\Delta x =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q \cos\left(nq\frac{\pi}{r}\right) \qquad (5.7\text{-}17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \approx \frac{1}{\pi}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q \sin\left(nq\frac{\pi}{r}\right)\Delta x =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_0^{2r-1} {}_q y_q \sin\left(nq\frac{\pi}{r}\right)$$

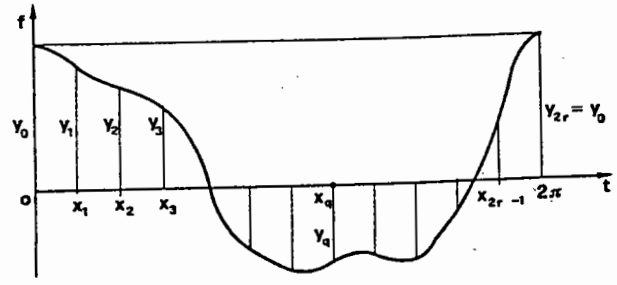


Fig.5.7–3

Le (5.7-17), noti i valori di $y_q[q = 0, 1, ..., (2r-1)]$, permettono il calcolo del valor medio A_0 della funzione $f(x)$ e dei coefficienti di Fourier a_n e b_n.

Il numero $2r$ viene in genere fissato pari a 12, 24, 48 ed in questi casi si parla di analisi armonica a 12, 24 ovvero 48 ordinate.

In ogni caso le (5.7-17) permettono il calcolo, oltre che di A_0, di $(2r-1)$ coefficienti di Fourier: a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; $...a_r$, risultando per le (5.7-17) con $r = n$:

$$b_r = \frac{1}{r} \sum_{0}^{2r-1} {}_q y_q \sin q\pi = 0 \qquad (5.7\text{-}18)$$

È infine opportuno notare che, una volta calcolati nel modo descritto i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$, della quale si conosceva solo il diagramma, si possiede con la (5.7-6) anche l'espressione analitica, che risulta evidentemente tanto meglio approssimata quanto più grande è r.

5.8 Fenomeni vibratori fondamentali

Lo studio delle vibrazioni di un sistema meccanico ha come scopo la determinazione della legge del moto del sistema stesso.

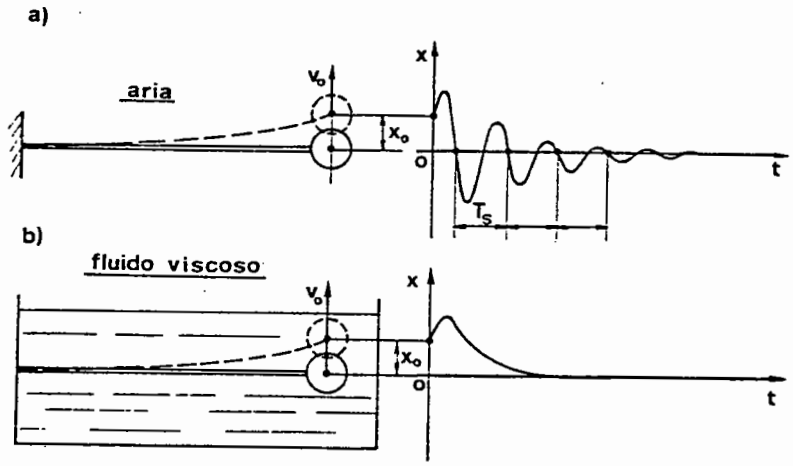


Fig.5.8–1

Il moto del sistema si dice libero se esso viene eccitato da assegnate condizioni iniziali (velocità e spostamenti iniziali), si dice invece forzato, se esso viene eccitato da un'assegnata causa forzante, che agisce con continuità sul sistema stesso.

L'esperienza mette in evidenza che, se un sistema meccanico viene eccitato ad oscillare liberamente, esso si comporta in modo diverso al variare delle azioni smorzanti.

Così ad es. il sistema di fig.5.8–1, costituito da un'asta di acciaio, incastrata ad un estremo e che porta all'altro estremo una massa m, si comporta in modo diverso a seconda che il mezzo che lo circonda sia aria ovvero un liquido molto viscoso.

Nel primo caso il sistema, spostato dalla posizione di equilibrio statico $(x = \dot{x} = 0)$ di una quantità x_0 (spostamento iniziale) ed inizialmente $(t = 0)$ animato da una velocità v_0 (velocità iniziale), compie una oscillazione libera, che si estingue dopo un certo tempo: il moto libero è in questo caso un'oscillazione libera smorzata.

Se in qualche modo si registra il moto libero della massa m, la legge del moto risulta caratterizzata (v. fig.5.8–1,a) dal fatto che la massa m passa per la posizione di equilibrio statico $(x = 0)$ ad intervalli di tempo T_s praticamente uguali.

Il moto presenta una delle caratteristiche del moto armonico, la costanza del periodo T_s, mentre l'ampiezza delle successive oscillazioni non è, come nel moto armonico, costante, ma decrescente col tempo: per questo motivo l'oscillazione libera smorzata di fig.2.5–1 viene anche indicata come moto armonico o periodico smorzato di pulsazione $\omega_s = 2\pi/T_s$.

Se il sistema è immerso in un fluido opportunamente viscoso (v. fig.5.8–1,b) ed il moto viene eccitato con le stesse condizioni iniziali x_0 e v_0, il moto libero $x(t)$ non ha più un andamento periodico e viene pertanto detto moto aperiodico: anche in questo caso il moto si estingue dopo un certo tempo ed il sistema ritorna nella posizione di equilibrio statico $(x = \dot{x} = 0)$.

Variando quindi la viscosità del fluido, nel quale il sistema di fig.5.8–1 è immerso, lo smorzamento agente sul sistema varia ed il moto libero passa da un moto periodico smorzato ad un moto aperiodico: lo smorzamento, per il quale questa condizione si verifica, viene detto smorzamento critico.

Se sulla massa m (v. fig.5.8–2) agisce una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, il moto del sistema è forzato e, dopo un periodo iniziale t_s, si presenta come un moto armonico di pulsazione uguale alla pulsazione ω dell'azione forzante $F_0 \cos \omega t$ (v. fig.5.8–2,a).

L'andamento di $x(t)$ nel periodo iniziale t_s viene detto transitorio iniziale: il moto $x(t)$ durante questo periodo è composto dal moto armonico forzato $x_f(t)$ (v. fig.5.8–2,b) e dall'oscillazione libera $x_l(t)$, che – nell'ipotesi di

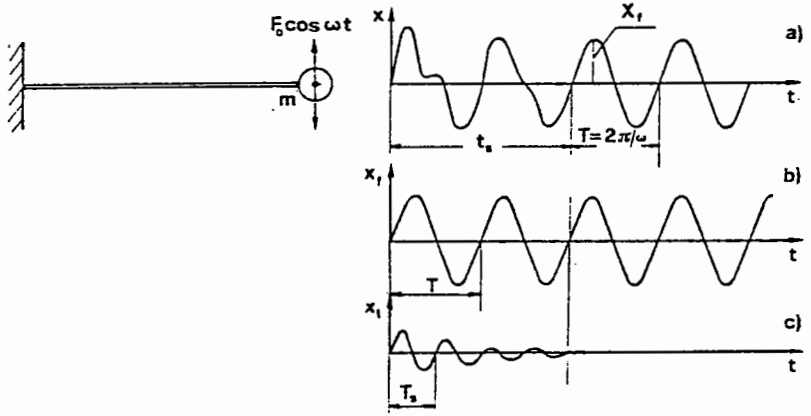


Fig.5.8–2

smorzamento inferiore a quello critico – si presenta come un moto periodico smorzato (v. fig.5.8–2,c); durante tale periodo risulterà quindi:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Se, tenendo costante il valore dell'ampiezza F_0, si fa variare con continuità la pulsazione ω della forza eccitante in un intervallo (ω_1, ω_2), che comprenda il valore della pulsazione ω_s, l'ampiezza X dell'oscillazione forzata diventa massima quando $\omega \approx \omega_s$: questo fenomeno prende il nome di risonanza.

Per $\omega > \omega_s$ l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata decresce con continuità al crescere di ω, sicché per ω molto più grande di ω_s, l'azione forzante $F_0 \cos \omega t$ non è più in grado di eccitare una apprezzabile vibrazione forzata del sistema.

Se si riportano i valori di X_f al variare di ω si otterrà un grafico del tipo di quello riportato in fig.5.8–3,a).

Se il sistema ha uno smorzamento superiore al valore critico, l'esperienza rivela un comportamento sostanzialmente diverso da quello descritto e rappresentato in fig.5.8–3,a).

In questo caso, al crescere della pulsazione ω della causa eccitante, $F_0 \cos \omega t$, l'ampiezza X_f dell'oscillazione armonica forzata decresce con continuità al crescere di ω, sicché l'esperienza non mette in evidenza alcun fenomeno di risonanza (v. fig.5.8–3,b).

L'oscillazione armonica forzata di un sistema può essere eccitata non solo applicando alla massa m una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, ma anche imponendo un moto armonico ad uno o più vincoli del sistema stesso.

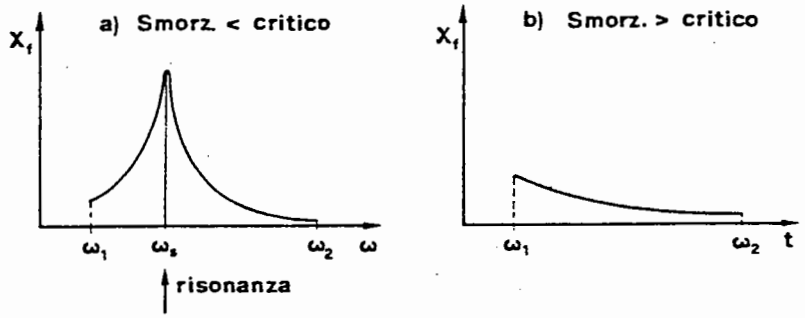


Fig.5.8–3

Così, ad es., nel caso del sistema semplice di fig.5.8–1, l'oscillazione forzata può essere eccitata imponendo alla sezione d'incastro dell'asta metallica un moto armonico $x_k = X_k \cos \omega t$.

In laboratorio l'esperienza può essere effettuata, collegando il sistema ad una vibrodina nel modo schematicamente indicato in fig.5.8–4.

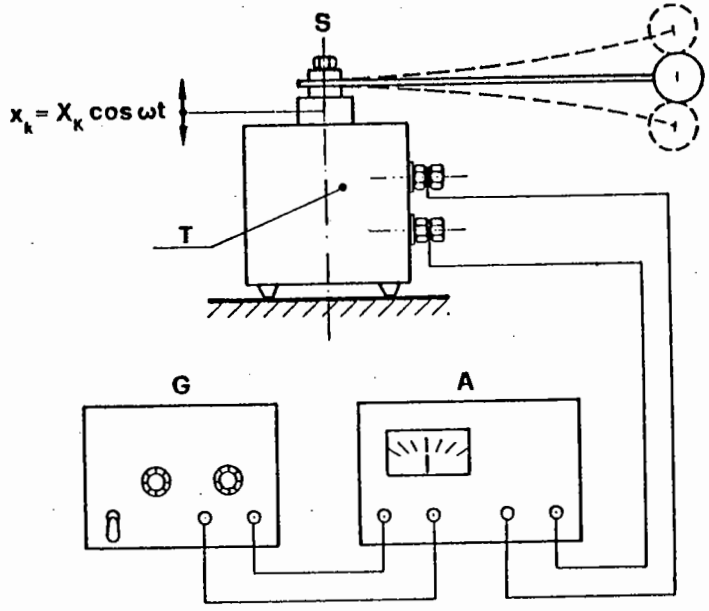


Fig.5.8–4

In questa figura è indicato con G il generatore di segnale e con A l'amplificatore di potenza, necessari ad alimentare il tavolo oscillante T con una corrente alternata (armonica) di ampiezza e frequenza opportune.

Nei prossimi paragrafi i fenomeni esposti verranno studiati, ricorrendo a modelli matematici relativamente semplici.

I risultati qualitativi e quantitativi di questo studio sono in buon accordo con i risultati sperimentali accennati e, pertanto, si dirà che i modelli matematici proposti "interpretano" in maniera soddisfacente la realtà che appare dalla sperimentazione.

5.9 Modelli matematici per sistemi discreti

I fenomeni descritti nel paragrafo precedente mettono in luce alcuni aspetti fondamentali delle vibrazioni meccaniche e sono certamente utili a chiarire concetti generali, come quelli di vibrazione libera e forzata, di condizioni iniziali, di transitorio iniziale e quello, ancora più importante per le applicazioni tecniche, di risonanza.

Per lo studio delle vibrazioni di un sistema come quello rappresentato in fig.5.8–1, si fanno in genere due serie di ipotesi semplificative, a seconda del grado di approssimazione desiderato.

Con la prima serie di ipotesi semplificative si ritiene che:

1°) la massa m sia concentrata (massa puntiforme) all'estremità dell'asta d'acciaio;

2°) sia trascurabile, rispetto alla massa m, la massa dell'asta, sicché questa possa essere considerata come un semplice vincolo elastico;

3°) questo vincolo elastico eserciti sulla massa m una reazione proporzionale allo spostamento della massa m;

4°) siano trascurabili le azioni smorzanti.

Con queste ipotesi semplificative l'equazione del moto libero del sistema può essere ricavata applicando il principio di d'Alembert, ottenendo in questo modo:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (5.9\text{-}1)$$

La (5.9-1) è un'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti (m e K) costanti, lineare.

La soluzione della (5.9-1) viene ricercata con i procedimenti noti dell'analisi matematica e permette di ricavare alcune relazioni fondamentali, che

definiscono in funzione dei parametri m e K del sistema, il moto $x(t)$ della massa m.

È evidente che se il sistema è immerso in un fluido particolarmente viscoso, l'ipotesi 4°) diviene inaccettabile, sicché ad essa si sostituisce una ipotesi, che tiene conto delle azioni smorzanti, ma nel modo più semplice possibile:

4°′) le azioni smorzanti agenti sul sistema siano esprimibili mediante una unica forza, agente sulla massa concentrata m, proporzionale alla velocità $\dot{x}$ di m.

Con questa seconda serie di ipotesi semplificative l'equazione del moto libero del sistema risulta essere la seguente:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \qquad (5.9\text{-}1')$$

e può essere ottenuta applicando il principio di d'Alembert.

La soluzione della (5.9-1′) permette di ottenere risultati più aderenti alla realtà fisica, mettendo in evidenza l'influenza dello smorzamento sul comportamento del sistema.

Il procedimento descritto che, partendo dal sistema reale, consente, attraverso una serie di ipotesi semplificative ed applicando principi generali come quello di d'Alembert, di giungere alla (5.9-1) o alla (5.9-1′), prende il nome di definizione di un modello matematico del fenomeno fisico in esame.

Poiché la soluzione del modello matematico (5.9-1) o (5.9-1′) fornisce una legge del moto $x(t)$ in buon accordo con i fenomeni osservati, si dirà che il modello matematico interpreta con sufficiente approssimazione la realtà fisica.

Il procedimento descritto è generale nel senso che qualsiasi fenomeno fisico, sia esso meccanico, elettrico, idraulico, ecc., viene analizzato, ricorrendo alla determinazione di un modello matematico capace di rappresentarlo nei suoi aspetti essenziali.

A questo proposito è opportuno considerare che spesso il passo più difficile nello studio teorico di un fenomeno non è quello della soluzione matematica del modello, ma è invece quello della definizione del modello stesso.

Infatti mentre l'elaborazione matematica del modello richiede la conoscenza di procedimenti di calcolo in genere già noti, per la definizione del modello matematico è necessaria la formulazione di tante ipotesi semplificative, ognuna della quali impegna l'esperienza, la capacità di giudizio, l'ingegnosità dello studioso.

Da quanto precede si può concludere che:

1° il modello matematico non riproduce la realtà fisica, ma la rappresenta in maniera più o meno approssimata;

2° lo stesso fenomeno può essere rappresentato da modelli matematici di diversa approssimazione, nel senso che, partendo da un modello, relativamente semplice, si può passare ad un modello matematico via via più sofisticato.

Al crescere del grado di approssimazione, il modello matematico diventa più complesso e la sua elaborazione richiede procedimenti di calcolo più laboriosi.

L'esame del sistema semplice di fig.5.8–1 e delle ipotesi semplificative fatte, permette di introdurre i concetti di discretizzazione e di linearizzazione di un sistema reale.

Il processo di discretizzazione consiste nel sostituire al sistema reale, nel quale massa, elasticità e smorzamento sono distribuiti con continuità, un sistema costituito da masse, elasticità e smorzamento concentrati: il sistema così ottenuto, ed il modello matematico che lo rappresenta, prendono il nome di sistema discreto e di modello matematico discreto oppure di sistema e di modello a parametri (m, σ, K) concentrati.

Il processo di linearizzazione consiste nel considerare le reazioni elastiche e quelle dovute agli smorzamenti, funzioni lineari rispettivamente dello spostamento e della velocità.

Nella pratica tecnica si ricorre quasi sempre a modelli discreti, sia perché con una opportuna discretizzazione si ottengono risultati abbastanza rappresentativi della realtà, sia perché il modello matematico sarà costituito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Volendo tener conto della continuità con la quale i suddetti parametri sono distribuiti, ma ricorrendo sempre ad ipotesi semplificative, si perviene a modelli matematici costituiti da sistemi di equazioni nelle derivate parziali, di più difficile integrazione.

Per chiarire alcuni aspetti pratici del processo di discretizzazione supponiamo che in sede di progetto di un impianto destinato alla produzione di energia elettrica si debba studiare il comportamento di una turbina nei riguardi del fenomeno delle vibrazioni flessionali.

In fig.5.9–1 è rappresentato schematicamente l'impianto ed una sezione assiale della turbina.

In fig.5.9–2,a) è rappresentato il rotore della macchina sui relativi supporti.

Supposti questi vincoli rigidi ed assimilabili a due appoggi, in fig.5.9–2,b)

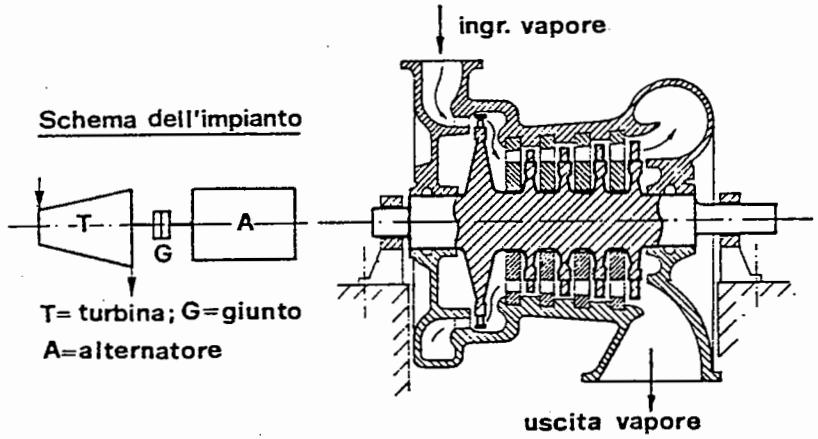


Fig.5.9–1

è rappresentato il sistema discreto ad n masse (a $3n$ parametri m, σ, K) concentrate.

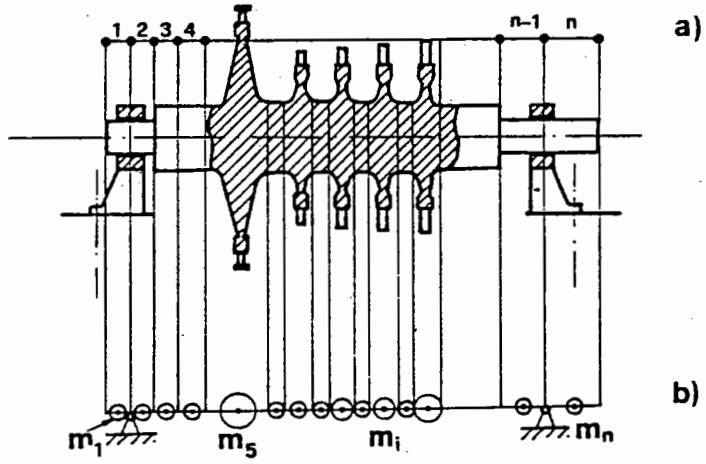


Fig.5.9–2

Questo sistema si ottiene suddividendo il sistema reale in n tronchi, concentrando la massa di ciascun tronco nel baricentro del tronco stesso e collegando le masse così concentrate con elementi elastici, privi di massa e

di elasticità flessionale pari a quella dei tronchi effettivi.

Se si vuole considerare lo smorzamento del sistema, si suppone che su ciascuna massa m_i agisca una forza smorzante, che nella schematizzazione più semplice viene considerata proporzionale alla velocita $\dot{x}_i$ di m_i, secondo un coefficiente costante σ_i.

È evidente che al crescere di n il modello matematico risulta più complesso e meglio interpreta il fenomeno in esame, nel senso che darà informazioni più numerose e più precise sul comportamento dinamico del sistema reale.

A parità di n il modello matematico diventa via via più sofisticato se si introducono in esso elementi che tengono conto della elasticità dei supporti e del fatto che i tronchi sono costituiti da dischi (effetto disco).

Per quanto riguarda la linearizzazione del sistema, essa consiste nel ritenere le reazioni elastiche e smorzanti del sistema proporzionali rispettivamente allo spostamento x_i ed alla velocità $\dot{x}_i$ di ciascuna massa m_i.

Se i coefficienti di proporzionalità sono ritenuti costanti il sistema è detto sistema discreto, lineare, a coefficienti costanti.

Sistemi di questo tipo rappresentano in maniera adeguata il sistema reale, se si considerano vibrazioni di piccola ampiezza.

È interessante osservare che se si trascurano le cause smorzanti il sistema è conservativo ed il modello matematico è costituito da un sistema di n equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti che in forma matriciale possono essere scritte nella forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \tag{5.9-2}$$

Se si vuol tener conto, nella maniera più semplice, delle azioni smorzanti, il modello matematico si presenterà nella forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\sigma]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \tag{5.9-2'}$$

Vale infine la pena di osservare l'analogia formale esistente tra il modello matematico (5.9-1) e quello (5.9-2), come ancora quella tra il modello (5.9-1') e quello (5.9-2').

5.10 Gradi di libertà di un sistema: coordinate generalizzate

Si consideri un sistema costituito da N masse m_i (v. fig.5.10–1) concentrate in N punti P_i $(i = 1,2,....N)$ e si supponga che le masse del sistema siano collegate, tra loro ed a punti fissi Q_i, mediante vincoli elastici di rigidità K_i.

Se il sistema vibra, la legge del moto del sistema stesso è definita se in ogni istante è nota la posizione delle N masse m_i.

Assunta una terna di riferimento $Oxyz$ la posizione delle N masse m_i è definita se sono note le $3N$ coordinate cartesiane $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$. Nel caso in esame si dirà che il sistema ha $3N$ gradi di libertà.

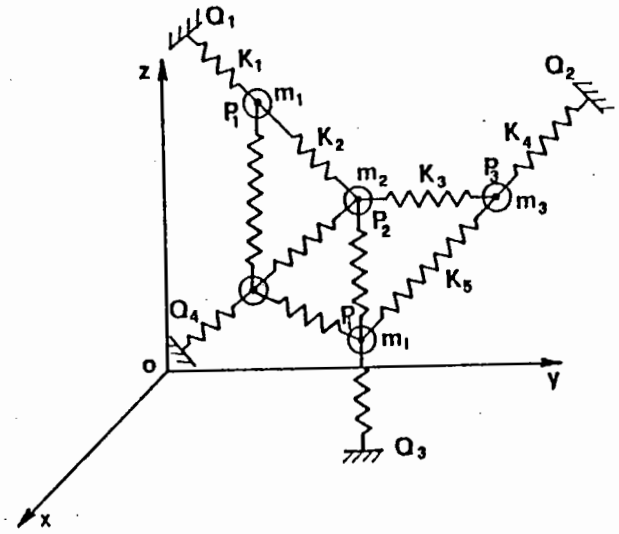


Fig.5.10–1

In alcuni casi è preferibile adottare, al posto delle $3N$ coordinate cartesiane, un altro insieme di $3N$ coordinate indipendenti $q_1, q_2, ..., q_{3N}$, che risultano legate alle prime da relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, ..., q_{3N}) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, ..., q_{3N}) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, ..., q_{3N}) \end{aligned} \qquad (i = 1,2,....,N) \tag{5.10-1}$$

Così p.es. per individuare la posizione della massa m_i si possono assumere al posto delle tre coordinate cartesiane x_i, y_i, z_i, le tre coordinate polari ρ_i, θ_i, ϕ_i (v. fig.5.10–2,a) o le tre coordinate cilindriche (o semipolari) ρ'_i, θ_i, z_i (v. fig.5.10–2,b).

Le relazioni che legano le coordinate cartesiane x_i, y_i, z_i, alle coordinate polari ρ_i, θ_i, ϕ_i sono:

$$x_i = \rho_i \cos\phi_i \cos\theta_i$$
$$y_i = \rho_i \cos\phi_i \sin\theta_i$$
$$z_i = \rho_i \sin\phi_i$$

mentre le relazioni che legano le coordinate cartesiane alle coordinate cilindriche sono:

$$x_i = \rho_i' \cos\theta_i$$
$$y_i = \rho_i' \sin\theta_i$$

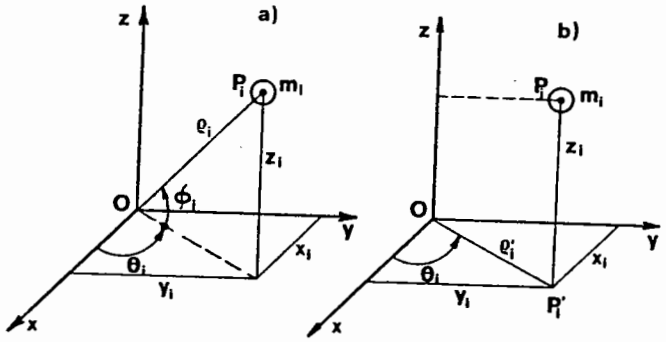


Fig.5.10–2

In molti casi il moto delle masse m_i è limitato dalla presenza di vincoli e questa limitazione è espressa da equazioni che legano le coordinate x_i, y_i, z_i.

Ciò sta ad indicare che a ciascun vincolo, imposto al sistema, corrisponde un'equazione, detta equazione del vincolo, del tipo:

$$f_h(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ...x_N, y_N, z_N) = 0 \qquad (5.10\text{-}2)$$

Se i vincoli presenti nel sistema sono v $(h = 1, 2, ...v)$ il numero delle coordinate indipendenti risulta:

$$n = 3N - v$$

In questo caso si dirà che il sistema ha n gradi di libertà e le n coordinate indipendenti, necessarie per individuare la configurazione del sistema, prendono il nome di coordinate generalizzate (o generali o lagrangiane).

Anche le n coordinate generalizzate possono essere scelte in maniera opportuna: in ogni caso esse debbono risultare indipendenti. Da un insieme di n coordinate generalizzate si può passare ad un altro insieme di n coordinate generalizzate mediante opportune formule di trasformazione.

A titolo di esempio si consideri il sistema costituito da due masse m_1 e m_2 collegate tra loro ed a punti fissi mediante elementi elastici di rigidità K_i (v. fig.5.10–3).

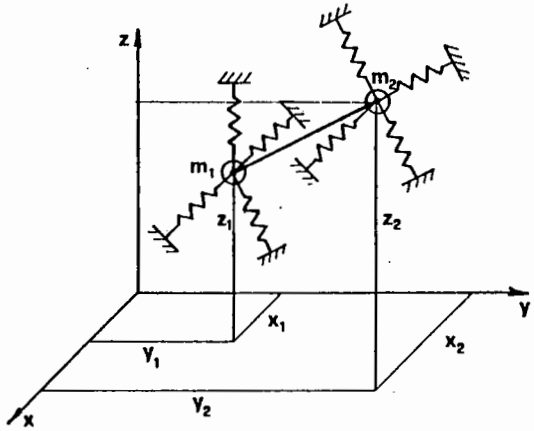


Fig.5.10–3

Se nessun vincolo limita il moto delle due masse, le coordinate cartesiane x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, sono indipendenti: il sistema ha quindi sei gradi di libertà e come coordinate generalizzate possono essere assunte le 6 coordinate cartesiane ovvero qualunque altro sistema di coordinate indipendenti q_i $(i = 1, 2, ...6)$, legate alle prime da relazioni del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, ..., q_6) \\ y_1 = y_1(q_1, q_2, ..., q_6) \\ ..... \\ z_2 = z_2(q_1, q_2, ..., q_6) \end{cases} \qquad (5.10\text{-}3)$$

Se si collegano le due masse mediante un'asta rigida, priva di massa, di lunghezza l (v. fig.5.10–3), l'equazione del vincolo, dovendo esprimere la circostanza che la distanza tra le due masse deve mantenersi costante ed uguale ad l, risulta essere:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 \qquad (5.10\text{-}4)$$

Il sistema ha quindi $6-1=5$ coordinate indipendenti e quindi un numero di gradi di libertà pari a 5.

Come coordinate generalizzate possono essere assunte le tre coordinate indipendenti x_1, y_1, z_1 ed i due angoli necessari ad orientare l'asta nello spazio.

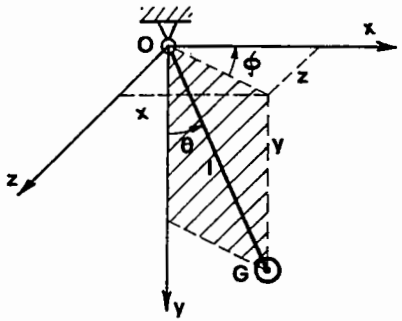


Fig.5.10–4

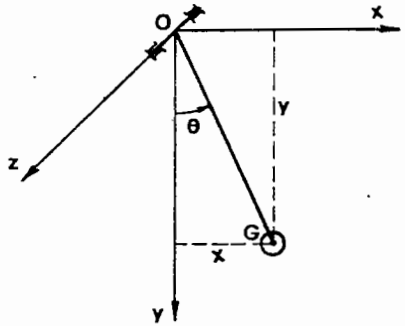


Fig.5.10–5

Nel caso di un pendolo sferico (v. fig.5.10–4), costituito da una massa m, concentrata all'estremità di un'asta rigida di lunghezza l, di massa trascurabile, l'altro estremo della quale è collegato ad un punto fisso O a mezzo di una cerniera sferica, l'equazione del vincolo è la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \qquad (5.10\text{-}5)$$

Questa relazione esprime la circostanza che la massa m, durante il moto, ha una distanza da O costante ed uguale ad l, sicché il punto G si muove su una superficie sferica di centro O e raggio l.

Risulta in tale caso:

$$n = 3 - 1 = 2$$

cioè il pendolo sferico ha due gradi di libertà e come coordinate generalizzate si possono assumere gli angoli θ e ϕ di figura.

Se la cerniera in O è cilindrica, con asse coincidente con l'asse orizzontale z, il punto G è vincolato a muoversi nel piano verticale xy ed il sistema si riduce ad un pendolo semplice.

Le equazioni dei vincoli sono in questo caso due:

$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 = l^2$$

e risultando: $n = 3 - 2 = 1$ il sistema ha un solo grado di libertà.

Come coordinata generalizzata si assume in questo caso l'angolo θ, che l'asta forma con l'asse verticale y (v. fig.5.10–5).

Tutti i sistemi fin qui considerati sono a vincoli bilaterali, fissi ed olonomi: all'esame di sistemi di questo solo tipo, fra i più diffusi nella pratica tecnica, saranno dedicati i paragrafi seguenti.

A titolo esemplificativo in fig.5.10–6 sono riportati alcuni esempi di sistemi ad un grado di libertà di questo tipo.

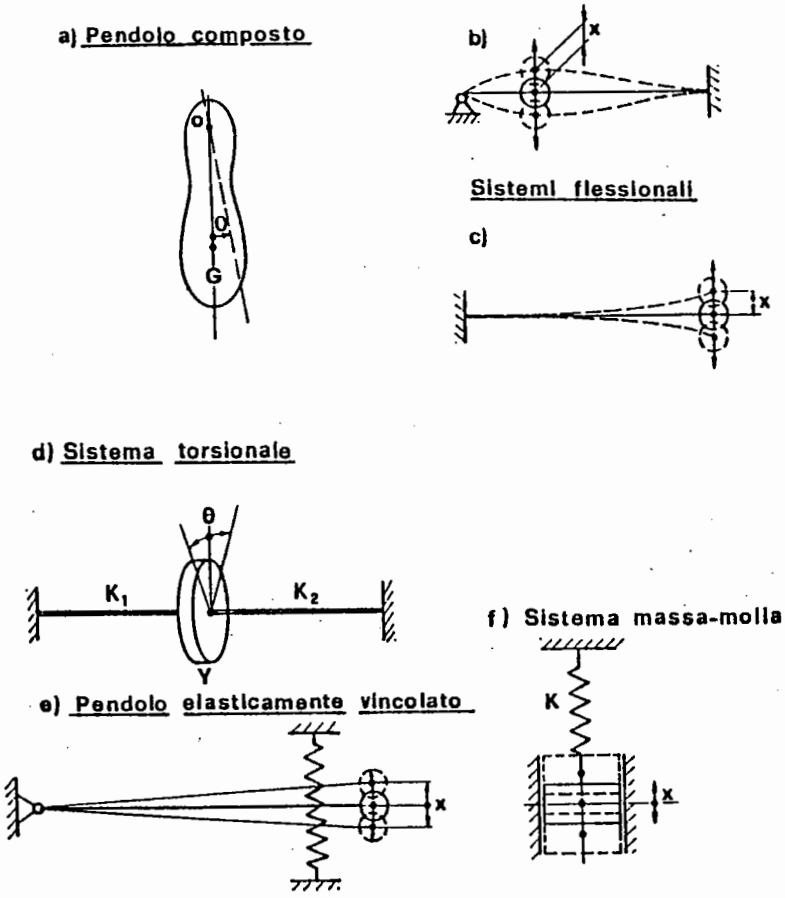


Fig.5.10–6

Per ogni sistema rappresentato in figura è indicata la corrispondente coordinata generalizzata; le linee tratteggiate indicano la configurazione del

sistema agli estremi dell'oscillazione.

In fig.5.10–7 sono riportati alcuni esempi di sistemi a 2 gradi di libertà.

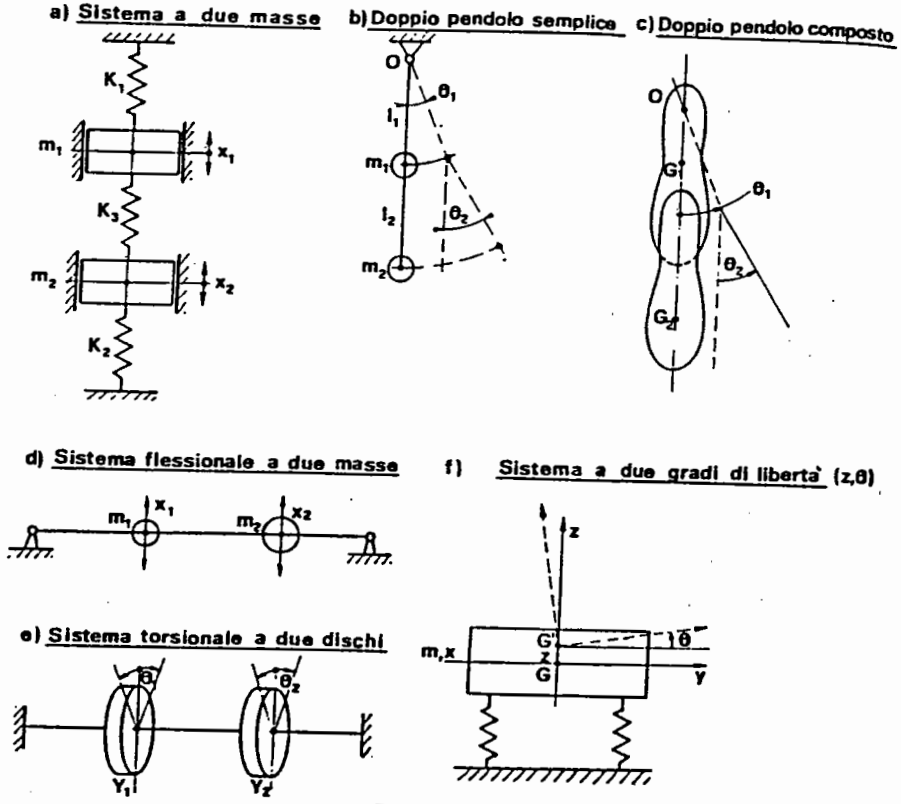


Fig.5.10–7

Il sistema rappresentato in fig.5.10–7,f) è spesso utilizzato per lo studio delle vibrazioni (accoppiate) di rimbalzo $z(t)$ e di beccheggio $\theta(t)$ della massa sospesa m di un autoveicolo, o di un basamento industriale.

È da notare a questo proposito che un corpo rigido con vincoli elastici costituisce un sistema a 6 gradi di libertà (v. fig.5.10–8); infatti per individuare, in ogni istante dell'oscillazione, la posizione del corpo è necessario conoscere gli spostamenti $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ di un suo punto P e le rotazioni $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ intorno agli assi x, y, z di una terna passante per P.

Le equazioni del moto si semplificano se P coincide col baricentro G e gli assi di riferimento coincidono con la terna centrale di inerzia del corpo.

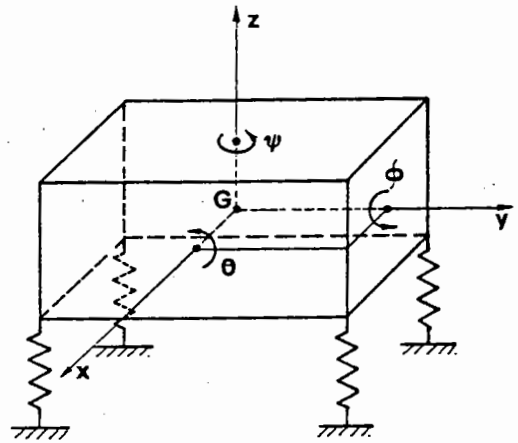


Fig.5.10–8

Il sistema a due gradi di libertà (z e θ) di fig.5.10–7,f) è quello di un corpo rigido elasticamente sospeso (fig.5.10–8) nell'ipotesi che i moti prevalenti del sistema siano solo quelli di rimbalzo z e di beccheggio θ.

Tale ipotesi semplificativa è in genere accettabile nello studio delle vibrazioni della massa sospesa di un autoveicolo o di un basamento industriale.

Essa va tuttavia attentamente vagliata caso per caso, allo scopo di evitare che con tale semplificazione restino fuori dal modello matematico, aspetti che invece influenzano in maniera notevole la dinamica del sistema reale.

5.11 Sistemi ad un grado di libertà

Lo studio dei sistemi ad 1 grado di libertà è fondamentale nell'analisi dei fenomeni vibratori e ciò non solo perché esso permette di mettere in luce, nella maniera più semplice, aspetti importanti dei suddetti fenomeni, ma anche perché il moto di un sistema ad n gradi di libertà viene in genere studiato col metodo dell'analisi modale e risulta dalla sovrapposizione di n moti indipendenti, ciascuno dei quali definito da un modello matematico simile a quello di un sistema ad 1 grado di libertà.

Si è ritenuto opportuno far precedere lo studio dei sistemi conservativi a quello dei sistemi dissipativi.

5.12 Sistemi conservativi: vibrazioni libere

Si consideri il sistema ad un grado di libertà rappresentato in fig.5.12–1, costituito da un corpo rigido di massa m, vincolato a muoversi solo nella direzione dell'asse x da un sistema di guide g. La massa m del corpo è, per questo motivo, riducibile ad una massa concentrata in un punto qualsiasi del corpo ed in particolare nel baricentro G di m.

Si supponga che la molla, che collega il corpo al punto fisso O, sia un elemento elastico privo di massa e che il sistema sia conservativo: si riterranno trascurabili la resistenza del mezzo, la resistenza d'attrito delle guide g, la resistenza dovuta alla variazione periodica delle sollecitazioni nel materiale della molla.

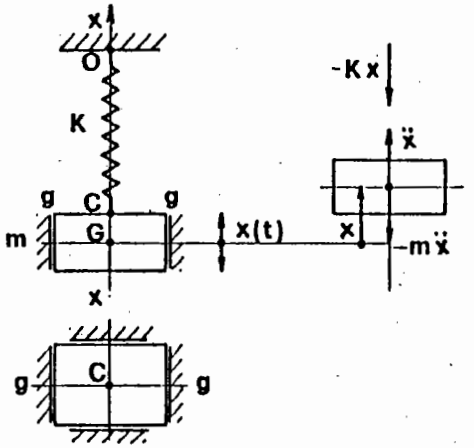


Fig.5.12–1

Si assuma inoltre come origine degli spostamenti x la posizione di equilibrio statico del baricentro G della massa m.

Se al sistema descritto vengono imposte assegnate condizioni iniziali (spostamento e velocità di m al tempo $t = 0$), il sistema stesso compie una oscillazione libera.

L'equazione del moto libero del sistema si ottiene applicando il principio di d'Alembert, considerando cioè l'equilibrio dinamico tra l'unica forza applicata sulla massa m, costituita dalla reazione elastica della molla e la forza d'inerzia della massa m.

Nell'ipotesi di oscillazioni di piccola ampiezza, la reazione della molla può essere ritenuta proporzionale ad x e, essendo di verso opposto ad x, pari a $-Kx$.

La costante K prende il nome di rigidezza o rigidità K della molla: essendo questo l'unico parametro che la caratterizza, la molla stessa sarà spesso indicata col simbolo K.

Il valore di K rappresenta la reazione, col segno cambiato, della molla per uno spostamento di un suo estremo (p. es. C) rispetto all'altro (O) di una quantità unitaria.

Da quanto detto l'equazione del moto si scrive:

$$-m\ddot{x} - Kx = 0$$

dalla quale si deduce che:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (5.12\text{-}1)$$

L'equazione differenziale (5.12-1) prende il nome di equazione del moto libero della massa m e rappresenta il modello matematico più semplice per lo studio delle oscillazioni libere di un sistema.

La forza peso P, che agisce sulla massa m non condiziona il fenomeno dell'oscillazione libera.

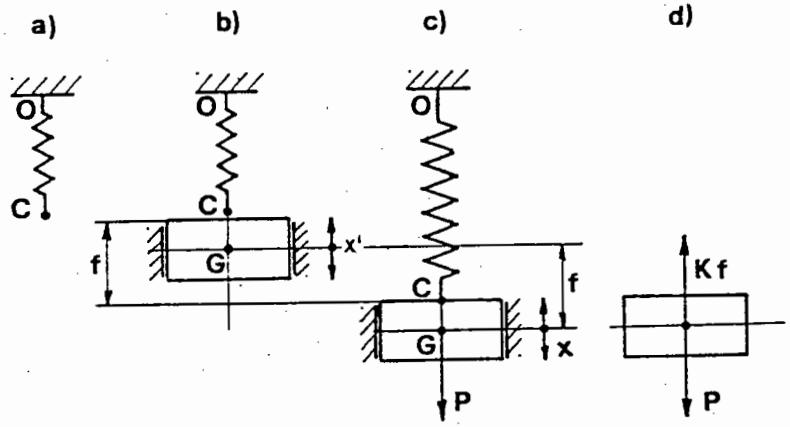


Fig.5.12–2

È da notare a questo proposito che avendo fissato (v. fig.5.12–2) un estremo della molla ad un punto fisso O ed avendo avvicinato all'altro estremo il corpo rigido, come indicato in fig.5.12–2,b), la molla subisce un allungamento quando il corpo è stato collegato all'estremo C (v. fig.5.12–2,c) a

causa della forza peso P. Indicando questo allungamento come "freccia statica" f della molla, per l'equilibrio (statico) del sistema dovrà essere verificata la relazione:

$$P = Kf$$

che esprime l'equilibrio tra la forza peso P e la reazione Kf della molla (v. fig.5.12–2,d).

Per tener conto dell'azione della forza peso P si assuma come origine degli spostamenti la posizione di G di fig.5.12–2,b). La relazione che lega x' ad x è la seguente:

$$x' = x + f$$

con $f = \text{cost}$.

Tenendo conto della forza peso P, l'equazione del moto, sempre per il principio di d'Alembert, si scrive:

$$-m\ddot{x}' - Kx' + P = 0$$

e quindi, sostituendo ad x' il suo valore in funzione di f, si ottiene:

$$-m\ddot{x} - Kx - Kf + P = 0$$

Tenendo presente che $P = Kf$, si può scrivere infine:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

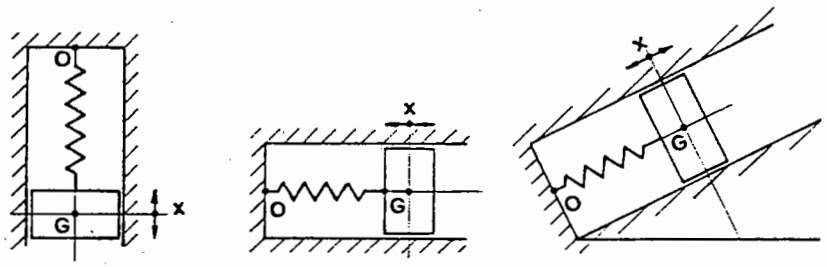


Fig.5.12–3

equazione questa che coincide con la (5.12-1). Resta così dimostrato che la forza peso P non influenza la legge del moto della massa m.

Questo risultato sta ad indicare che il moto libero del sistema (m, K) non è influenzato dalla giacitura dell'asse x e che quindi per tutti i sistemi di fig.5.12–3 il moto è definito, sempre nella ipotesi di vincoli lisci, dalla (5.12-1).

In ciascun caso l'origine di x coincide con la posizione di equilibrio statico di G, posizione che è, a parità di m e K, evidentemente diversa nei tre casi.

La (5.12-1) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, omogenea ed è noto che la ricerca del suo integrale generale $x(t)$ può effettuarsi ponendo nell'equazione stessa:

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \tag{5.12-2}$$

con C e λ costanti.

Con tale sostituzione si ottiene:

$$mC\lambda^2 e^{\lambda t} + KCe^{\lambda t} = 0 \tag{5.12-3}$$

e quindi:

$$m\lambda^2 + K = 0 \tag{5.12-4}$$

La (5.12-4), indipendente da t, prende il nome di equazione (algebrica) caratteristica della (5.12-1) e fornisce per λ i valori:

$$\lambda = \pm i\sqrt{K/m} \tag{5.12-5}$$

Posto:

$$\sqrt{K/m} = \omega_n \tag{5.12-6}$$

si può scrivere:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n \tag{5.12-7}$$

Alle due radici (5.12-7) dell'equazione caratteristica corrispondono due integrali particolari della (5.12-1) e quindi l'integrale generale $x(t)$ di tale equazione risulta essere:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{5.12-8}$$

Tenendo presenti le formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i \sin\omega_n t \tag{5.12-9}$$

la (5.12-8) si scrive:

$$x(t) = C_1(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + C_2(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t) = \\ = (C_1 + C_2)\cos\omega_n t + i(C_1 - C_2)\sin\omega_n t \qquad (5.12\text{-}10)$$

Posto:

$$A = C_1 + C_2 \quad ; \quad B = i(C_1 - C_2) \qquad (5.12\text{-}11)$$

la legge del moto (5.12-10) si scrive:

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t = C\cos(\omega_n t + \phi_0) \qquad (5.12\text{-}12)$$

con:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad ; \quad \tan\phi_0 = -B/A \qquad (5.12\text{-}13)$$

Dalla (5.12-12) si deduce che il moto libero $x(t)$ della massa m è un moto armonico di pulsazione ω_n.

Il valore di ω_n risulta dato per la (5.12-6) da:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \qquad (5.12\text{-}6)$$

e costituisce un valore caratteristico o proprio del sistema, al quale si dà il nome di pulsazione naturale.

I valori delle costanti di integrazione A e B si ottengono dalle condizioni iniziali ($t = 0$):

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0 \qquad (5.12\text{-}14)$$

Essendo per la (5.12-12):

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n\sin\omega_n t + B\omega_n\cos\omega_n t \qquad (5.12\text{-}15)$$

all'istante iniziale, dovrà essere:

$$x(0) = x_0 = A \\ \dot{x}(0) = v_0 = B\omega_n \qquad (5.12.16)$$

Da queste equazioni si ricava:

$$A = x_0 \quad ; \quad B = v_0/\omega_n \qquad (5.12\text{-}17)$$

e la legge del moto (5.12-12) risulta quindi data da:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + (v_0/\omega_n)\sin\omega_n t \qquad (5.12\text{-}18)$$

o dall'equivalente:

$$x(t) = C\cdot\cos(\omega_n t + \phi_0) \qquad (5.12\text{-}19)$$

con:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_n^2}$$
$$\phi_0 = \arctan(-B/A) = -\arctan v_0/\omega_n x_0$$

È da notare che, essendo A e B reali (v. le 5.12-17), le costanti C_1 e C_2 risultano per le (5.12-11) complesse e coniugate.

In fig.5.12-4 per un assegnato sistema (m, K) sono rappresentate le leggi del moto libero $x(t)$, corrispondenti ad alcune particolari condizioni iniziali, e le relative rappresentazioni vettoriali.

Le suddette figure mettono, tra l'altro, in evidenza che:

1) al variare delle condizioni iniziali il moto libero è armonico dello stesso periodo $T_n = 2\pi/\omega_n$;
2) per gli stessi valori assoluti di x_0 e v_0, l'ampiezza C del moto armonico è la stessa, mentre varia la fase iniziale;
3) il moto armonico è cosinusoidale di ampiezza x_0;

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t$$

se è $v_0 = 0$, mentre risulta sinusoidale di ampiezza v_0/ω_n:

$$x(t) = (v_0/\omega_n)\sin\omega_n t$$

se è $x_0 = 0$;

4) in ogni caso il moto libero (5.12-18) una volta eccitato, non si estingue: questo risultato è in contrasto con l'esperienza e si spiega tenendo presente che nel modello matematico (5.12-1) non compare, per le ipotesi fatte, alcuna azione smorzante.

Un sistema di questo tipo viene detto, come è noto, conservativo; durante l'oscillazione, l'energia del sistema si trasforma con continuità da energia cinetica in energia potenziale e viceversa senza dissipazione alcuna, sicché in ogni istante dell'oscillazione la somma $L(t)$ delle due energie è costante e pari ad $L(0)$:

$$L(t) = m\dot{x}^2/2 + Kx^2/2 = L(0) = mv_0^2/2 + Kx_0^2/2$$

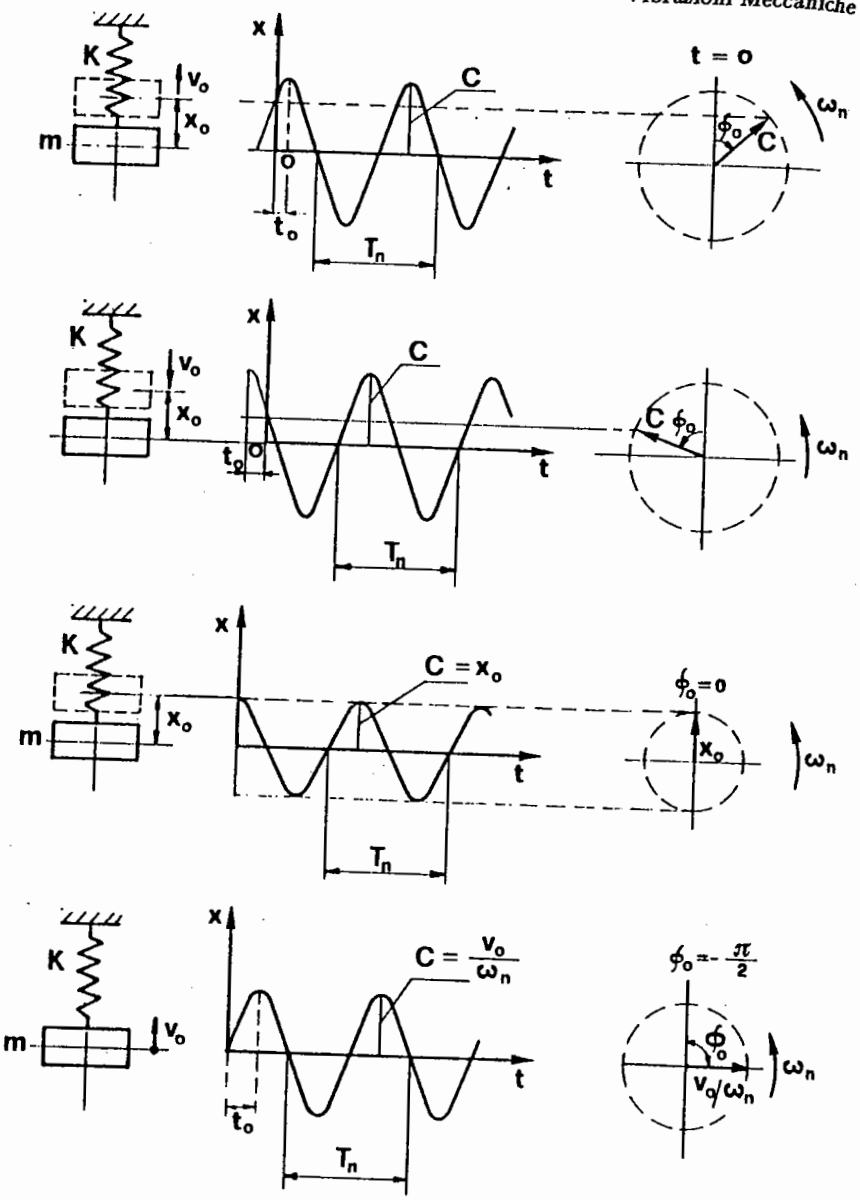


Fig.5.12–4

5.13 Vibrazioni forzate armoniche

Si supponga che sulla massa m del sistema rappresentato in fig.5.12–1 agisca una forza armonica $F(t) = F_0 \cos \omega t$. L'equazione del moto forzato del sistema si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio delle forze agenti sul sistema:

$$-m\ddot{x} - Kx + F_0 \cos \omega t = 0 \qquad (5.13\text{-}1)$$

e quindi:

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \qquad (5.13\text{-}2)$$

La (5.13-2) rappresenta il modello matematico più semplice per lo studio delle vibrazioni forzate di un sistema ad un grado di libertà.

Come è noto, l'integrale generale $x(t)$ dell'equazione differenziale (5.13-2) è dato dalla somma dell'integrale generale $x_l(t)$ dell'omogenea associata e da un integrale particolare $x_f(t)$ della equazione completa:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \qquad (5.13\text{-}3)$$

L'omogenea associata alla (5.13-2) coincide con la (5.12-12), ed il suo integrale $x_l(t)$, dato dalla (5.12-12), rappresenta l'oscillazione libera del sistema.

Poiché il termine noto della (5.13-2) è una funzione armonica, l'integrale particolare $x_f(t)$ sarà dello stesso tipo, cioè esprimibile da una funzione armonica di pulsazione ω:

$$x_f(t) = X_f \cos \omega t \qquad (5.13\text{-}4)$$

Si potrà quindi porre:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + X_f \cos \omega t \qquad (5.13\text{-}5)$$

Questa relazione sta a significare che il moto $x(t)$ è costituito dalla somma di una oscillazione armonica di pulsazione ω_n (oscillazione libera) e di una oscillazione armonica di pulsazione ω: il moto risultante non è quindi armonico ed in genere non è periodico, a meno che il rapporto ω/ω_n non sia un numero razionale (v. par.5.5).

Tenendo presente che in pratica il sistema è smorzato e che quindi dopo un tempo più o meno lungo (transitorio iniziale) l'oscillazione libera $x_l(t)$ si estingue, in condizioni stazionarie risulterà:

$$x(t) \approx x_f(t) = X_f \cos \omega t \qquad (5.13\text{-}6)$$

In queste condizioni l'unica incognita del moto forzato $x_f(t)$ è costituita dall'ampiezza X_f, essendo la pulsazione di tale moto coincidente con la pulsazione nota della $F(t)$.

Sostituendo la (5.13-6) nella (5.13-2) si ottiene:

$$-m\omega^2 X_f \cos\omega t + KX_f \cos\omega t = F_0 \cos\omega t$$

e quindi:

$$X_f(K - m\omega^2) = F_0$$

Il valore di X_f, tenendo presente la (5.12-6), risulta dato da:

$$X_f = F_0/(K - m\omega^2) = \frac{F_0}{K}\frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.13\text{-}7)$$

Tenendo presente che il rapporto F_0/K è lo spostamento che la massa m subisce per l'applicazione statica di una forza pari ad F_0, spostamento che viene indicato come spostamento statico x_{st}:

$$x_{st} = F_0/K \qquad (5.13\text{-}8)$$

la (5.13-7) si scrive infine nella forma:

$$X_f = x_{st} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.13\text{-}9)$$

La (5.13-9) sta ad indicare che l'ampiezza X_f dell'oscillazione armonica forzata è proporzionale allo spostamento statico x_{st} secondo un coefficiente $1/(1-\omega^2/\omega_n^2)$, che varia al variare della pulsazione ω della forza eccitante.

Tale coefficiente, che indicheremo con la lettera A, prende il nome di coefficiente di amplificazione:

$$A = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.13\text{-}10)$$

Il diagramma di A in funzione del rapporto ω/ω_n si presenta come in fig.5.13–1,a) ed il suo andamento può essere tracciato tenendo presente che dall'esame della (5.13-10) si deduce che:

1° per $\omega/\omega_n \longrightarrow 0$, $A \longrightarrow 1$ (punto di coordinate (0,1) del diagramma): ciò sta ad indicare che per valori della frequenza $f(f = \omega/2\pi)$ della forza eccitante molto più bassi della frequenza naturale $f_n(f_n = \omega_n/2\pi)$, l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata coincide praticamente con lo spostamento statico x_{st};

2° per $\omega/\omega_n \longrightarrow 1$, $A \longrightarrow \infty$: questo risultato va interpretato dicendo che al tendere della frequenza f della forza eccitante ad f_n, l'ampiezza dell'oscillazione forzata X_f diviene via via più grande rispetto ad x_{st} e ciò indipendentemente dal valore di F_0;

3° per $\omega^2/\omega_n^2 = 2$, cioè per $\omega/\omega_n = 1.41$, risulta $A = -1$: quando la frequenza f dell'azione eccitante è 1.41 volte la frequenza naturale f_n, $X_f = -x_{st}$ e quindi :

$$x_f = -x_{st}\cos\omega t = x_{st}\cos(\omega t \pm \pi)$$

In queste condizioni il moto forzato è in opposizione di fase con la forza eccitante $F(t) = F_0\cos\omega t$ ed ha un'ampiezza pari ad x_{st};

4° per $\omega^2/\omega_n^2 > 1$, A risulta negativo e quindi l'oscillazione forzata, $x_f = x_{st}A\cos\omega t$, risulta in opposizione di fase con l'azione eccitante;

5° per $\omega/\omega_n \longrightarrow \infty$, $A \to 0$: al crescere della frequenza f della forza eccitante nell'intervallo (f_n, ∞), l'ampiezza della vibrazione forzata decresce e l'azione forzante, indipendentemente dal valore di F_0, non è più in grado di eccitare un'oscillazione forzata di ampiezza apprezzabile.

Per ragioni pratiche si preferisce considerare, al posto del diagramma $A = f(\omega/\omega_n)$, il diagramma $|A| = f(\omega/\omega_n)$, che si presenta come in fig.5.13–1,b).

A questo diagramma si affianca in genere quello del ritardo di fase ϕ dell'oscillazione forzata rispetto all'azione eccitante al variare di ω/ω_n.

Per quanto già detto il diagramma $\phi = f(\omega/\omega_n)$ si presenta come in fig.5.13–1,c).

I risultati ottenuti dal modello matematico (5.13-2) e descritti nei punti da 1° a 5°, sono in buon accordo con i risultati sperimentali osservabili su molti sistemi meccanici reali: l'accordo è più grande per quei sistemi reali, per i quali risultano più accettabili le ipotesi semplificative, poste alla base della formulazione del modello matematico suddetto.

In particolare il fenomeno della risonanza, descritto nel par.5.8, si ritrova nei risultati dello studio teorico effettuato; infatti anche da questo studio si deduce che, quando la pulsazione della forza eccitante è prossima

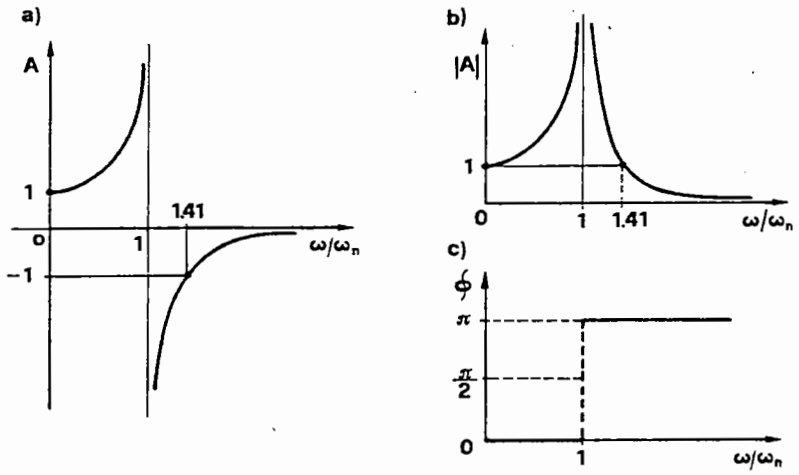


Fig.5.13–1

alla pulsazione propria, il sistema oscilla con ampiezze molto grandi; in queste condizioni il modello matematico fa prevedere che, già in condizioni prossime a quelle di risonanza ($\omega \approx \omega_n$), l'elemento elastico, che collega la massa m al punto fisso, è destinato a rompersi.

Il modello matematico mette in luce inoltre che il sistema può funzionare in sicurezza, se la pulsazione ω della azione eccitante ha un valore molto diverso da ω_n; in particolare per $\omega \gg \omega_n$ la vibrazione forzata ha una ampiezza trascurabile e per questo motivo diventa un fenomeno di scarso rilievo tecnico.

Come è stato accennato nel par.5.8, la vibrazione forzata armonica di un sistema può essere eccitata non solo con l'applicazione di una forza $F_0 \cos \omega t$ alla massa m, ma anche imponendo alla sezione d'incastro dell'elemento elastico un moto armonico assegnato.

Riprendendo in esame il sistema ad 1 grado di libertà di fig.5.12–1, si supponga che l'estremo O della molla di rigidità K sia soggetto (v. fig.5.13–2) ad un moto armonico $x_K(t)$ dato da:

$$x_K(t) = X_K \cos \omega t \tag{5.13-11}$$

Indicato come al solito con x lo spostamento di m rispetto alla sua posizione di equilibrio statico, l'equazione del moto della massa m si ottiene scrivendo che la forza d'inerzia $-m\ddot{x}$ fa equilibrio alla reazione elastica R della molla K.

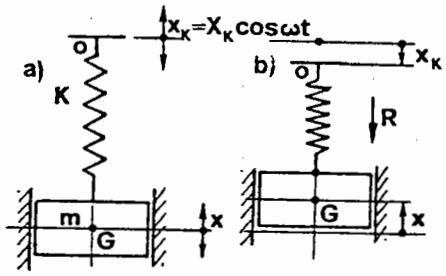


Fig.5.13–2

Osservando che tale reazione è proporzionale alla variazione di lunghezza della molla e quindi allo spostamento relativo x_r di G rispetto a O, si potrà scrivere:

$$R = -Kx_r = -K(x - x_K) \tag{5.13-12}$$

e quindi:

$$-m\ddot{x} - K(x - x_K) = 0 \tag{5.13-13}$$

Dalla (5.13-13) si ottiene infine:

$$m\ddot{x} + Kx = KX_K \cos \omega t \tag{5.13-14}$$

La (5.13-14) può essere considerata come l'equazione del moto forzato della massa m, eccitato da una forza armonica $KX_K \cos \omega t$, cioè da una forza di ampiezza $F_0 = KX_K$ e di pulsazione ω.

Il moto $x(t)$ di m può essere quindi ricavato applicando i risultati già acquisiti col modello matematico (5.13-2); questi risultati sono espressi dalla relazione:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \tag{5.13-3}$$

con:

$$x_f(t) = X_f \cos \omega t \tag{5.13-6}$$

$$X_f = x_{st} \cdot A \tag{5.13-9}$$

$$x_{st} = F_0/K = KX_K/K = X_K \tag{5.13-8'}$$

$$A = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \tag{5.13-10}$$

È da osservare che nel caso in esame il valore di x_{st} coincide col valore X_K dell'ampiezza del moto imposto all'estremo O della molla.

Le curve $A = f(\omega/\omega_n)$ e $\phi = f(\omega/\omega_n)$ di fig.5.13–1 sono valide anche in questo caso, ma vanno interpretate (v. punti da 1 a 5) tenendo presente che il coefficiente di amplificazione rappresenta in questo caso il rapporto, X_f/X_K, tra l'ampiezza X_f del moto forzato di m e l'ampiezza X_K del moto imposto alla sezione d'incastro O della molla.

5.14 Vibrazioni forzate periodiche

Se la forza eccitante $F(t)$ è periodica, il moto di m può essere studiato scomponendo la $F(t)$ in serie di Fourier; ritenendo nullo il valor medio della $F(t)$, risulta:

$$F(t) = \sum_1^z{}_p F_p \cos(p\omega t + \phi_p) \qquad (5.14\text{-}1)$$

Poiché il sistema è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le singole componenti armoniche della $F(t)$.

Il moto forzato $x_p(t)$, eccitato dalla armonica di ordine p risulta dato, per quanto detto nel par.5.13, dalla relazione:

$$x_p(t) = x_{st,p} A_p \cos(p\omega t + \phi_p) = \frac{F_p}{K} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \cos(p\omega t + \phi_p) \qquad (5.14\text{-}2)$$

e quindi il moto $x(t)$ della massa m, risultante dalla somma degli z effetti (5.14-2), è dato da:

$$x(t) = \sum_1^z{}_p x_{st,p} \cdot A_p \cos(p\omega t + \phi_p) \qquad (5.14\text{-}3)$$

Da questa relazione si deduce che:

1°) Il moto forzato $x(t)$ è periodico dello stesso periodo T dell'azione forzante $F(t)$;

2°) Esso risulta dalla sovrapposizione di tanti moti armonici $x_p(t)$, la cui ampiezza X_p:

$$X_p = x_{st,p} \cdot A_p = \frac{F_p}{K} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.14\text{-}4)$$

dipende non tanto dall'ampiezza F_p dell'armonica eccitante, quanto dal coefficiente di amplificazione A_p, che risulta più o meno grande a seconda del valore del rapporto $p\omega/\omega_n$: il sistema può essere portato in risonanza da una sola delle armoniche di $F(t)$, anche se questa è di modesta ampiezza.

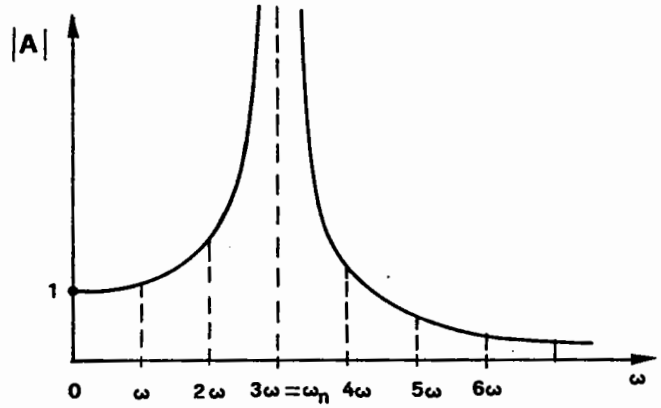


Fig.5.14–1

3°) Perché si verifichi tale risonanza è necessario che sia $p\omega = \omega_n$: in fig.5.14–1 è rappresentato il caso in cui, essendo $\omega_n/\omega = 3$, il sistema è portato in risonanza dalla armonica di ordine 3 della $F(t)$.

A risultati analoghi si perviene se il moto forzato è eccitato da un moto periodico della sezione d'incastro della molla.

In questo caso, posto:

$$x_K(t) = \sum_1^z{}_p \cdot X_{kp} \cdot \cos(p\omega t + \phi_p) \qquad (5.14\text{-}5)$$

il moto $x(t)$ della massa m risulta dato da:

$$x(t) = \sum_1^z{}_p X_{kp} \cdot A_p \cos(p\omega t + \phi_p) \qquad (5.14\text{-}6)$$

con:

$$A_p = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.14\text{-}7)$$

5.15 Esempi di applicazione

La determinazione del moto libero e forzato di un qualsiasi sistema meccanico, non dissipativo, ad 1 grado di libertà può essere effettuata, utilizzando i risultati dello studio del sistema (m, K), ottenuti nei precedenti paragrafi.

Le equazioni del moto di questi sistemi risultano infatti essere, come si vedrà nel seguito, equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, lineari, a coefficienti costanti, dello stesso tipo della (5.12-1) ovvero della (5.13-2), a seconda che si tratti di moto libero ovvero di moto forzato.

5.15–1 Il pendolo semplice

Si consideri il pendolo semplice di fig.5.15–1,a) e si supponga che esso stia oscillando liberamente: sia θ la coordinata generalizzata, che ne individua in ogni istante la posizione.

Il momento di richiamo, dovuto alla forza peso, vale $-mgl\sin\theta$, mentre il momento delle forze d'inerzia vale $-ml^2\ddot{\theta}$: per il principio di d'Alembert, deve essere:

$$-ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0$$

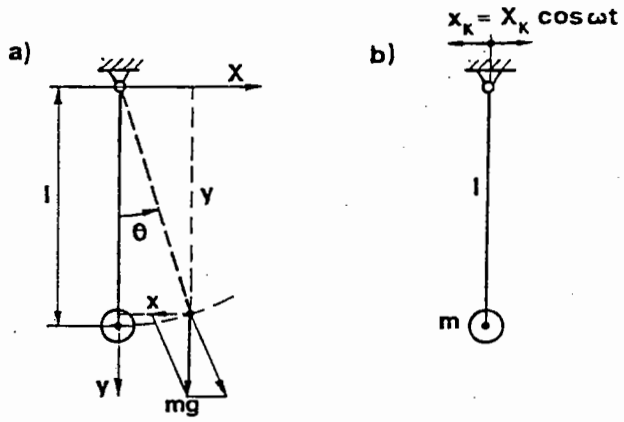


Fig.5.15–1

Per oscillazioni di piccola ampiezza ($\sin\theta \approx \theta$) si può scrivere quindi:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \qquad (5.15\text{-}1)$$

Essendo questa equazione differenziale simile alla (5.12-1), il moto libero $\theta(t)$ del pendolo è dato per la (5.12-8) dalla relazione:

$$\theta(t) = \theta_0\cos\omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n)\sin\omega_n t = \Theta\cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

ω_n = pulsazione naturale del pendolo $= \sqrt{mgl/ml^2} = \sqrt{g/l}$

θ_0 = spostamento iniziale;

$\dot{\theta}_0$= velocità iniziale;

$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2/\omega_n^2}$;

$\tan\phi_0 = -\dot{\theta}_0/\omega_n\theta_0$.

Per oscillazioni di piccola ampiezza al posto di θ può essere assunta, come coordinata generalizzata, la coordinata x di G nel riferimento Oxy segnato in figura.

Infatti in questa ipotesi risulta:

$$x = l\sin\theta \approx l\theta \qquad ; \qquad y = l\cos\theta \approx l \approx \text{ cost}$$

e dalla (5.15-1) si ottiene:

$$ml\ddot{x} + mgx = 0$$

e quindi:

$$m\ddot{x} + (mg/l)x = 0 \qquad (5.15\text{-}1')$$

Questa relazione esprime l'equilibrio tra la forza di inerzia $-m\ddot{x}$ e la forza di richiamo $-mg\tan\theta \approx -mg\cdot x/l$.

La legge del moto libero $x(t)$ è quindi espressa dalla relazione:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + (v_0/\omega_n)\sin\omega_n t = X\cos(\omega_n t + \phi_0)$$

dove:

x_0 = spostamento iniziale di $m = \theta_0\cdot l$;

v_0 = velocità iniziale di $m = \dot{\theta}_0\cdot l$;

ω_n= pulsazione naturale $= \sqrt{g/l}$.

Le leggi del moto $\theta(t)$ ed $x(t)$ sono evidentemente equivalenti.

Per quanto si riferisce al moto forzato del pendolo semplice esso può essere eccitato imponendo alla cerniera O un moto armonico (v. fig.5.15–1,b):

$$x_K = X_K \cos \omega t$$

In questo caso la legge del moto forzato $x_f(t)$ della massa m sarà data, per la (5.13-8'), da:

$$x_f(t) = x_{st} \cdot A \cdot \cos \omega t = X_K \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

5.15–2 Pendolo composto

Si procede nello stesso modo descritto nel paragrafo precedente:

a) si considera il pendolo in una posizione θ;

b) si calcola il momento di richiamo dovuto alla forza peso: $-mgd\theta$;

c) si scrive l'equilibrio tra il suddetto momento e quello delle forze di inerzia $-I_0\ddot{\theta}$ (I_0 = momento d'inerzia di massa del pendolo rispetto all'asse di oscillazione passante per O):

$$I_0\ddot{\theta} + mgd\theta = 0$$

Dalla (5.12-18) si deduce che:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

ω_n = pulsazione naturale del pendolo = $\sqrt{mgd/I_0}$;

θ_0 = spostamento iniziale;

$\dot{\theta}_0$ = velocità iniziale.

C'è da osservare che, avendo indicato con I_G il momento d'inerzia di massa del pendolo rispetto ad un asse passante per G e parallelo all'asse di oscillazione, risulta:

$$I_0 = I_G + md^2 = m(\rho^2 + d^2)$$

con:

ρ = raggio di girazione = $\sqrt{I_G/m}$

L'espressione di ω_n può quindi scriversi:

$$\omega_n = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)}$$

Indicata con L la lunghezza del pendolo semplice avente la stessa pulsazione naturale ω_n, si può scrivere:

$$\omega_n = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)} = \sqrt{g/L}$$

e ricavare l'espressione della lunghezza ridotta L del pendolo composto:

$$L = d + \rho^2/d$$

Anche il moto forzato del pendolo composto di fig.5.15–2 può essere eccitato imponendo alla cerniera O un moto armonico $x_K = X_K \cos \omega t$. Il moto forzato $x(t)$ del baricentro G del pendolo è in questo caso dato da:

$$x(t) = x_{st} A \cdot \cos \omega t = X_K [1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)] \cos \omega t$$

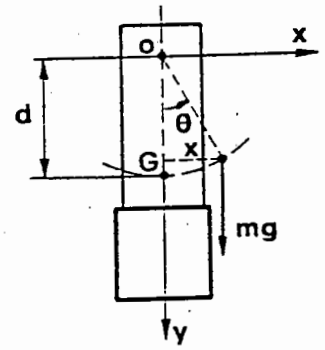


Fig.5.15–2

5.15–3 Pendolo semplice elasticamente vincolato

Nella posizione θ le forze di richiamo sono la forza peso mg e la reazione delle due molle K, pari a $2Ka\theta$.

Per l'equilibrio dei momenti rispetto ad O deve essere:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta + 2Ka^2\theta = 0$$

e quindi:

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + 2Ka^2)\theta = 0$$

Tenendo presenti le (5.12-1), (5.12-18) e (5.12-6), la legge del moto $\theta(t)$ risulta data da:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n)\sin\omega_n t = \Theta\cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{(mgl + 2Ka^2)/ml^2} = \sqrt{g/l + (2K/m)(a^2/l^2)}$$

e con:

$\theta_0 =$ spostamento iniziale; $\qquad \dot{\theta}_0 =$ velocità iniziale;

$$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2/\omega_n^2} \quad ; \quad \tan\phi_0 = -\dot{\theta}_0/\theta_0\omega_n \ .$$

È da osservare che per il pendolo rovesciato di fig.5.15–3,b), l'equazione del moto risulta essere la seguente:

$$ml^2\ddot{\theta} + (2Ka^2 - mgl)\theta = 0$$

poiché il momento dovuto alla forza peso ha lo stesso verso della rotazione θ e per questo motivo costituisce un momento di richiamo negativo.

Dall'equazione del moto si deduce che la pulsazione naturale del sistema è in questo caso data dalla relazione:

$$\omega_n = \sqrt{(2Ka^2 - mgl)/ml^2} = \sqrt{(2K/m)(a^2/l^2) - g/l}$$

Il valore di questa pulsazione diventa immaginario per:

$$g/l > (2K/m)(a^2/l^2)$$

Se è soddisfatta questa relazione, l'equilibrio del pendolo è instabile: infatti, partendo dalla posizione $\theta = 0$ ed imponendo al pendolo rovesciato una rotazione infinitesima $d\theta$, il momento dovuto alla forza peso prevale

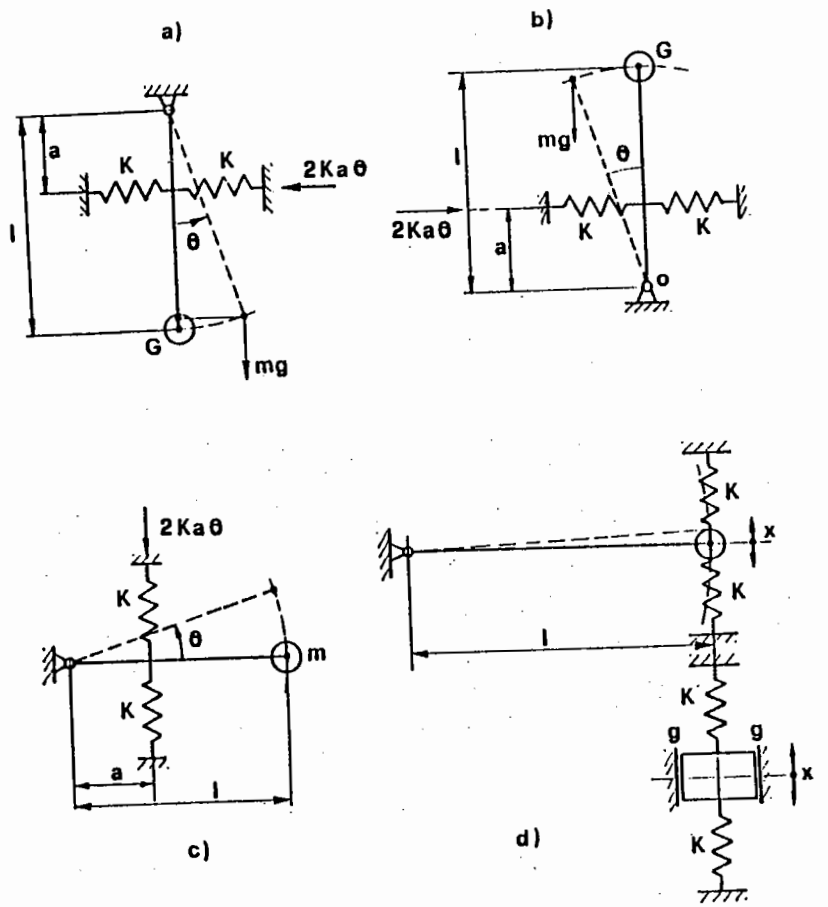


Fig.5.15–3

su quello dovuto alla reazione delle due molle K ed il pendolo si allontana dalla posizione di equilibrio instabile $\theta = 0$.

Nel caso del pendolo orizzontale di fig.5.15–3,c) l'equazione del moto si scrive:

$$ml^2\ddot{\theta} + 2Ka^2\theta = 0$$

essendo trascurabile la variazione del momento della forza peso, dovuta alla rotazione θ, supposta piccola.

In questo caso il valore della pulsazione naturale ω_n è dato da:

$$\omega_n = \sqrt{2Ka^2/ml^2}$$

e per $a = l$ (v. fig.5.15–3,d) diviene:

$$\omega_n = \sqrt{2K/m}$$

cioè uguale a quello del sistema $(m, 2K)$, riportato nella stessa figura.

Questo risultato si giustifica considerando che, nel caso del pendolo, l'asta, incernierata in O, realizza un vincolo, che, per piccoli valori di x/l $(\approx \theta)$, può considerarsi equivalente alle guide g del sistema $(m, 2K)$.

È da osservare infine che il pendolo di fig.5.15–3,d), rappresenta lo schema costruttivo più vicino al modello matematico:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

in quanto la cerniera O può essere realizzata (p.es. con un cuscinetto a sfere) in modo da costituire un vincolo con attriti certamente più piccoli di quelli delle guide g (v. fig.5.15–3,d).

5.15–4 Sistema flessionale

Si consideri il sistema, rappresentato in fig.5.15–4, costituito da una massa m, concentrata in un punto qualsiasi O dell'asse di un'asta flessibile, di massa trascurabile, vincolata agli estremi.

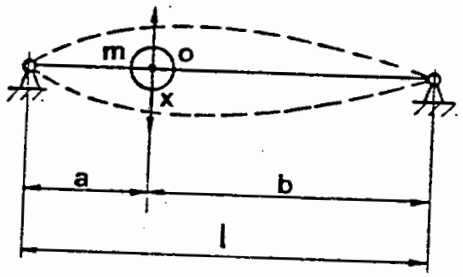


Fig.5.15–4

Il sistema, se è opportunamente eccitato, compie oscillazioni flessionali libere in un piano contenente l'asse dell'asta indeformata.

Nell'ipotesi di oscillazioni di piccola ampiezza è possibile ritenere che la massa m si muova in direzione normale all'asse dell'asta indeformata: in questa ipotesi il sistema si comporta come un sistema ad un grado di libertà ed è possibile assumere, come coordinata lagrangiana, lo spostamento x di m, misurato dall'asse dell'asta indeformata.

L'equazione del moto del sistema si scrive in questa ipotesi:

$$-m\ddot{x} - Kx = 0$$

nella quale con $-K$ si è indicata la reazione elastica, che l'asta esercita su m per uno spostamento $x = 1$ di O.

Questa equazione coincide formalmente con la (5.12-1) e quindi la legge $x(t)$ con la quale oscilla la massa m è data dalla (5.12-18).

È evidente che a parità di materiale, sezione e lunghezza dell'asta, il valore di K è minimo quando il punto O, nel quale è concentrata la massa m, si trova nella mezzeria dell'asta $(a = b = (1/2)l)$.

In queste condizioni la pulsazione naturale del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{K/m}$$

risulta minima. Spostandosi il punto O verso uno dei vincoli, i valori di K e di ω_n aumentano, risultando:

$$\lim_{a \to 0} K = \lim_{a \to 0} \omega_n = \infty$$

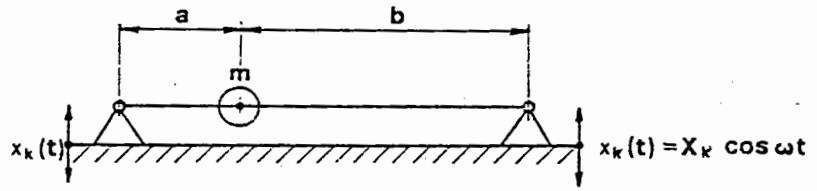


Fig.5.15–4′

Il moto armonico forzato del sistema di fig.5.15–4 può essere studiato ricordando che in ogni caso risulta:

$$x_f(t) = x_{st} A \cos \omega t$$

con:

A = coefficiente di amplificazione $= 1/(1-\omega^2/\omega_n^2)$

ed:

$$x_{st} = \begin{cases} = F_0/K \\ = X_K \end{cases}$$

a seconda che la causa eccitante sia una forza $F(t) = F_0 \cos \omega t$, agente sulla massa m, ovvero un moto $x_K(t) = X_K \cos \omega t$ del piano di appoggio del sistema (v. fig.5.15–4′).

5.15–5 Sistema torsionale

Si consideri il sistema, rappresentato in figura 5.15–5, costituito da un disco calettato in una sezione di un'asta non rigida, di massa trascurabile, incastrata agli estremi.

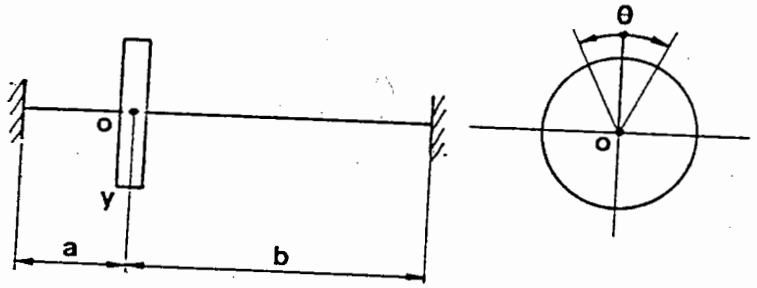


Fig.5.15–5

Il sistema, se è opportunamente eccitato, vibra torsionalmente: il disco compie un'oscillazione angolare $\theta(t)$ intorno al suo asse e l'asta si deforma a torsione.

Indicati con Y il momento d'inerzia di massa del disco e con $-K$ il momento della reazione elastica dell'asta per $\theta = 1$, l'equazione del moto del sistema, per il principio di d'Alembert, si scrive esprimendo l'equilibrio tra il momento delle forze d'inerzia ed il momento della reazione elastica dell'asta:

$$-Y\ddot{\theta} - K\theta = 0$$

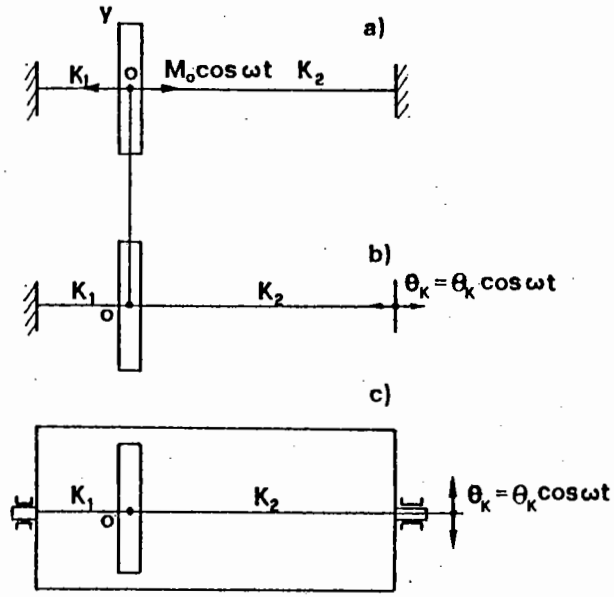


Fig.5.15–5′

Questa equazione è simile alla (5.12-1) e per la (5.12-18) l'oscillazione libera del sistema è data dalla relazione:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n) \sin \omega_n t = \Theta \cos(\omega_n t + \phi_0)$$

con:

θ_0 = rotazione iniziale del disco;

$\dot{\theta}_0$ = velocità angolare iniziale del disco;

$\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + (\dot{\theta}_0^2/\omega_n)^2}$;

$\tan \phi_0 = -\dot{\theta}_0/\theta_0\omega_n$.

e con:

$$\omega_n = \sqrt{K/Y}$$

Anche in questo caso i valori di K e di ω_n crescono, se il disco viene calettato in sezioni via via più vicine ad una delle due sezioni d'incastro dell'asta.

Il moto forzato armonico del sistema in esame può essere eccitato in vari modi.

In fig.5.15–5′ sono rappresentati tre modi diversi per ottenere la vibrazione forzata del sistema. In fig.5.15–5′,a) si è supposto che sul disco agisca una coppia di momento $M_0 \cos \omega t$: l'equazione del moto risulta allora:

$$Y\ddot{\theta} + K\theta = M_0 \cos \omega t$$

con (v. par.5.16):

$K = K_1 + K_2$.

La legge del moto forzato $\theta(t)$ del disco è, per la (5.13-4),:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} \cdot A \cos \omega t$$

con:

$$\theta_{st} = M_0/K;$$
$$A = 1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)\,.$$

Se all'estremo del tronco K (v. fig.5.15–5′,b) si impone un moto armonico $\theta_K(t) = \Theta_K \cos \omega t$, l'equazione del moto del disco si scrive:

$$Y\ddot{\theta} + K_1\theta + K_2(\theta - \theta_K) = 0$$

dalla quale si ricava:

$$Y\ddot{\theta} + (K_1 + K_2)\theta = K_2\theta_K = K_2\Theta_K \cos \omega t$$

Si può scrivere infine:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} A \cos \omega t = \frac{K_2}{K_1 + K_2}\Theta_K \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

Se ad entrambi gli estremi del sistema (v. fig.5.15–5′,c) si impone un moto $\theta_K = \Theta_K \cos \omega t$, l'equazione del moto si scrive:

$$Y\ddot{\theta} + K(\theta - \theta_K) = 0$$

dalla quale si deduce che:

$$Y\ddot{\theta} + K\theta = K\theta_K = K\Theta_K \cos \omega t$$

Il moto forzato $\theta_f(t)$ del disco sarà dato da:

$$\theta_f(t) = \theta_{st} \cdot A \cos \omega t = \Theta_K \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cos \omega t$$

e può essere considerato come la sovrapposizione di due effetti del tipo calcolato nel caso di fig.5.15–5′,b).

5.16 Coefficienti di rigidità degli elementi elastici

Per tutti i sistemi discreti ad 1 grado di libertà elasticamente vincolati, si è definito come coefficiente di rigidità K dell'elemento elastico, la reazione (col segno cambiato) che l'elemento stesso esercita per uno spostamento unitario (o rotazione unitaria) del punto di applicazione della massa m (o del disco Y).

I valori di K sono calcolabili in funzione della geometria dell'elemento e delle caratteristiche elastiche del materiale di cui esso è costituito.

Nella tabella 5.16–1 sono riportate le formule che permettono il calcolo di K per alcuni elementi elastici più comuni.

Con G ed E si sono indicati i moduli di elasticità del materiale di cui è costituito l'elemento elastico.

Per l'acciaio essi assumono mediamente i seguenti valori:

E = modulo di elasticità normale o di Young $= 2 \cdot 10^{11}\, N/m^2$

G = modulo di elasticità trasversale $= 8.0 \cdot 10^{10}\, N/m^2$

I valori dei momenti d'inerzia diametrale I_d e polare I_p della sezione della trave, nell'ipotesi di sezione circolare, sono calcolabili con le formule:

$$I_p = \pi r^4/2 \qquad ; \qquad I_d = I_p/2 = \pi r^4/4$$

Due o più molle di rigidità K_1, K_2, ..., K_n, possono essere collegate in serie o in parallelo: in fig.5.16–1 due molle di coefficienti di rigidità K_1 e K_2 sono collegate in parallelo. La rigidità K di questo sistema di molle si determina, considerando che per uno spostamento x della massa m la reazione elastica R è data, in entrambi i casi a) e b), da:

$$R = -K_1x - K_2x = -(K_1 + K_2)x$$

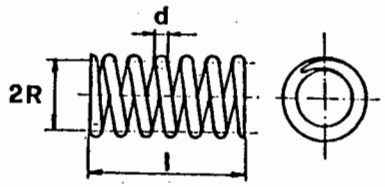
e quindi:

$$K = -R/x = K_1 + K_2$$

Tab. 5.16–1

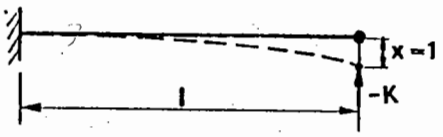
Molla ad elica cilindrica

$K = Gd^4/64nR^3$
n = numero di spire



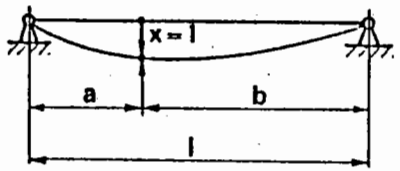
Trave incastrata ad un estremo

$K = 3EI/l^3$



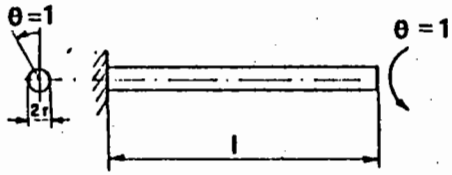
Trave appoggiata agli estremi

$K = 3EIl/a^2b^2$



Trave soggetta a torsione

$K = GI_p/l$



In fig.5.16–2 le due molle K_1 e K_2 sono disposte in serie.

Immaginando, in questo caso, di applicare ad m una forza F, lo spostamento x della massa m è dato dalla somma degli allungamenti x_1 ed x_2 delle due molle:

$$x = x_1 + x_2 = F/K_1 + F/K_2 = F(1/K_1 + 1/K_2)$$

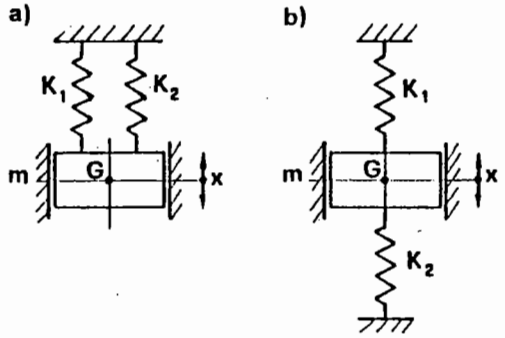


Fig.5.16–1

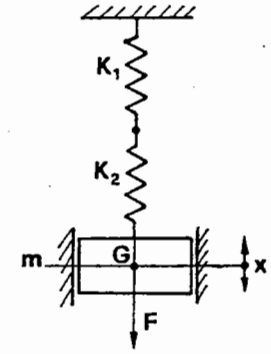


Fig.5.16–2

La reazione R della coppia di molle è quindi data da:

$$R = -F = -Kx$$

avendo indicato con K la rigidità del sistema di molle.

Risulta perciò:

$$1/K = x/F = 1/K_1 + 1/K_2$$

In generale si potrà porre:

molle in parallelo: $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ (5.16-1)

molle in serie: $1/K = 1/K_1 + 1/K_2 + \ldots + 1/K_n$ (5.16-2)

Anche per tronchi di albero di rigidità torsoniale K_1 e K_2 (v. fig.5.16–3) valgono le considerazioni ricavate per molle disposte in serie ed in parallelo.

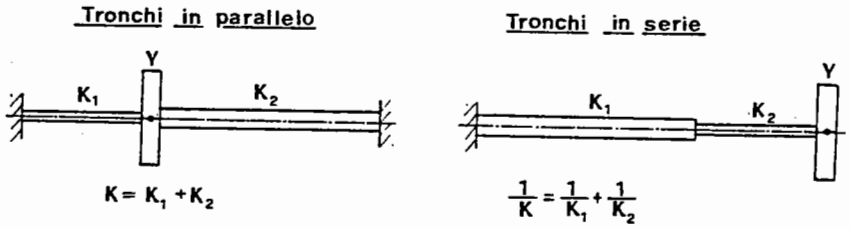


Fig.5.16–3

Per sistemi flessionali il discorso è più complesso e sarà ripreso nel par.7.6.

Esercizio 5.I

Per il pendolo semplice rappresentato in figura ed avente le seguenti caratteristiche:

$$l = 1 \text{ m} \quad ; \quad m = 0.5 \text{ kg}$$

calcolare, nell'ipotesi di piccole oscillazioni, la pulsazione propria ω_n, il periodo naturale T_n, la frequenza f_n.

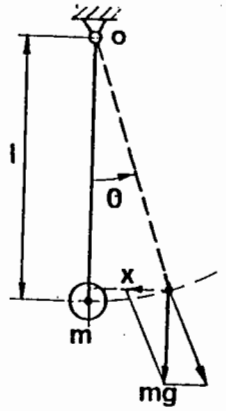


Fig.5.I–1

È da osservare che per piccole oscillazioni (x piccolo rispetto ad l) si può assumere, come coordinata lagrangiana, lo spostamento orizzontale x di m: l'equazione del moto x risulta (v. la 5.15–1′):

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

con $-K$ = forza di richiamo per x uguale ad 1 = mg/l

Svolgimento

La pulsazione ω_n è data da:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{g/l} = \sqrt{9.81} = 3.13 \text{ rad/s}$$

Pertanto si ha:

$$T_n = 2\pi/\omega_n \simeq 2\pi/3.13 = 2 \text{ s} \quad ; \quad f_n = 1/T_n \simeq 0.5 \text{ Hz}$$

Esercizio 5.II

Il pendolo semplice dell'esercizio 5.I viene elasticamente vincolato come in fig.5.II–1,a).

Assegnati:

$m = 0,5$ kg

l = lunghezza del pendolo = 1 m

a = distanza dal fulcro O dei punti di attacco delle molle = 0,3 m

K = rigidità di ciascuna molla = 30 N/m

calcolare i valori di ω_n, T_n, f_n.

Svolgimento

Per oscillazioni di piccola ampiezza l'equazione del moto θ può scriversi (v. par.5.15–3):

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + 2Ka^2) \cdot \theta = 0$$

La pulsazione delle oscillazioni libere risulta quindi:

$$\omega_n = \sqrt{(mgl + 2Ka^2)/ml^2} = \sqrt{g/l + 2Ka^2/ml^2}$$

e per il pendolo assegnato vale:

$$\omega_n = (9,81/1 + 60 \cdot 0,3^2/0,5)^{\frac{1}{2}} = 4,54 \text{ rad/s}$$

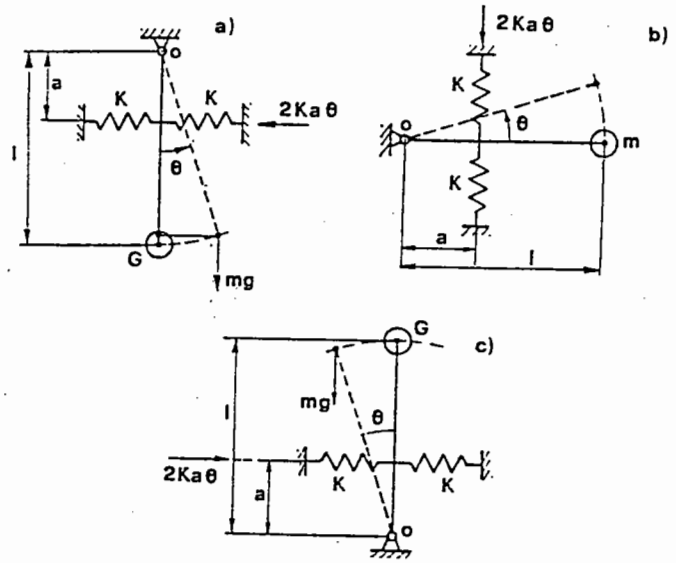


Fig.5.II–1

La frequenza naturale risulta quindi:

$$f_n = \omega_n/2\pi = 0,72 \text{ Hz} \quad ; \quad T_n = 1/f_n = 1.38 \text{ s}$$

Se lo stesso pendolo viene disposto come nelle figg.5.II–1,b) e 5.II–1,c), le corrispondenti pulsazioni sono (v. par.5.15–3):

$$\omega_n = \sqrt{2Ka^2/ml^2} \qquad \text{(pendolo orizzontale)}$$
$$\omega_n = \sqrt{(2Ka^2/ml^2 - g/l)} \qquad \text{(pendolo capovolto)}$$

Per il pendolo disposto orizzontalmente si avrà pertanto:

$$\omega_n = \sqrt{60(0,3)^2/0,5} = 3,28 \text{ rad/s}$$

Per il pendolo capovolto:

$$\omega_n = \sqrt{60(0,3)^2/0,5 - 9,81} = 0,99 \text{ rad/s}$$

Esercizio 5.III

Si vuole determinare sperimentalmente il momento di inerzia di massa I_G, rispetto all'asse di rotazione, della puleggia rappresentata in fig.5.III–1.

La puleggia è sospesa mediante due appoggi a coltello in modo che possa oscillare intorno all'asse OO'.

Svolgimento

La puleggia, sospesa come in figura, si comporta come un pendolo composto: il periodo di oscillazione T_n è dato da:

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{I_0/mgd} = 2\pi\sqrt{(I_G + md^2)/mgd}$$

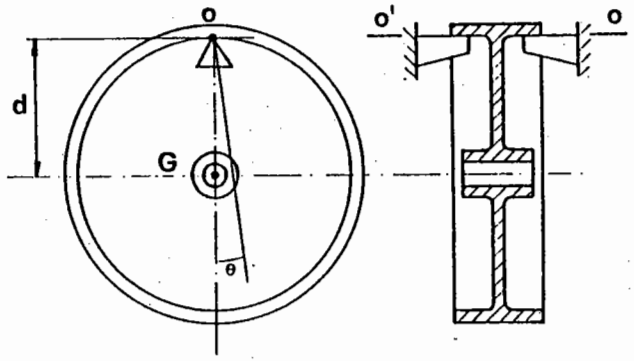


Fig.5.III–1

Misurato sperimentalmente il periodo T_n, nota la massa della puleggia e la distanza del baricentro G dall'asse di oscillazione OO', si ricava:

$$I_G = T_n^2 mgd/4\pi^2 - md^2 = md(T_n^2 g/4\pi^2 - d)$$

Esercizio 5.IV

La determinazione sperimentale del momento d'inerzia di massa I_G di una puleggia può essere effettuata in modo diverso da quello indicato nell'esercizio precedente.

La puleggia può essere infatti sospesa ad un punto fisso O mediante un filo di acciaio armonico di diametro e lunghezza opportuni (v. fig.5.IV–1,a), che porta ad un estremo un dischetto B di massa trascurabile, sul quale poggia la puleggia stessa.

Posto il sistema in oscillazione torsionale libera e misurato il periodo di questa oscillazione, si può risalire al valore di I_G.

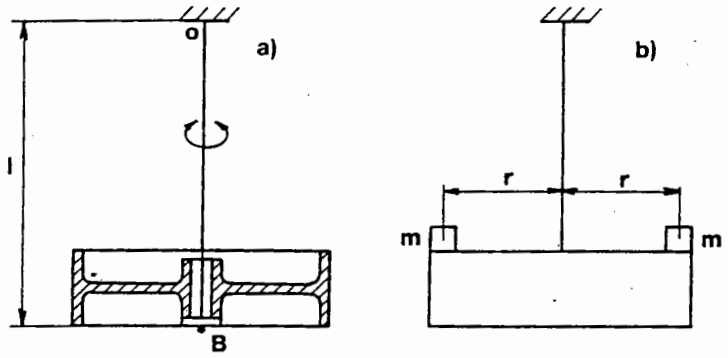


Fig.5.IV–1

Svolgimento

Misurato il periodo T_n dell'oscillazione torsionale libera, esso risulta legato alla rigidità torsionale K del filo ($K = GI_p/l$) ed al momento d'inerzia di massa I_G dalla nota relazione:

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{I_G/K}$$

dalla quale si ricava:

$$I_G = T_n^2 K/4\pi^2 \qquad \text{(5.IV-1)}$$

Per evitare il calcolo della rigidità torsionale K del filo, si possono aggiungere due masse m uguali, note e simmetricamente disposte (vedi fig.5.IV–1,b) rispetto all'asse di oscillazione.

Il momento d'inerzia di massa della puleggia, con le due masse m disposte nel modo descritto, vale:

$$I'_G = I_G + 2mr^2$$

Misurato il periodo T'_n ($T'_n > T_n$) del sistema di fig.5.IV–1,b), si potrà scrivere:

$$T'_n = 2\pi\sqrt{(I_G + 2mr^2)/K} \qquad \text{(5.IV-2)}$$

e ricavare dalle (5.IV-1) e (-2):

$$(T'_n/T_n)^2 = (I_G + 2mr^2)/I_G = 1 + 2mr^2/I_G$$

Il valore di I_G in funzione delle grandezze note T_n, T'_n, m ed r sarà perciò dato da:

$$I_G = 2mr^2/[(T'_n/T_n)^2 - 1]$$

Si osservi che bisogna fare in modo che il momento d'inerzia di massa delle due masse m rispetto all'asse di oscillazione si possa ritenere dato da $2mr^2$ e risulti inoltre grande abbastanza da avere una differenza $(T'_n - T_n)$ molto più grande dell'errore che si commette nella determinazione di T_n e T'_n.

Esercizio 5.V

Per il pendolo composto rappresentato in fig.5.V–1, calcolare il periodo di oscillazione T_n e determinare le superfici luogo degli assi di sospensione per i quali il periodo di oscillazione si mantiene costante e pari a T_n.

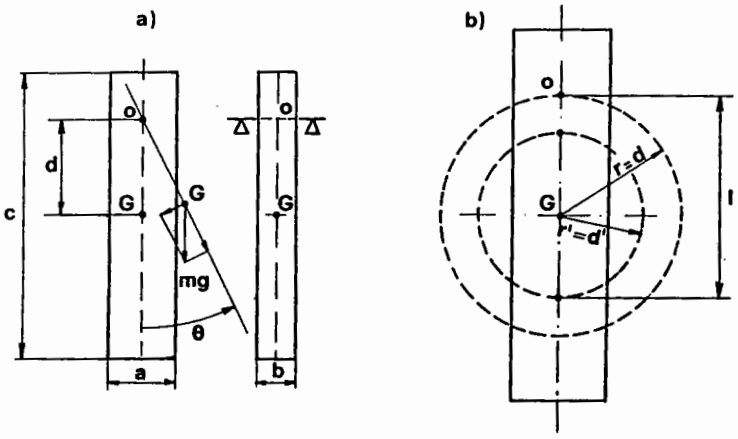


Fig.5.V–1

Le dimensioni del pendolo e la distanza d dell'asse di sospensione dal baricentro G sono:

$$a = 10 \text{ cm} \quad ; \quad c = 40 \text{ cm} \quad ; \quad d = 15 \text{ cm}$$

Svolgimento

Con i dati assegnati si ottiene:

$$\omega_n = \sqrt{mgd/I_0} = \sqrt{mgd/m(\rho^2 + d^2)} = \sqrt{gd/(\rho^2 + d^2)} = 6.33 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 0.99 \text{ s}$$

con:

$$\rho^2 = (a^2 + c^2)/12 = (100 + 1600)/12 = 141,67 \text{ cm}^2 \; ; \; \rho = 11,9 \text{ cm}$$

È interessante notare che il periodo T_n non dipende dalla dimensione b del pendolo.

Per quanto si riferisce alle superfici luogo degli assi di sospensione per i quali $T_n = 0,99$ s, è facile osservare che una prima superficie luogo è costituita da un cilindro che interseca il piano di oscillazione in una circonferenza di raggio $r = d$, e centro G.

Ma esistono altri punti O', situati su un'altra circonferenza, per i quali risulta $T_n = 0,99$ s: infatti, detta d' la distanza di tali punti dal baricentro G, si può porre:

$$\omega_n^2 = gd/(\rho^2 + d^2) = gd'/(\rho^2 + d'^2)$$

ossia:

$$d(\rho^2 + d'^2) = d'(\rho^2 + d^2) \quad ; \quad \rho^2(d - d') = dd'(d - d')$$

dalla quale si deduce:

$$\rho^2 = dd' \longrightarrow d' = \rho^2/d = 141,67/15 \approx 9,44 \text{ cm}$$

Pertanto i punti di sospensione O' (v. fig.5.V–1,b) appartengono ad una circonferenza di raggio $d' = 9.44$ cm, che è la direttrice della seconda superficie luogo cilindrica ad asse evidentemente normale al piano dell'oscillazione.

Infine, tenendo presente che la lunghezza ridotta l del pendolo è data da:

$$l = (\rho^2 + d^2)/d = \rho^2/d + d$$

si ricava che:

$$l = d + d' = 15 + 9,44 = 24.44$$

e si deduce quindi che la lunghezza ridotta del pendolo è somma delle distanze d e d'.

Esercizio 5.VI

Facendo oscillare la biella, rappresentata in fig.5.VI–1, intorno ad un asse normale al piano di rappresentazione, di traccia O_1, si è misurato il tempo t_1 corrispondente a 50 oscillazioni. Si è quindi ripetuta l'esperienza, facendo questa volta oscillare la biella intorno ad un asse di traccia O_2 e si è misurato il tempo t_2 corrispondente ancora a 50 oscillazioni.

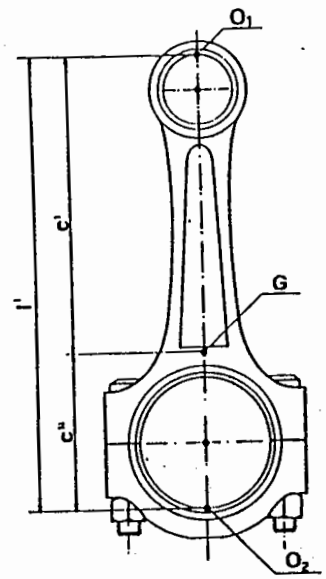


Fig.5.VI–1

Dalle due misure effettuate è risultato:

$$t_1 = 39.9 \text{ s} \quad ; \quad t_2 = 36.1 \text{ s}$$

Sono state inoltre misurate la distanza O_1O_2 e la massa m della biella:

$$O_1O_2 = l' = 191 \text{ mm} \quad ; \quad m = 0.920 \text{ kg}$$

Con i dati così ricavati, determinare la posizione del baricentro G ed il valore del momento d'inerzia di massa I_G della biella rispetto all'asse passante per G e normale al piano di rappresentazione.

Soluzione

I periodi di oscillazione T_1 e T_2 risultano:

$$T_1 = t_1/50 = 0.798 \text{ s} \qquad T_2 = t_2/50 = 0.722 \text{ s}$$

È noto inoltre che:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{(I_G + mc'^2)/mgc'} = 2\pi\sqrt{(\rho^2 + c'^2)/gc'}$$
$$T_2 = 2\pi\sqrt{(\rho^2 + c''^2)/gc''}$$

con $\rho^2 = I_G/m$.

Si può scrivere quindi:

$$T_1^2 g c'/4\pi^2 = \rho^2 + c'^2$$
$$T_2^2 g c''/4\pi^2 = \rho^2 + c''^2$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni, si ottiene:

$$(g/4\pi^2)(T_1^2 c' - T_2^2 c'') = (c'^2 - c''^2) = (c' - c'')l'$$

e quindi:

$$(gT_1^2/4\pi^2 - l')c' = (gT_2^2/4\pi^2 - l')c'' = (gT_2^2/4\pi^2 - l')(l' - c')$$

Si ricava infine:

$$c' = (gT_2^2/4\pi^2 - l') \cdot l'/(gT_1^2/4\pi^2 - l' + gT_2^2/4\pi^2 - l') = 0.124 \text{ m}$$

Dalle espressioni di T_1 e T_2 si ricava inoltre che:

$$I_G = T_1^2 mgc'/4\pi^2 - mc'^2 = I_{0,1} - mc'^2 = 3{:}9 \cdot 10^{-3} \text{ kg·m}^2$$

Esercizio 5.VII

Per il sistema ad un grado di libertà, rappresentato in figura, sono assegnati i valori:

$$m = 1 \text{ Kg} \quad ; \quad K_1 = 1000 \text{ N/m} \quad ; \quad K_2 = 2000 \text{ N/m} \quad ;$$
$$K_3 = 20 \text{ N/m} \quad ; \quad K_4 = 10 \text{ N/m} \quad ; \quad K_5 = 2000 \text{ N/m}$$

Calcolare la rigidità K della molla equivalente alle cinque molle presenti nel sistema, la pulsazione naturale ω_n, il periodo T_n e la frequenza f_n del sistema stesso.

Svolgimento

La rigidità equivalente K_{21} delle due molle K_1 e K_2, disposte in parallelo, è data da:

$$K_{21} = K_1 + K_2$$

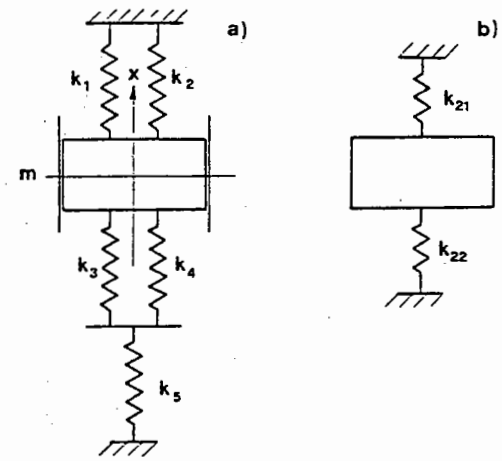


Fig.5.VII–1

mentre per la rigidità equivalente K_{22} delle due molle K_3 e K_4, disposte in parallelo, e della molla K_5, disposta in serie alle prime, vale la relazione:

$$1/K_{22} = 1/(K_3 + K_4) + 1/K_5 = (K_3 + K_4 + K_5)/(K_3 + K_4)K_5$$

dalla quale si deduce che:

$$K_{22} = (K_3 + K_4)K_5/(K_3 + K_4 + K_5)$$

La rigidità equivalente K del sistema di 5 molle, risultando essere equivalente a quella delle due molle K_{21} e K_{22}, disposte in parallelo, è data da:

$$K = K_1 + K_2 + (K_3 + K_4)K_5/(K_3 + K_4 + K_5) =$$
$$= 3000 + 30 \cdot 2000/2030 = 3000 + 29{,}55 = 3029{,}55 \text{ N/m}$$

La pulsazione, il periodo, la frequenza naturali del sistema sono quindi dati da:

$$\omega_n = \sqrt{(K/m)} = \sqrt{3029{,}55/1} = 55 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 0{,}114 \text{ s} \quad ; \quad f_n = 1/T_n = 8{,}75 \text{ Hz}$$

Esercizio 5.VIII

Determinare la pulsazione naturale ω_n con la quale oscilla la colonna liquida del tubo manometrico rappresentato in fig.5.VIII–1.

Svolgimento

Indicando con:

l = lunghezza rettificata della colonna liquida,

Ω = sezione del tubo ad U,

δ = densità del liquido manometrico,

l'equazione del moto della massa m del liquido manometrico può essere scritta nella forma:

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

con:

$$m = l\Omega\delta$$

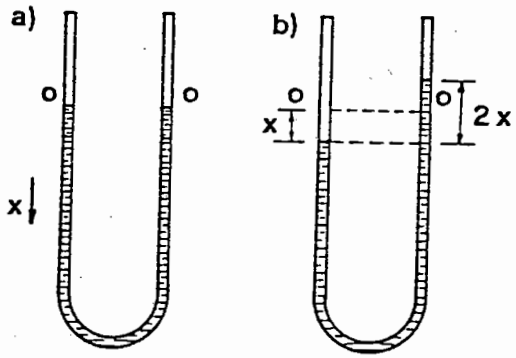


Fig.5.VIII–1

Per il calcolo della rigidità K del sistema, si supponga che il livello del liquido manometrico, ad es. nel ramo di sinistra del tubo, si abbassi di un tratto x: la forza di richiamo sarà quella esercitata dal peso del tratto di colonna liquida di lunghezza $2x$, presente nel ramo di destra:

$$Kx = \Omega\delta g 2x \quad ; \quad K = 2\Omega\delta g$$

La pulsazione naturale sarà quindi data da:

$$\omega_n = \sqrt{2\Omega\delta g / l\Omega\delta} = \sqrt{2g/l}$$

Si osservi che la pulsazione ω_n non dipende né dalla sezione Ω del tubo né dalla densità del liquido manometrico: tale pulsazione dipende, oltre che dall'accelerazione di gravità, solo dalla lunghezza rettificata della colonna liquida.

Si osservi ancora che tale pulsazione è anche indipendente da una eventuale differenza di livello del liquido, dovuta ad una differenza di pressione nei due rami del tubo manometrico, in quanto sia la massa m, che la rigidità K del sistema rimangono invariate.

Da quanto detto risulta che per $l = 1$ m:

$$\omega_n = \sqrt{2 \cdot 9{,}81/1} = 4{,}43 \text{ rad/s} \quad ; \quad T_n = 2\pi/\omega_n = 1{,}42 \text{ s}$$

Esercizio 5.IX

Un tubo manometrico (v. fig.5.IX–1) è collegato ad una condotta nella quale scorre un gas a bassa pressione relativa.

Il valore di tale pressione non è costante, ma varia con legge armonica, avente un periodo pari a 0,2 s, del tipo:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cdot \cos\omega t$$

con $p_1/p_0 = 0{,}5$.

Determinare la lunghezza l della colonna liquida, che consente una indicazione della pressione media p_0 con errori di entità trascurabile.

Svolgimento

Per effetto della pressione media p_0 il dislivello h_0 nei due rami del tubo risulta dato dalla relazione:

$$p_0\Omega = h_0\delta g\Omega \rightarrow h_0 = p_0/\delta g$$

La massa del liquido manometrico, sottoposta ad una forza periodica $\Omega p_1(t)$, compie delle oscillazioni forzate di periodo T pari a $0,2$ s.

La legge di tali oscillazioni forzate è del tipo:

$$x(t) = x_{st}A \cdot \cos\omega t = (\Omega \cdot 0{,}5p_0/2\Omega\delta g)\left[1/(1-\omega^2/\omega_n^2)\right]\cos\omega t =$$
$$= 0{,}25(p_0/\delta g)\left[1/(1-\omega^2/\omega_n^2)\right]\cos\omega t = 0{,}25h_0\left[1/(1-\omega^2/\omega_n^2)\right]\cos\omega t$$

Se si fissa $\omega/\omega_n = 5$, si avrà:

$$x(t) \approx -0{,}01h_0\cos\omega t$$

e l'ampiezza dell'oscillazione forzata risulta pari ad 1/100 dell'altezza h_0 e risulta quindi trascurabile rispetto ad h_0.

Per ottenere questo risultato occorre che:

$$\omega_n = \omega/5 = 2\pi/(0,2 \cdot 5) = 2\pi \text{ rad/s}$$

Poiché, come risulta dall'esercizio precedente, la pulsazione naturale ω_n è data da:

$$\omega_n = \sqrt{2g/l}$$

dovrà essere:

$$l = 2g/\omega_n^2 = 2 \cdot 9,81/4\pi^2 \approx 0,5 \text{ m}$$

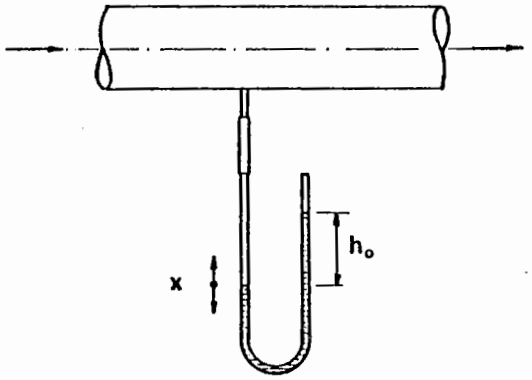


Fig.5.IX–1

È da osservare che tubi manometrici con lunghezza rettificata della colonna liquida maggiori di 0,5 m portano a valori di ω_n più bassi ed a valori dell'ampiezza delle oscillazioni forzate minori di 1/100 di h_0.

5.17 Sistemi dissipativi: vibrazioni libere

Le azioni smorzanti presenti in un sistema meccanico sono di natura diversa: come si è accennato nel par.5.12 esse sono dovute alla resistenza del mezzo, nel quale il sistema oscilla, alle resistenze d'attrito presenti nei vincoli, al fenomeno d'isteresi elastica, dovuto alla variazione periodica delle sollecitazioni degli elementi elastici presenti nel sistema.

Per tener conto di queste azioni smorzanti nella maniera più semplice, nel caso di sistemi discreti si accetta l'ipotesi che sulle masse concentrate

m agiscano forze resistenti del tipo $-\sigma\dot{x}$, proporzionali alla prima potenza della velocità $\dot{x}$ di m secondo una costante σ e di verso opposto ad x.

Azioni smorzanti di questo tipo sono dette viscose e la costante σ viene indicata come coefficiente di smorzamento viscoso o più semplicemente come smorzamento viscoso o ancora più semplicemente come smorzamento.

Riprendendo in esame il sistema ad un grado di libertà di fig.5.12–1, una resistenza al moto del tipo descritto può essere esercitata sulla massa m da uno smorzatore (v. fig.5.17–1), costituito da un cilindro, collegato rigidamente alla massa m, entro il quale può scorrere un pistone a perfetta tenuta, collegato ad un punto fisso O_1 e recante una serie di fori calibrati di piccolo diametro. Il cilindro sia pieno di un fluido viscoso, p.es. olio minerale.

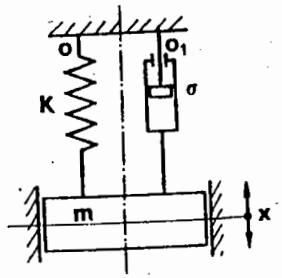


Fig.5.17–1

Durante l'oscillazione della massa m, il moto relativo tra pistone e cilindro dello smorzatore costringe il fluido a passare attraverso i fori calibrati con un moto che risulta laminare.

L'equazione del moto libero della massa m si ottiene scrivendo la condizione di equilibrio tra le forze agenti (reazione della molla $= -Kx$, reazione dello smorzatore $= -\sigma\dot{x}$ e la forza di inerzia $-m\ddot{x}$, tutte dirette secondo l'asse x):

$$-m\ddot{x} - \sigma\dot{x} - Kx = 0$$

L'equazione del moto può quindi scriversi nella forma:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \qquad (5.17\text{-}1)$$

L'equazione differenziale (5.17-1) rappresenta il modello matematico del moto libero di un sistema ad 1 grado di libertà, caratterizzato dai coefficienti costanti m, σ, K.

L'integrale generale $x(t)$ della (5.17-1) si ottiene con lo stesso metodo applicato nella soluzione della (5.12-1), ponendo cioè nella (5.17-1):

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \tag{5.17-2}$$

con C e λ costanti.

Con tale sostituzione si ottiene:

$$mC\lambda^2 e^{\lambda t} + \sigma C\lambda e^{\lambda t} + KCe^{\lambda t} = 0 \tag{5.17-3}$$

e quindi:

$$\lambda^2 + (\sigma/m)\lambda + K/m = 0 \tag{5.17-4}$$

La (5.17-4), indipendente da t, è l'equazione (algebrica) caratteristica dell'equazione differenziale (5.17-1).

Avendo già posto:

$$\omega_n = \text{ pulsazione naturale } = \sqrt{K/m} \tag{5.17-6}$$

le due radici λ_1 e λ_2 dell'equazione (2.17-4), risultano essere le seguenti:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma/2m \pm \sqrt{(\sigma/2m)^2 - \omega_n^2} \tag{5.17-7}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale (5.17-1) sarà quindi dato da:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5.17-8}$$

con λ_1 e λ_2 funzioni dei coefficienti (m, σ, K) del sistema e C_1 e C_2 costanti di integrazione, dipendenti dalle condizioni iniziali (x_0 e v_0).

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-8), ha caratteristiche sostanzialmente diverse a seconda che per il sistema in esame risulti:

$$\sigma/2m \gtrless \omega_n \tag{5.17-9}$$

cioè a seconda che il coefficiente di smorzamento σ soddisfi alle relazioni:

$$\sigma \gtrless 2m\omega_n = 2m\sqrt{K/m} = 2\sqrt{mK} \tag{5.17-10}$$

Indicato con:

$$\sigma_{cr} = \text{ smorzamento critico } = 2\sqrt{mK} \tag{5.17-11}$$

le relazioni (5.17-9) possono scriversi:

$$\sigma \gtrless \sigma_{cr} \tag{5.17-12}$$

È da osservare che per un assegnato sistema (m, K), il valore di σ_{cr} resta definito dalla (5.17-11).

Se è $\sigma > \sigma_{cr}$, cioè se lo smorzamento σ del sistema è maggiore dello smorzamento critico σ_{cr} i valori di λ_1 e λ_2 forniti dalla (5.17-7) risultano reali e negativi.

Posto:

$$q = \sqrt{(\sigma/2m)^2 - \omega_n^2} \tag{5.17-13}$$

e tenendo presente che:

$$\sigma/2m = (\sigma/\sigma_{cr}) \cdot 2\sqrt{mk}/2m = (\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \tag{5.17-14}$$

le radici reali e negative $\lambda_{1,2}$ fornite dalla (5.17-7) possono scriversi:

$$\lambda_{1,2} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\sigma/\sigma_{cr})^2 - 1} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm q \tag{5.17-15}$$

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-8), può così scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt})$$

e tenendo presenti le relazioni:

$$e^{\pm qt} = \cosh qt \pm \sinh qt \tag{5.17-16}$$

può infine scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(A\cosh qt + B\sinh qt) \tag{5.17-17}$$

con:

$$A = C_1 + C_2 \qquad B = C_1 - C_2$$

Le costanti di integrazione A e B sono calcolate in funzione delle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{5.17-18}$$

Derivando a questo scopo la (5.17-17):

$$\dot{x}(t) = -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(A\cos hqt + B\sin hqt) +$$

$$+ e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(Aq\sin hqt + Bq\cos hqt) \qquad (5.17\text{-}19)$$

ed imponendo le condizioni iniziali nelle espressioni di $x(t)$ e $\dot{x}(t)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ v_0 &= -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n A + Bq \end{aligned} \qquad (5.17\text{-}20)$$

Le costanti di integrazione risultano quindi date da:

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= \left(v_0 + x_0\omega_n\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)/q \end{aligned} \qquad (5.17\text{-}21)$$

La legge del moto $x(t)$ per la (5.17-17) risulta infine essere:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}\left\{x_0\cosh qt + \left[\left(v_0 + x_0\omega_n\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)/q\right]\sinh qt\right\} \qquad (5.17\text{-}22)$$

Esaminando la (5.17-22) o più semplicemente la (5.17-8) con λ_1 e λ_2 reali e negative, si conclude che, comunque si ecciti il moto libero di m, $x(t)$ tende asintoticamente a zero per $t \to \infty$.

In fig.5.17–2 è rappresentata la legge del moto $x(t)$ per diverse condizioni iniziali.

Si può concludere quindi che per $\sigma > \sigma_{cr}$ il moto libero della massa m non si presenta come una vibrazione: un moto di questo tipo viene indicato come aperiodico.

Se è $\sigma = \sigma_{cr}$, l'equazione caratteristica ammette una radice doppia: dalla (5.17-7) si ottiene infatti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\sigma_{cr}/2m = -2\sqrt{mk}/2m = -\omega_n$$

In questo caso l'integrale generale è dato da:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \qquad (5.17\text{-}23)$$

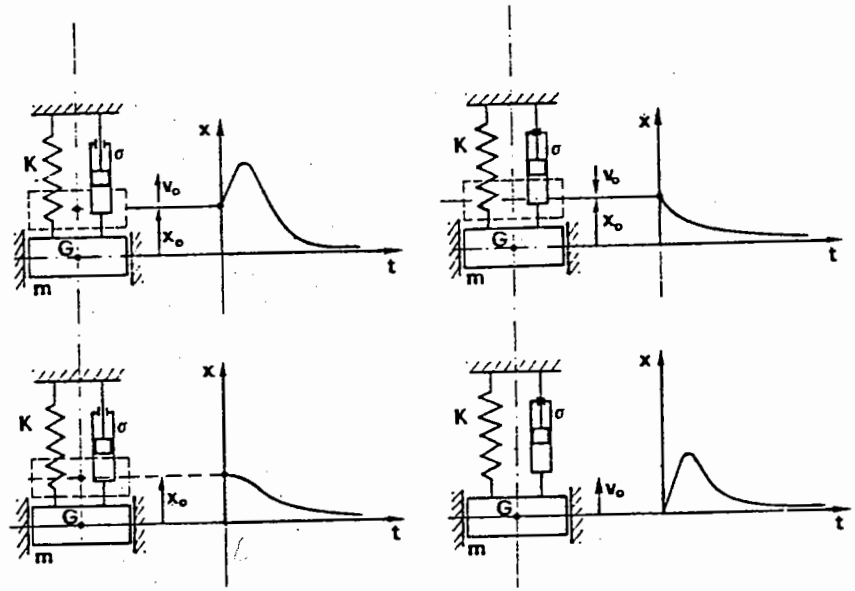


Fig.5.17–2

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 si ricavano al solito dalla (5.17-23) e dalla:

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n(C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \qquad (5.17\text{-}24)$$

tenendo presente che $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ debbono soddisfare alle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Si ottiene così il sistema:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ v_0 &= C_2 - \omega_n C_1 \end{aligned}$$

dal quale si ricava:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 &= v_0 + \omega_n x_0 \end{aligned}$$

La legge del moto $x(t)$ risulta quindi data da:

$$x(t) = \left[x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t\right] e^{-\omega_n t} \qquad (5.17\text{-}25)$$

ed il moto della massa m è, anche in questo caso, aperiodico e qualitativamente rappresentato dai diagrammi $x(t)$ di fig.5.17–2.

Se è $\sigma < \sigma_{cr}$ le radici dell'equazione caratteristica (5.17-4) sono complesse e coniugate, risultando dalla (5.17-7):

$$\lambda_{1,2} = -\sigma/2m \pm i\omega_n \sqrt{1 - (\sigma/2m\omega_n)^2}$$

Tenendo presente la (5.17-14) si può scrivere:

$$\lambda_{1,2} = -(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2}$$

Posto:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2} \qquad (5.17\text{-}26)$$

l'integrale generale della (5.17-1) può scriversi:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t})$$

e, tenendo presenti le formule di Eulero (5.12-9), si ottiene infine:

$$x(t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(A\cos\omega_s t + B\sin\omega_s t) = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} C\cos(\omega_s t + \phi_0) \qquad (5.17\text{-}27)$$

con:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\phi_0 = -B/A$$

Le costanti di integrazione A e B si ottengono come al solito dalla (5.17-27) e dalla:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(A\cos\omega_s t + B\sin\omega_s t) +$$

$$+ e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}(-A\omega_s \sin\omega_s t + B\omega_s \cos\omega_s t) \qquad (5.17\text{-}28)$$

imponendo che la $x(t)$ e la $\dot{x}(t)$ soddisfino alle condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 \qquad ; \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

Si ottiene così il sistema:

$$x_0 = A$$
$$v_0 = -A\omega_n \sigma/\sigma_{cr} + B\omega_s$$

dal quale si ricavano i valori:

$$A = x_0$$
$$B = (v_0 + x_0\omega_n \sigma/\sigma_{cr})/\omega_s$$

La legge del moto $x(t)$, data dalla (5.17-27), risulta così completamente definita.

Dall'esame di questa relazione si deduce che il moto libero della massa m può essere considerato come una vibrazione armonica di pulsazione ω_s di ampiezza $Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}$, decrescente con t: questo moto viene spesso indicato come moto armonico smorzato.

Un esame più attento della (5.17-27) mette in evidenza che:

1°) la $x(t)$ si annulla ad intervalli di tempo $T_s = 2\pi/\omega_s$;

2°) anche la $\dot{x}(t)$ si annulla con lo stesso periodo;

3°) il valore della pulsazione ω_s della vibrazione libera smorzata, dato dalla relazione:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2} \qquad (5.17\text{-}26)$$

diminuisce al crescere del rapporto σ/σ_{cr}: per un assegnato sistema (m, K) il periodo T_s cresce al crescere dello smorzamento σ;

4°) se si traccia il diagramma dello spostamento x della massa m in funzione del tempo, tale diagramma si presenta come in fig.5.17–3.
Le curve di equazione:

$$x_e(t) = \pm Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t} \qquad (5.17\text{-}29)$$

sono le curve inviluppo della curva:

$$x(t) = Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}\cos(\omega_s t + \phi_0) \qquad (5.17\text{-}27)$$

e prendono il nome di curve di estinzione.
Questa affermazione si giustifica osservando che per tutti i valori di t per i quali risulta:

$$\cos(\omega_s t + \phi_0) = \pm 1$$

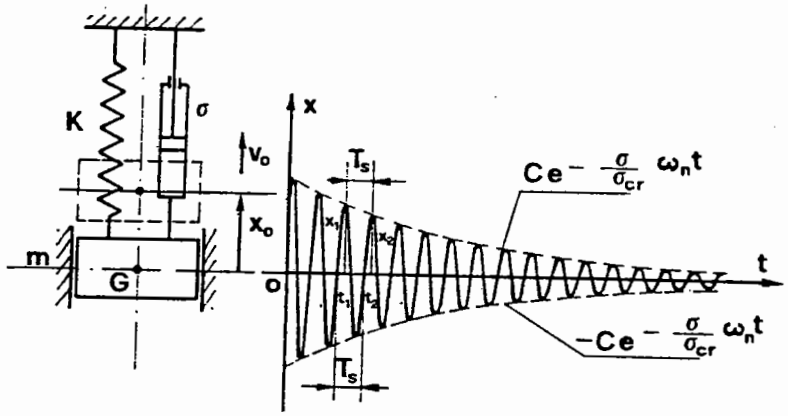


Fig.5.17–3

cioè per $(\omega_s t + \phi_0) = K\pi$ con $K = 0, 1, 2, ...$, le due curve hanno un punto in comune, risultando in questi istanti:

$$x = x_e$$

e che in questi punti le due curve hanno la stessa tangente; infatti risulta:

$$\dot{x}_e(t) = \mp C(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}$$

$$\dot{x}(t) = -C(\sigma/\sigma_{cr})\omega_n e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}\cos(\omega_s t + \phi_0) - Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t}\omega_s \sin(\omega_s t + \phi_0)$$

e quindi per $(\omega_s t + \phi_0) = K\pi$:

$$\dot{x}_e = \dot{x}$$

5°) indicato con t_1 l'istante in cui la $x(t)$ assume il valore massimo x_1 (v. fig.5.17–3) ed essendo, per quanto detto in 2°):

$$t_2 = t_1 + T_s$$

l'istante in cui la $x(t)$ assume il valore massimo successivo x_2, si può scrivere:

$$x_1 = Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t_1}\cos(\omega_s t_1 + \phi_0)$$
$$x_2 = Ce^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n (t_1+T_s)}\cos(\omega_s t_1 + \phi_0 + 2\pi)$$

e quindi:

$$x_1/x_2 = e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n t_1}/e^{-\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n (t_1+T_s)} = e^{\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\omega_n T_s} = e^{\frac{\sigma}{2m}T_s} \qquad (5.17\text{-}30)$$

Le ampiezze dell'oscillazione decrescono quindi secondo una progressione geometrica di ragione $e^{\frac{\sigma}{2m}T_s}$.

Passando ai logaritmi la (5.17-30) si scrive:

$$ln(x_1/x_2) = (\sigma/2m)T_s$$

Posto:

$$\delta = ln(x_1/x_2)$$

si può infine scrivere:

$$\delta = ln(x_1/x_2) = lnx_1 - lnx_2 = (\sigma/2m)T_s \qquad (5.17\text{-}31)$$

Questa relazione esprime che i logaritmi naturali delle ampiezze dell'oscillazione libera smorzata decrescono secondo una progressione aritmetica di ragione $\delta = (\sigma/2m)T_s$: δ prende il nome di decremento logaritmico.

Se si determinano sperimentalmente i valori di δ e di T_s, il valore di σ può essere ricavato dalla (5.17-31).

A questo riguardo va osservato che se si registra l'oscillazione libera smorzata di un sistema e sulla registrazione (v. fig.5.17–4) si leggono i valori delle ampiezze $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\delta &= (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)/n = \\ &= [(lnx_1 - lnx_2) + (lnx_2 - lnx_3) + \ldots]/n = \\ &= (lnx_1 - lnx_{n+1})/n\end{aligned}$$

Gli scarti tra il valore di δ calcolato con la relazione:

$$\delta = (lnx_1 - lnx_{n+1})/n$$

ed i valori di δ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ calcolati con la:

$$\delta_i = lnx_i - lnx_{i+1}$$

forniscono spesso indicazioni utili sulla validità del modello matematico (5.17-1): infatti l'ipotesi di smorzamento viscoso, che ha permesso di scrivere la (5.17-1), porta a valori nulli degli scarti suddetti $(\delta_i = \delta)$ e quindi se

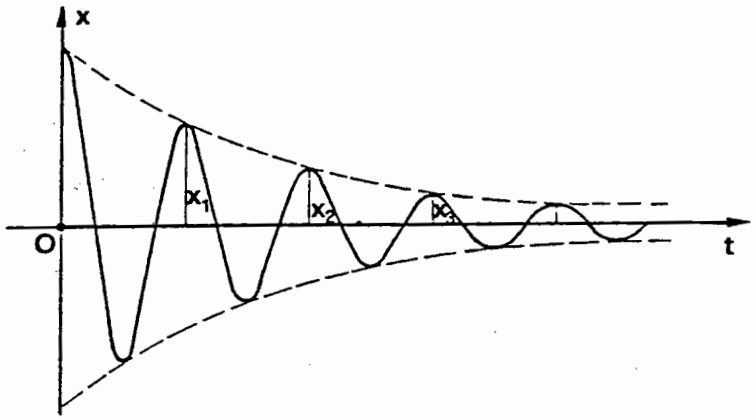


Fig.5.17–4

dalla registrazione si deducono scarti diversi da zero, ciò sta ad indicare che lo smorzamento del sistema non è di natura viscosa e l'entità degli scarti è la misura della validità dell'ipotesi.

A questo riguardo va osservato che i risultati dell'analisi effettuata sono in genere in buon accordo con i risultati sperimentali richiamati nel par.5.8.

È tuttavia da tener presente che, mentre dalla legge del moto $x(t)$, che si ricava dalla (5.17-1), si deduce che, per qualsiasi valore del rapporto σ/σ_{cr}, il moto della massa m tende a zero per $t \to \infty$, dall'esperienza si deduce invece che il moto libero si spegne completamente dopo un tempo finito.

Questa differenza di comportamento dipende dall'avere ipotizzato uno smorzamento viscoso, cioè proporzionale alla velocità.

5.18 Vibrazioni forzate armoniche

Se sulla massa m del sistema (m, σ, K) di fig.5.18–1 agisce una forza armonica $F_0 \cos \omega t$, l'equazione del moto (v. fig.5.18–1) risulta essere:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \qquad (5.18\text{-}1)$$

La soluzione di questa equazione differenziale (lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti, completa) si ottiene con lo stesso procedimento descritto nel par.5.13.

L'integrale generale della (5.18-1) è dato da:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \qquad (5.18\text{-}2)$$

con:

$x_l(t)$ = integrale generale dell'omogenea associata = moto libero di m;

$x_f(t)$ = integrale particolare della (5.18-1) = moto forzato di m.

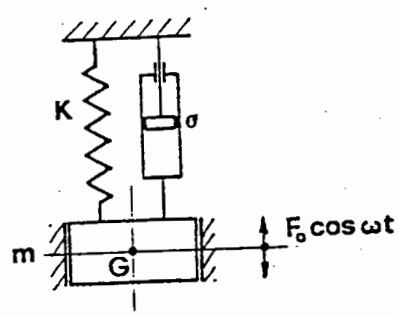


Fig.5.18–1

Limitandoci a considerare il moto $x(t)$ dopo il transitorio iniziale, quando cioè il moto libero $x_l(t)$ è ormai trascurabile, si può porre:

$$x(t) = x_f(t) = X_f \cos(\omega t - \phi) \qquad (5.18\text{-}3)$$

Anche in questo caso il moto forzato è armonico della stessa pulsazione ω dell'azione forzante, ma, a differenza dell'oscillazione forzata in assenza di smorzamento, esso presenta un ritardo di fase ϕ rispetto alla causa eccitante.

Mentre dal punto di vista analitico la necessità di introdurre l'incognita ϕ deriva dalla impossibilità di soddisfare alla (5.18-1) con un moto armonico $X_f \cos \omega t$, dal punto di vista fisico il ritardo di fase deriva dal principio generale che l'effetto (in questo caso la vibrazione forzata) non può che essere in ritardo rispetto alla causa (l'azione eccitante) che lo determina.

Le incognite X_f e ϕ vengono determinate sostituendo la (5.18-3) nell'equazione del moto.

Si ottiene così:

$$-m\omega^2 X_f \cos(\omega t - \phi) - \sigma\omega X_f \sin(\omega t - \phi) + \\ + K X_f \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos\omega t \qquad (5.18\text{-}4)$$

relazione che deve essere soddisfatta per ogni valore di t; in particolare per:

$$\begin{aligned} \omega t - \phi = 0 \quad &\longrightarrow \quad (K - m\omega^2) X_f = F_0 \cos\phi \\ \omega t - \phi = \pi/2 \quad &\longrightarrow \quad -\sigma\omega X_f = -F_0 \sin\phi \end{aligned} \qquad (5.18\text{-}5)$$

Dividendo membro a membro la seconda per la prima delle (5.18-5), si ottiene:

$$\tan\phi = \sigma\omega/(K - m\omega^2) \qquad (5.18\text{-}6)$$

mentre quadrando e sommando, si ottiene:

$$X_f = F_0/\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (\sigma\omega)^2} \qquad (5.18\text{-}6')$$

In funzione dei rapporti adimensionali σ/σ_{cr} ed ω/ω_n le (5.18-6) e (5.18-6') si scrivono:

$$\tan\phi = \frac{2\dfrac{\sigma}{\sigma_{cr}}\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (5.18\text{-}7)$$

$$X_f = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\dfrac{\sigma}{\sigma_{cr}}\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (5.18\text{-}8)$$

Si indichi con x_{st} lo spostamento che la massa m subisce per la applicazione statica di una forza pari ad F_0 (spostamento statico) e si osservi che anche in questo caso ($\sigma \neq 0$) risulta:

$$x_{st} = F_0/K \qquad (5.18\text{-}9)$$

in quanto lo smorzatore σ non può esercitare alcuna reazione in condizioni di equilibrio statico ($\dot{x} = 0$).

Se, d'altra parte, si indica con A il coefficiente di amplificazione inteso, come già è stato fatto nel par.5.13, come rapporto tra l'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata e lo spostamento statico x_{st}, risulta dalla (5.18-8):

$$X_f = x_{st} \cdot A \qquad (5.18\text{-}10)$$

con:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\dfrac{\sigma}{\sigma_{cr}}\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (5.18\text{-}11)$$

In conclusione il moto forzato $x_f(t)$ risulta dato da:

$$x_f(t) = x_{st} \cdot A\cos(\omega t - \phi) \qquad (5.18\text{-}12)$$

con x_{st}, A e ϕ, dati rispettivamente dalle (5.18-9), (5.18-11) e (5.18-7).

Questi risultati valgono evidentemente anche per $\sigma = 0$: in questo caso i valori di A e ϕ coincidono con quelli già ricavati nel par.5.13:

$$|A| = 1/|1 - \omega^2/\omega_n^2|$$

$$\tan\phi = 0 \longrightarrow \begin{cases} \phi = 0 & \text{per } \omega/\omega_n < 1 \\ \phi = \pi & \text{per } \omega/\omega_n > 1 \end{cases} \qquad (5.18\text{-}13)$$

e le curve di $|A|$ e ϕ in funzione di ω/ω_n sono quelle già riportate in fig.5.13–1,b).

In fig.5.18–2 sono riportate le curve di A e di ϕ per diversi valori del rapporto σ/σ_{cr}: dall'esame della curva $A = f(\omega/\omega_n)$ si deduce che:

1°) al crescere di σ/σ_{cr} le curve $A = f(\omega/\omega_n)$ si abbassano e presentano un massimo per valori di ω/ω_n via via più piccoli di 1. Il valore ω_M/ω_n, per il quale si verifica tale massimo, si ottiene ponendo:

$$\frac{dA}{d(\omega/\omega_n)} = 0$$

e risulta essere:

$$\frac{\omega_M}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\frac{\sigma^2}{\sigma_{cr}^2}} \qquad (5.18\text{-}14)$$

2°) il valore di σ/σ_{cr}, cui corrisponde $\omega_M/\omega_n = 0$, risulta, per la (5.18-14), dato da:

$$\sigma/\sigma_{cr} = 1/\sqrt{2} = 0.707 \qquad (5.18\text{-}15)$$

Ciò sta ad indicare che per valori di σ uguali o maggiori al 70.7% dello smorzamento critico, l'ampiezza dell'oscillazione forzata risulta più piccola dello spostamento statico, qualunque sia il valore della pulsazione della forza eccitante: il fenomeno della risonanza non è quindi più osservabile per $\sigma \geq 0.707\sigma_{cr}$.

3°) Tenendo presente il valore della pulsazione ω_s delle oscillazioni libere smorzate dato dalla (5.17-26):

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - (\sigma/\sigma_{cr})^2}$$

e la (5.18-14) si deduce che:

$$\omega_M < \omega_s < \omega_n \qquad (5.18\text{-}16)$$

4°) Per piccoli valori di σ/σ_{cr} (≤ 0.1) può ritenersi:

$$\omega_n \approx \omega_s \approx \omega_M \qquad (5.18\text{-}17)$$

e quindi il valore massimo di A risulta per la (5.18-11):

$$A_{max} = 1/(2\sigma/\sigma_{cr}) = \sigma_{cr}/2\sigma \qquad (5.18\text{-}18)$$

In queste condizioni ($\sigma/\sigma_{cr} \leq 0.1$) e per valori di ω sufficientemente lontani da ω_n ($0.8 > \omega/\omega_n > 1.2$) i valori di A, calcolati con la prima delle (5.18-13) ($\sigma = 0$), coincidono praticamente con quelli calcolati con la (5.18-11).

Questo risultato sta ad indicare che per sistemi poco smorzati, in condizioni lontane da quelle di risonanza, il modello matematico più semplice ($\sigma = 0$) consente una valutazione accettabile del moto forzato.

Dall'esame delle curve $\phi = f(\omega/\omega_n)$ di fig.5.18–2, si deduce che:

1°) Tutte le curve, indipendentemente dal valore del parametro σ/σ_{cr}, passano per il punto di coordinate $\omega/\omega_n = 1$ e $\phi = \pi/2$.
Ciò sta ad indicare che il valore della pulsazione naturale può essere considerato come il valore della pulsazione della causa eccitante per il quale risulta $\phi = \pi/2$.

2°) Per piccoli valori del rapporto σ/σ_{cr}, il ritardo di fase ϕ è praticamente uguale a zero per $\omega/\omega_n < 1$, mentre risulta uguale a π per $\omega/\omega_n > 1$.

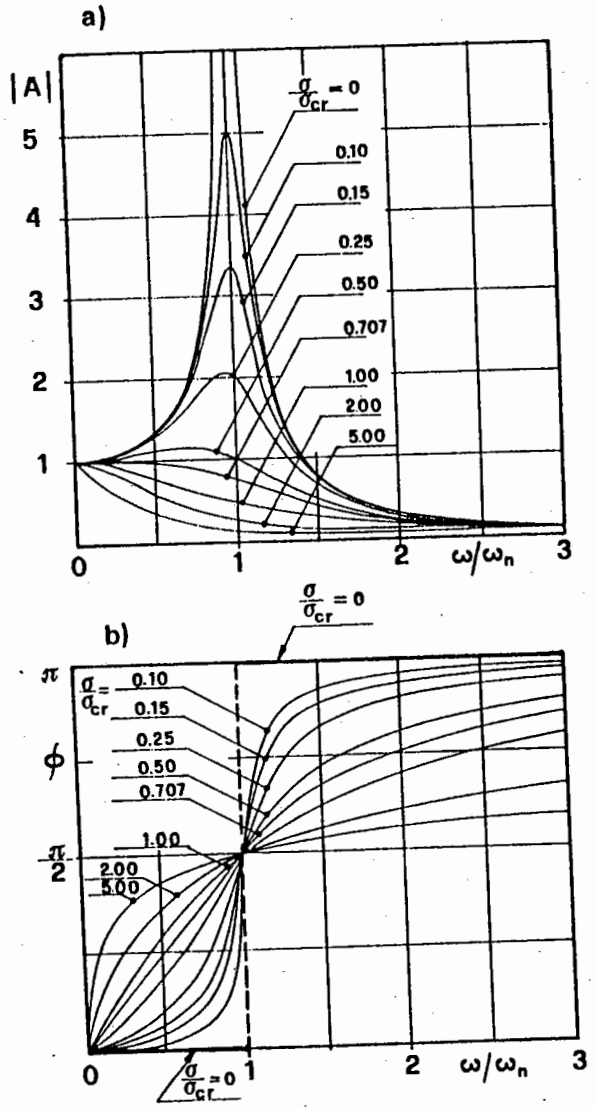


Fig.5.18–2

5.19 Metodo vettoriale

Ai risultati ottenuti nel paragrafo precedente si può dare una migliore interpretazione fisica mediante la rappresentazione vettoriale delle forze, che compaiono nella (5.18-1):

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \tag{5.18-1}$$

Tenendo presente che in condizioni stazionarie risulta:

$$x(t) = x_f(t) = X_f \cos(\omega t - \phi) \tag{5.18-3}$$

la (5.18-1) si scrive:

$$-m\omega^2 X_f \cos(\omega t - \phi) - \sigma\omega X_f \sin(\omega t - \phi) + KX_f \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t \tag{5.18-4}$$

Da questa relazione si deduce che la forza d'inerzia $-m\ddot{x}$, la reazione dello smorzatore $-\sigma\dot{x}$, la reazione della molla $-Kx$ e la forza eccitante $F_0 \cos \omega t$ sono forze armoniche di pulsazione ω e di ampiezza rispettivamente $m\omega^2 X_f$, $\sigma\omega X_f$, KX_f ed F_0.

Queste forze sono quindi rappresentabili mediante vettori rotanti con la stessa velocità angolare ω, di moduli $m\omega^2 X_f$, $\sigma\omega X_f$, KX_f, F_0, il primo in opposizione di fase col vettore accelerazione $\omega^2 X_f$, il secondo in opposizione di fase col vettore velocità ωX_f ed il quarto in anticipo di fase ϕ rispetto al vettore spostamento X_f.

Segnato il vettore rotante X_f nella posizione relativa all'istante t definito dalla relazione $(\omega t - \phi) = 0$, in fig.5.19–1,a) sono stati segnati i vettori rappresentativi di $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ e quindi quelli rappresentativi delle forze che compaiono nella (5.18-1).

Dalla fig.5.19–1,a) si deduce che per l'equilibrio delle forze rotanti deve essere:

$$\begin{aligned} F_0 \cos\phi + m\omega^2 X_f &= KX_f \\ F_0 \sin\phi &= \sigma\omega X_f \end{aligned} \tag{5.19-1}$$

Questo sistema di equazioni nelle incognite X_f e ϕ coincide col sistema (5.18-5) e quindi i valori di X_f e ϕ coincidono con quelli dati dalle (5.18-7) e (5.18-8).

Nel caso particolare, $\phi = \pi/2$, rappresentato in fig.5.19–1,b) si deduce:

$$\begin{aligned} m\omega^2 X_f = KX_f \quad &\longrightarrow \quad \omega^2 = K/m = \omega_n^2 \\ F_0 = \sigma\omega_n X_f \quad &\longrightarrow \quad X_f = F_0/\sigma\omega_n = x_{st} \cdot 1/(2\sigma/\sigma_{cr}) \end{aligned}$$

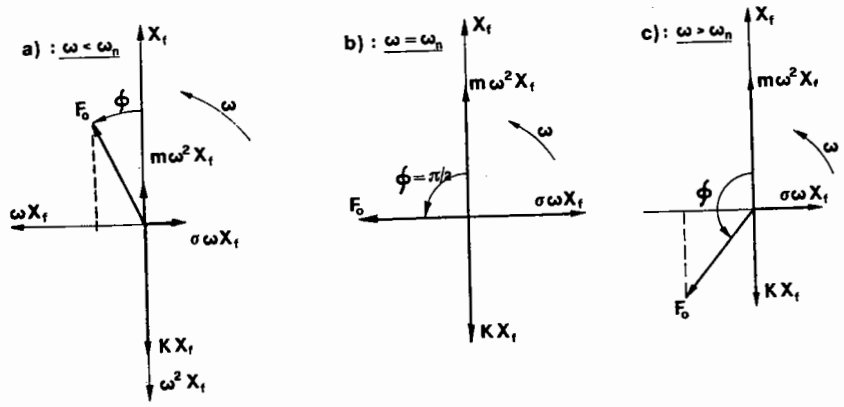


Fig.5.19–1

risultati questi già ricavati (v. la 5.18-18).

I diagrammi vettoriali di fig.5.19–1 non solo offrono una via alternativa per determinare le caratteristiche del moto forzato, ma consentono, come è stato detto, anche una migliore interpretazione fisica dei risultati raggiunti.

Per $\omega \ll \omega_n$ la forza d'inerzia e la reazione dello smorzatore sono piccole: in queste condizioni anche ϕ risulta piccolo e la forza eccitante è bilanciata praticamente dalla sola reazione della molla.

Per $\omega = \omega_n$ la forza d'inerzia e la reazione della molla si fanno equilibrio, mentre la forza applicata serve solo a bilanciare l'unica forza dissipativa presente nel sistema.

Per $\omega \gg \omega_n$, ϕ tende a π e la forza applicata serve praticamente a bilanciare solo la forza d'inerzia, adesso prevalente rispetto alla reazione dello smorzatore.

5.20 Vibrazione eccitata da un moto armonico

Il sistema (m, K, σ) può essere eccitato a vibrare, imponendo un moto armonico o all'estremo (non collegato ad m) della molla K(v. fig.5.20–1,a), o all'estremo dello smorzatore σ (v. fig.5.20–1,b) o ad entrambi gli estremi di K e σ (v. fig.5.20–1,c).

Nel primo caso l'equazione del moto risulta essere:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx_r = 0 \tag{5.20-1}$$

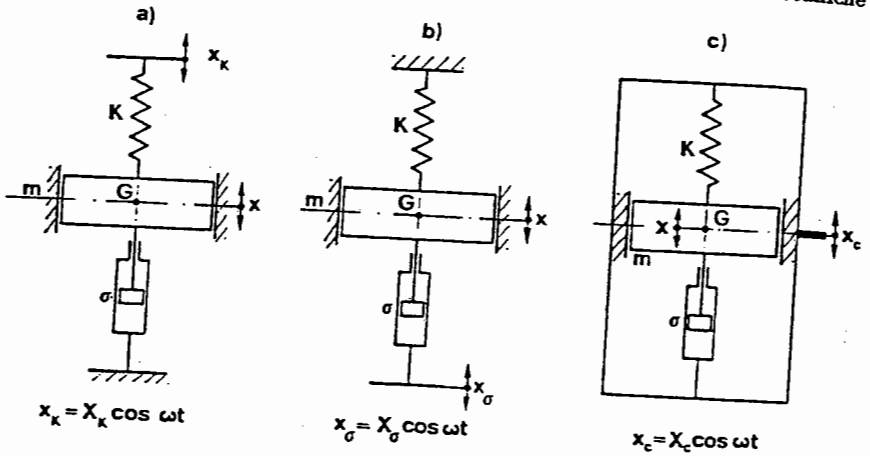


Fig.5.20–1

con:

x_r = moto relativo degli estremi della molla $= x - x_K$

e quindi potrà essere scritta nella forma:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = KX_K \cos \omega t \qquad (5.20\text{-}2)$$

Nel secondo caso risulta:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x}_r + Kx = 0 \qquad (5.20\text{-}3)$$

con:

x_r = moto relativo degli estremi dello smorzatore $= x - x_\sigma$

e quindi:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = -\sigma X_\sigma \omega \sin \omega t \qquad (5.20\text{-}4)$$

Nel terzo caso l'equazione del moto è data da:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x}_r + Kx_r = 0 \qquad (5.20\text{-}5)$$

Se interessa determinare la legge del moto assoluto $x(t)$ di m, l'equazione del moto va scritta:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = KX_c \cos \omega t - \sigma\omega X_c \sin \omega t = \\ = F_0 \cos(\omega t + \phi_0) \qquad (5.20\text{-}6)$$

dove:

$$F_0 = \sqrt{(KX_c)^2 + (\sigma\omega X_c)^2} \quad ; \quad \tan \phi_0 = \sigma\omega/K$$

Se invece interessa determinare la legge $x_r(t)$ del moto relativo di m rispetto al telaio mobile, l'equazione (5.20-5) va scritta nella forma:

$$m\ddot{x}_r + \sigma\dot{x}_r + Kx_r = m\omega^2 X_c \cos \omega t \qquad (5.20\text{-}7)$$

In ciascuno dei casi esaminati l'equazione del moto è stata scritta, esplicitando al secondo membro la forza armonica che eccita la massa m a vibrare: la legge del moto desiderata si ottiene applicando le formule già ricavate per il modello matematico:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

cioè la ormai nota relazione:

$$x(t) = x_{st} \cdot A \cos(\omega t - \phi)$$

con:

$$x_{st} = F_0/K \; ; \; A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \; ; \; \tan \phi = \frac{2\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

5.21 Esempi di applicazione

I risultati del moto libero e forzato ottenuti nei paragrafi precedenti per il sistema (m, K, σ), possono essere applicati a tutti i sistemi ad 1 grado di libertà con smorzamento viscoso.

Tutti gli esempi, esaminati nel par.5.15, possono quindi essere ripresi e riconsiderati alla luce di questi risultati.

Nel paragrafi che seguono, come applicazione dei risultati ottenuti, sarà esaminato il problema dell'isolamento delle vibrazioni.

5.21–1 Isolamento attivo delle vibrazioni

Durante il funzionamento di una macchina, a causa del moto degli organi che la compongono, si generano forze d'inerzia che, essendo esterne alla macchina stessa (v. par.1.6), si trasmettono alla struttura di sostegno.

Forze d'inerzia di questo tipo sono quelle che si generano durante la rotazione del rotore di una macchina a causa dello sbilanciamento residuo dello stesso (v. Cap. 3).

Come si vedrà nel Cap. 13, forze d'inerzia di notevole intensità si generano nel funzionamento di una macchina alternativa.

A causa della periodicità di queste forze, la struttura sulla quale è fissata la macchina oscilla in maniera indesiderata e, se si verificano condizioni di risonanza, con ampiezze tali da compromettere la stabilità e della struttura di sostegno e della macchina stessa.

Si presenta così il problema di "isolare" la macchina, interponendo tra la macchina e la struttura di sostegno un adatto "sistema di sospensione".

Il sistema di sospensione è costituito da un certo numero di elementi elastici, costituiti da molle d'acciaio o da supporti di gomma, o di feltro, o di sughero.

Il sistema suddetto deve assicurare, che solo una piccola aliquota delle forze esterne, che si destano durante il funzionamento della macchina, si trasmetta alla struttura di sostegno.

Il problema descritto prende il nome di "isolamento attivo" delle vibrazioni.

Se si considera la macchina come un corpo rigido, il problema dell'isolamento delle vibrazioni può essere studiato esaminando il moto forzato di un corpo rigido elasticamente vincolato (v. fig.5.21–1,a) e quindi di un sistema che presenta sei gradi di libertà (v. par.5.10).

Tuttavia utili informazioni possono ricavarsi dallo studio di un modello matematico più semplice, che considera il sistema, costituito dalla macchina di massa m e dagli elementi elastici, come un sistema ad 1 grado di libertà (m, K, σ), (v. fig.5.21–1,b), eccitato a vibrare da una forza armonica $F_0 \cos \omega t$.

In queste ipotesi l'equazione del moto forzato della massa m risulta, come è noto, la seguente:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

A caratterizzare l'efficacia del sistema di sospensione si assume il rapporto T tra l'ampiezza F_t della forza trasmessa alla struttura di appoggio e l'ampiezza F_0 della forza agente su m:

$$T = F_t / F_0$$

Il rapporto T prende il nome di ***rapporto di trasmissibilità***, o più semplicemente di ***trasmissibilità*** e per un buon isolamento deve risultare molto piccolo.

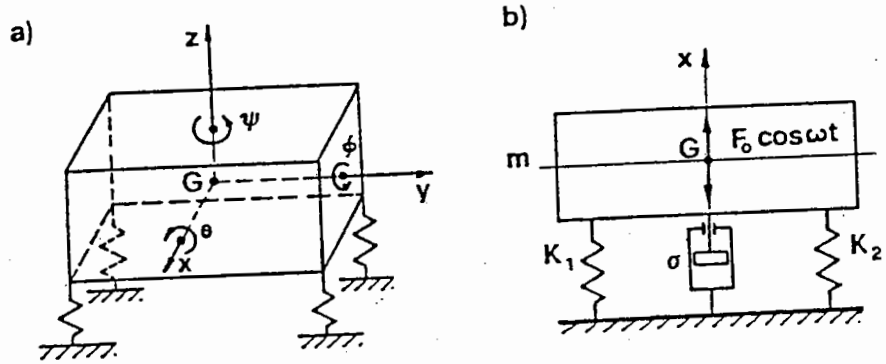


Fig.5.21–1

La forza trasmessa alla struttura di sostegno è uguale e contraria alla risultante della reazione $-Kx(t)$ delle molle di sospensione K, e della reazione $-\sigma\dot{x}(t)$ dello smorzatore σ.

Nella rappresentazione vettoriale delle forze agenti sul sistema (vedi paragrafo 5.19), l'ampiezza F_t è data dal modulo del risultante dei due vettori KX_f e $\sigma\omega X_f$, in quadratura tra loro (v. fig.5.21–1,c):

$$F_t = \sqrt{(KX_f)^2 + (\sigma\omega X_f)^2} = KX_f\sqrt{1 + (\sigma\omega/K)^2} =$$
$$= Kx_{st}A\sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}$$

Risulta pertanto:

$$T = F_t/F_0 = A\sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}$$

e quindi:

$$T = F_t/F_0 = \frac{\sqrt{1 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\sigma\omega/\sigma_{cr}\omega_n)^2}}$$

In fig.5.21–1,d) sono riportate le curve di T al variare di ω/ω_n e per diversi valori di σ/σ_{cr}. L'andamento qualitativo di queste curve si deduce osservando che:

1) se si trascura lo smorzamento $(\sigma = 0)$, l'espressione di T diviene:

$$T = 1/(1 - \omega^2/\omega_n^2) \qquad (5.21\text{-}1)$$

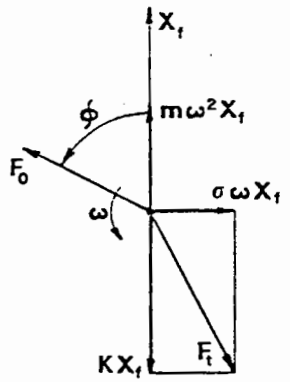


Fig.5.21–1,c

e coincide con l'espressione del coefficiente di amplificazione A, valida per $\sigma = 0$: la curva di $|T| = f(\omega/\omega_n)$ coincide quindi con la curva di $|A| = f(\omega/\omega_n)$ relativa a $\sigma/\sigma_{cr} = 0$.

2) per $\omega/\omega_n = 0$, tutte le curve passano per il punto di ordinata 1.

3) per $\omega/\omega_n = \sqrt{2} = 1.41$, tutte le curve passano ancora per il punto di ordinata 1.

Dalla fig.5.21–1,d) si deduce che per ottenere bassi valori di T occorre che la pulsazione ω della forza eccitante risulti molto maggiore della pulsazione naturale ω_n.

Se la forza $F(t)$ è periodica di periodo T, indicata con ω la pulsazione dell'armonica fondamentale:

$$\omega = 2\pi/T$$

per ottenere un buon isolamento è sufficiente che risulti $\omega > \omega_n$, in quanto per tutte le armoniche di ordine superiore al primo è, a maggior ragione, verificata la condizione:

$$n\omega = \text{pulsazione dell'armonica di ordine } n > \omega_n$$

che assicura per tutte queste armoniche un rapporto di trasmissibilità tanto più piccolo quanto più grande è n.

Per $\omega > 1.41\omega_n$ il coefficiente di trasmissibilità T aumenta all'aumentare di σ e quindi lo smorzamento del sistema ha un effetto negativo nei riguardi

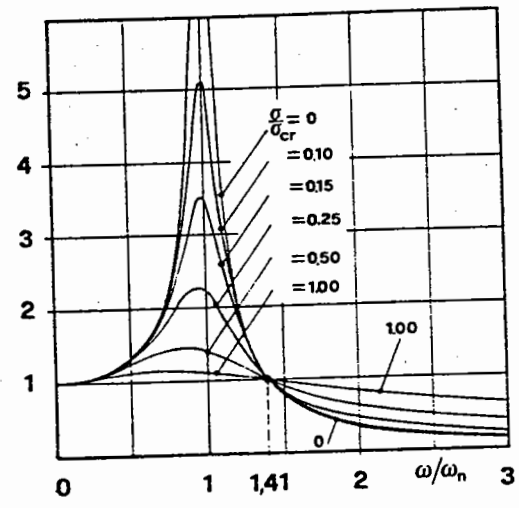


Fig.5.21–1,d

dell'isolamento delle vibrazioni, risultato questo che non è sorprendente, se si pensa che lo smorzatore σ (v. fig.5.21–1) rappresenta una via attraverso la quale la forza $F_0 \cos \omega t$ si trasmette alla struttura di sostegno.

La presenza dello smorzamento è però positiva all'avviamento ed all'arresto della macchina: durante queste fasi infatti il sistema passa attraverso la condizione di risonanza e l'ampiezza delle oscillazioni forzate di m può raggiungere valori molto grandi, se σ/σ_{cr} è piccolo.

Noti i valori di F_0 ed ω, che sono dati del problema, e posto $\omega_n = (1/r)\omega$, se si fissa il valore di r ($r = 3 \div 5$), la rigidità K del sistema di sospensione risulta definita dalla relazione:

$$\omega_n = \omega/r = \sqrt{K/m}$$

Se la macchina da isolare è molto lenta ($n = 100 \div 500$ giri/min), la pulsazione naturale ω_n deve risultare bassa e ciò comporta una sospensione di rigidità K molto piccola.

La realizzazione di sospensioni a basso valore di K pone però dei problemi; infatti indicando con:

P = peso della massa m;

δ_{st} = freccia statica del sistema di sospensione, dovuta al peso $P = P/K$

risulta:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{Kg/P} = \sqrt{g/\delta_{st}}$$

Questa relazione mette in evidenza che ω_n è funzione solo di δ_{st} e che per ottenere piccoli valori di ω_n, la freccia statica δ_{st} del sistema di sospensione deve risultare molto grande.

Poiché per ogni tipo di elemento elastico la freccia statica non può superare un certo valore, si deduce che a ciascun tipo di elemento elastico corrisponde un valore minimo della pulsazione naturale ω_n.

Indicando con f_n la frequenza naturale del sistema in c.p.m. risulta:

$$f_n = (60/2\pi)\sqrt{g/\delta_{st}} \quad \text{c.p.m.}$$

In fig.5.21–1,e è riportato l'andamento di f_n in funzione di δ_{st}; sulla stessa figura sono segnati, a titolo indicativo, i valori minimi delle frequenze f_n raggiungibili con ciascun tipo di elemento elastico.

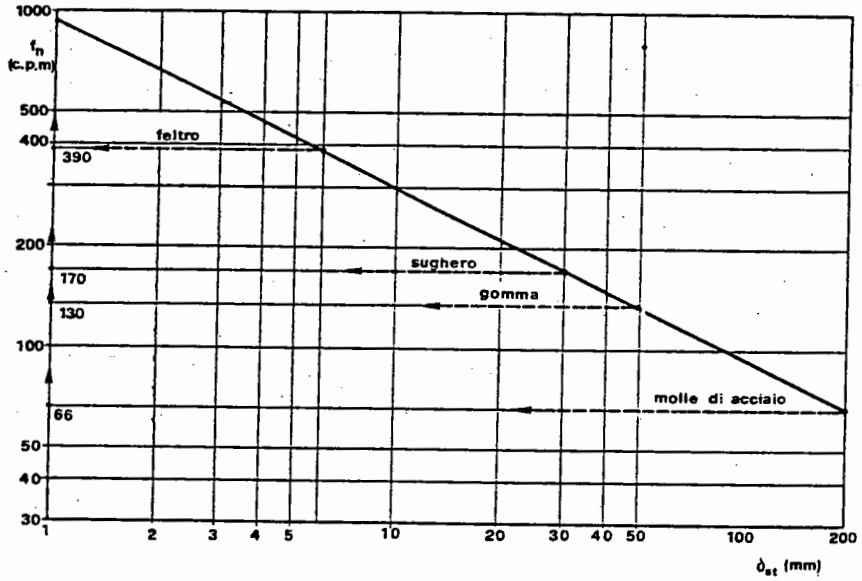


Fig.5.21–1,e

Dall'esame di questa figura si può concludere che al diminuire della frequenza f dell'azione eccitante, per ottenere un buon isolamento, occorre impiegare elementi di sospensione più costosi, passando da supporti cilindrici in feltro, a supporti sempre cilindrici in sughero ed in gomma.

Con le molle di acciaio è possibile realizzare i più bassi valori di ω_n e quindi ottenere sistemi di sospensione efficienti anche per macchine relativamente lente; altri pregi dei sistemi di sospensione di questo tipo sono la

resistenza alla corrosione e la possibilità di operare a temperature molto basse o molto alte.

Per contro le molle d'acciaio presentano uno smorzamento molto più basso di quello presente nei supporti di altri materiali ed è quindi necessario ricorrere ad accorgimenti particolari per aumentare lo smorzamento del sistema.

5.21–2 Isolamento passivo

Nella pratica tecnica si presenta anche il problema inverso di quello trattato nel paragrafo precedente: si deve cioè impedire che le vibrazioni della struttura di appoggio, causate dal funzionamento di altre macchine, si comunichino ad una macchina, sulla quale non agisce alcuna apprezzabile forza periodica e che per ragioni particolari non deve vibrare.

Questo secondo tipo di isolamento delle vibrazioni prende il nome di isolamento passivo.

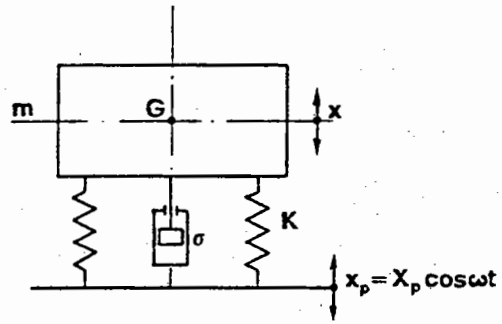


Fig.5.21–2

Se anche in questo caso si considera il sistema macchina–sospensione come un sistema (m, σ, K) ad 1 grado di libertà (v. fig.5.21–2) e si ipotizza che il piano di appoggio vibri con legge armonica:

$$x_p = X_p \cos\omega t$$

l'equazione del moto $x(t)$ di m è data da:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x}_r + Kx_r = 0$$

e coincide con quella (5.20-5), relativa al sistema rappresentato in fig.5.20–1,c).

Posto:

$$x_r = x - x_p$$

l'equazione del moto si scrive:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = KX_p \cos\omega t - \omega\sigma X_p \sin\omega t = F_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

con:

$$F_0 = \sqrt{(KX_p)^2 + (\sigma\omega X_p)^2} = KX_p\sqrt{1 + \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]^2}$$

$$\tan\phi_0 = \sigma\omega/K = 2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)$$

Applicando la (5.18-12) si ottiene:

$$x(t) = x_f(t) = x_{st} A \cos(\omega t + \phi_0 - \phi)$$

con:

$$x_{st} = F_0/K = X_p\sqrt{1 + \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]^2}$$

$$A = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]^2}$$

$$\tan\phi = \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]/(1 - \omega^2/\omega_n^2)$$

Se in questo caso, ad indicare l'efficacia del sistema di sospensione, si assume il rapporto T tra l'ampiezza $X_f = x_{st}A$ della oscillazione della massa m e l'ampiezza X_p dell'oscillazione del piano di appoggio:

$$T = X_f/X_p$$

si ottiene:

$$T = \frac{X_f}{X_p} = x_{st}\frac{A}{X_p} = \frac{\sqrt{1 + \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + \left[2(\sigma/\sigma_{cr})(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

che coincide con l'espressione di $T = F_t/F_0$ ricavata nel caso dell'isolamento attivo.

Per questo motivo il rapporto X_f/X_p prende il nome di rapporto di trasmissibilità o trasmissibilità del sistema e la rappresentazione di $|T| = f(\omega/\omega_n, \sigma/\sigma_{cr})$ coincide con quella di fig.2.21–1,d.

Valgono, pertanto in questo caso considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso dell'isolamento attivo, considerazioni che possono così essere sintetizzate:

1°) per avere un piccolo valore di T deve risultare $\omega_n \ll \omega$, cioè la pulsazione naturale ω_n del sistema macchina–supporti elastici deve essere più piccola della pulsazione ω dell'armonica fondamentale dell'oscillazione periodica della struttura di appoggio della macchina;

2°) la presenza di uno smorzamento di tipo viscoso aumenta, a parità di tutte le altre condizioni, il valore di T;

3°) questo effetto negativo è compensato dal fatto che, durante l'avviamento o l'arresto delle macchine adiacenti alla macchina in questione, il passaggio attraverso le condizioni di risonanza comporta oscillazioni di ampiezza tollerabile per la macchina in esame.

Esercizio 5.X

Un gruppo costituito da una macchina motrice ed una utilizzatrice è montato su di un telaio rigido A (v. fig.5.X–1) ; la massa complessiva del gruppo e del telaio è di 500 Kg.

Si supponga che durante il funzionamento del gruppo si generi una forza armonica verticale con pulsazione pari alla velocità del gruppo stesso e di ampiezza F_0 pari a 1000 N. La velocità angolare del gruppo è pari a 500 giri/min.

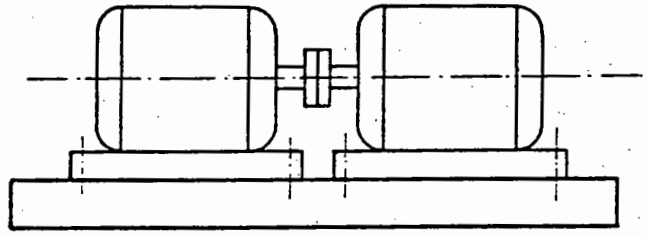


Fig.5.X–1

Il problema dell'isolamento dalle vibrazioni può essere affrontato in due modi diversi:

1) Il primo (v. fig.5.X–2), più semplice, consiste nell'interporre degli elementi

elastici di sospensione tra il sistema costituito dal gruppo e dal telaio e la struttura di sostegno.

2) Il secondo (v. fig.5.X–3), più complesso, consiste nell'ancorare il telaio ad un blocco di fondazione in calcestruzzo armato, avente le dimensioni riportate in figura e densità $\delta = 2.5 \cdot 10^3$ Kg/m^3, e nel sospendere il sistema così ottenuto, alla struttura di sostegno mediante opportuni elementi elastici.

In entrambi i casi si vuole realizzare un rapporto di trasmissibilità pari ad 1/24.

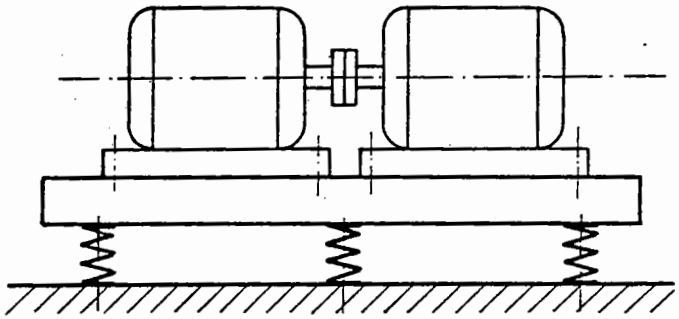


Fig.5.X–2

In base ai dati assegnati e trascurando le azioni smorzanti, determinare in entrambi i casi, rappresentati nelle figg. 5.X–2 e 5.X–3:

1) la forza trasmessa alla struttura di sostegno;
2) il tipo di elementi elastici (feltro, sughero, gomma o molle di acciaio) da usare;
3) le rigidità del sistema di sospensione;
4) le ampiezze delle oscillazioni forzate del gruppo.

Soluzione:

1) Per tutte e due le sospensioni elastiche deve essere:

$$T = 1/24$$

per cui la forza F_t, trasmessa alla struttura di sostegno risulterà, in entrambi i casi pari a:

$$F_t = F_0 \cdot T = 1000/24 \approx 42 \text{ N}$$

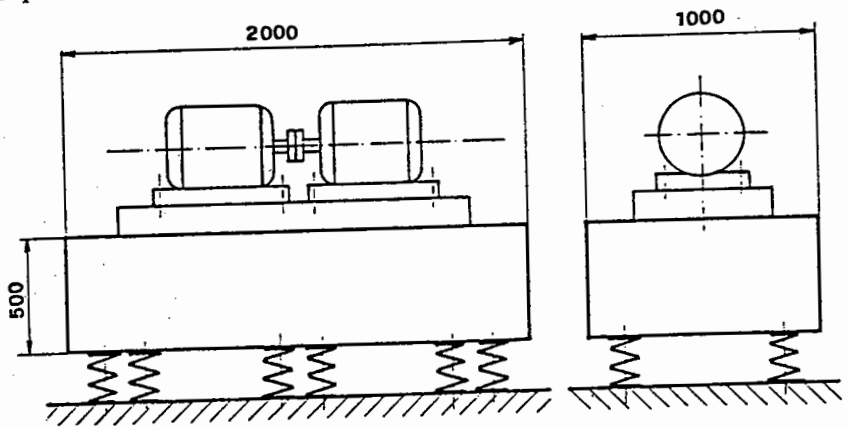


Fig.5.X–3

2) Dovendo risultare in entrambi i casi:

$$|T| = |1/(1 - \omega^2/\omega_n^2)| = 1/24$$

ed essendo:

$$\omega = 2\pi n/60 = 52.36 \text{ rad/s}$$

per tutte e due le disposizioni, dovrà risultare:

$$\omega_n = \omega/5 = 52.36/5 = 10.47 \text{ rad/s}$$

ed

$$f_n = 500/5 = 100 \text{ c.p.m.}$$

Dal diagramma di fig.5.21,e si deduce che per ottenere questo valore della frequenza naturale, in entrambi i casi si dovranno usare molle d'acciaio.
La freccia statica risulterà essere:

$$\delta_{st} = g/\omega_n^2 = 9.81/10.47^2 = 0.089 \text{ m} = 89 \text{ mm}$$

3) Per la prima disposizione, avendo indicato con m la massa complessiva del gruppo e del telaio, la rigidità k della sospensione sarà data dalla relazione:

$$K = m \cdot \omega_n^2 = 500 \cdot 10.47^2 = 54.8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Per la seconda disposizione la rigidità K della sospensione è data da:

$$K = M \cdot \omega_n^2$$

con:

$$M = m + m_B$$

Essendo:

$$m = \text{ massa del blocco di calcestruzzo armato } =$$
$$= \delta V = 2.5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

risulta:

$$M = 500 + 2500 = 3000 \text{ kg}$$

e quindi:

$$K = 3000 \cdot (10.47)^2 = 3.29 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

4) L'ampiezza X_f dell'oscillazione forzata per la prima disposizione risulta essere:

$$X_f = x_{st} A = F_0 \cdot A/K = F_0 \cdot T/K = (1000/5.48 \cdot 10^4)(1/24) = 7.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Per la seconda disposizione risulta invece:

$$X_f = x_{st} A = F_0 \cdot A/K = F_0 \cdot T/K = (1000/3.29 \cdot 10^5)(1/24) = 1.27 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Esercizio 5.XI

Il costruttore del gruppo di cui all'esercizio precedente garantisce un buon funzionamento del gruppo stesso se, a velocità di regime, le ampiezze delle vibrazioni sono inferiori a 0.2 mm.

Per questo motivo si deve adottare la soluzione di fig.5.X–3.

Volendo utilizzare, per la sospensione, molle di acciaio del tipo rappresentato in fig.5.XI–1, aventi un numero di spire attive n pari a 6, sulla base dei risultati ottenuti nell'esercizio precedente, determinare:

1) Il numero delle molle di acciaio da disporre in parallelo;
2) la loro disposizione più opportuna;
3) la sollecitazione massima alla quale saranno sottoposti gli elementi elastici.

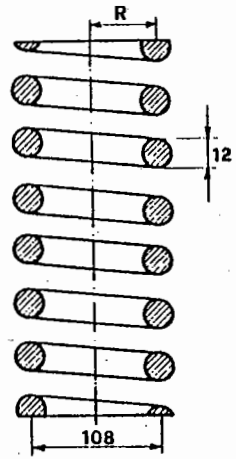


Fig.5.XI–1

Soluzione

1) La rigidità K di ciascuna delle molle è data da:

$$K_i = Gd^4/64nR^3 = 8 \cdot 10^{10}(12 \cdot 10^{-3})/64 \cdot 6 \cdot (54 \cdot 10^{-3})^3 = 2.74 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

e quindi il numero n delle molle da disporre in parallelo risulta essere:

$$n = K/K_i = 3.29 \cdot 10^5/2.74 \cdot 10^4 = 12$$

2) La disposizione più opportuna delle 12 molle è quella riportata in fig.5.XI–2.
3) Tenendo presente che la forza massima F che agisce su ciascun elemento elastico è data da:

$$F = (P + F_t)/n$$

con:

P = peso del gruppo + basamento $= g \cdot M = 9.81 \cdot 3000 = 29430$ N

risulta:

$$F = (P + F_t)/n \approx P/n = 29430/12 = 2452.5 \text{ N}$$

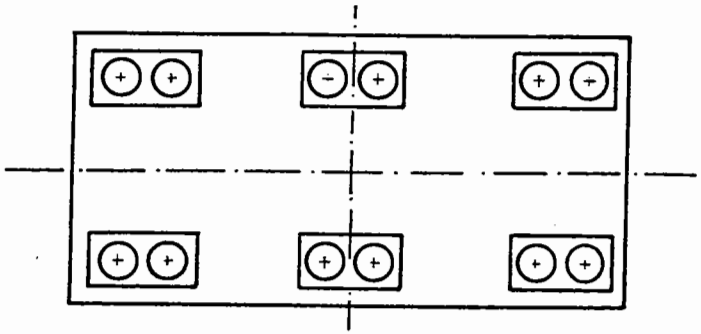


Fig.5.XI-2

A questa forza, diretta secondo l'asse delle molle, corrisponde un momento torcente nel tondino d'acciaio della molla pari a:

$$M_t = F \cdot R = 2452.5 \cdot 0.054 = 132.34 \text{ N·m}$$

La sollecitazione a torsione è data da:

$$\tau = (M_t / I_p) d/2$$

con:

I_p = momento d'inerzia polare della sezione del tondino =
$= (d/2)^4 \cdot \pi/2 = (6 \cdot 10^{-3})^4 \pi/2 = 2 \cdot 10^{-9}$ m^4

Risulta quindi:

$$\tau = (132.34/2 \cdot 10^{-9}) \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 397 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 397 \text{ N/mm}^2$$

Tale sollecitazione si può ritenere ammissibile per gli acciai legati utilizzati per la costruzione delle molle.

5.22 Sistemi a due gradi di libertà: fenomeni fondamentali

Si consideri un sistema costituito (v. fig.5.22–1) da un'asta di acciaio alla quale sono solidali due masse m_1 ed m_2, disposte come in fig.5.22–1,a).

Se mediante il tavolo vibrante T, al quale si è già accennato nel par.5.8, si eccita il sistema a vibrare, imponendo all'estremo S un moto armonico:

$$x_K(t) = X_K \cos \omega t$$

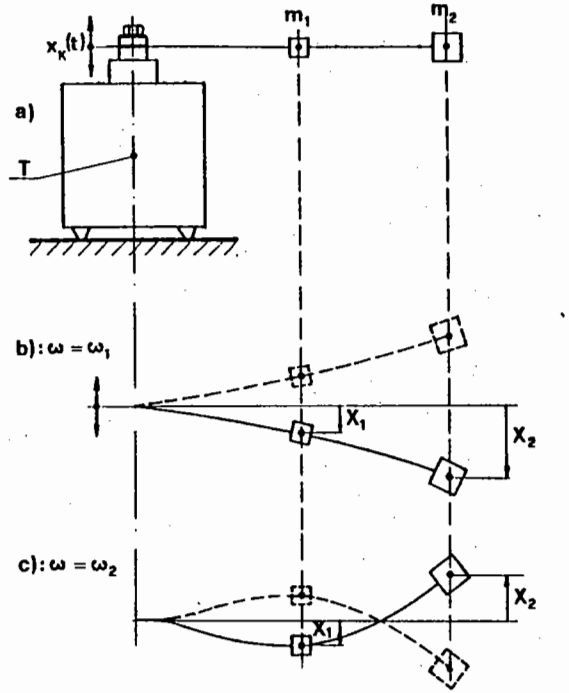


Fig.5.22–1

il sistema compie oscillazioni forzate armoniche di pulsazione pari a quella dell'azione eccitante x_K.

Se lo smorzamento del sistema è piccolo e se si varia con gradualità la pulsazione ω, si nota che il sistema entra in risonanza per due diversi valori ω_1 ed ω_2 di ω: in corrispondenza di questi due valori della pulsazione forzante le ampiezze di oscillazione diventano molto grandi ed il sistema oscilla in un modo caratteristico. Se si esamina il modo di vibrare mediante una lampada stroboscopica si osserva che per $\omega = \omega_1$ ($\omega_1 < \omega_2$) le due masse oscillano in fase tra loro (v. fig.5.22–1,b) ed in modo tale che, indicata con C una costante, in qualsiasi istante dell'oscillazione, risulta:

$$x_1(t)/x_2(t) = C_1 > 0 \qquad (5.22\text{-}1)$$

Per $\omega = \omega_2$ il modo di vibrare del sistema è diverso ed è caratterizzato dal fatto che le due masse oscillano in opposizione di fase: indicata con C_2 una nuova costante, si potrà ritenere che in queste condizioni sia:

$$x_1(t)/x_2(t) = C_2 < 0 \qquad (5.22\text{-}2)$$

Sulla base di quanto detto a proposito dei sistemi ad 1 grado di libertà, un'esperienza del tipo descritto va interpretata considerando che se il sistema presenta due risonanze per $\omega = \omega_1$ e per $\omega = \omega_2$, il sistema ha due frequenze proprie o naturali, a ciascuna delle quali corrisponde un modo di vibrare caratterizzato dalle (5.22-1) e (5.22-2) rispettivamente.

Nei paragrafi che seguono sarà esaminato per via teorica il comportamento di un sistema, simile a quello riportato in fig.5.22–1, mediante un modello matematico a due gradi di libertà, discreto, lineare, a coefficienti costanti.

5.23 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento

Si consideri il sistema rappresentato in fig.5.23–1 e si ritengano valide le seguenti ipotesi semplificative: le due masse m_1 ed m_2 scorrano tra guide lisce, non rappresentate in figura; le molle K_1, K_2, K_3 siano assimilabili a legami elastici, privi di massa.

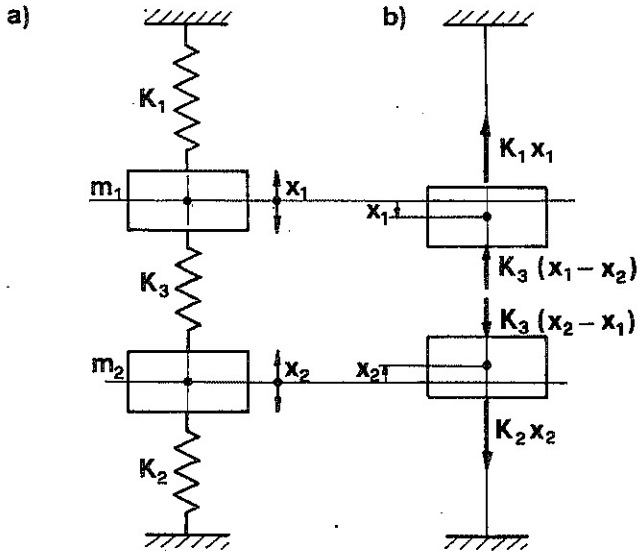


Fig.5.23–1

In queste ipotesi il sistema si riduce ad un sistema a due gradi di libertà; a definirne in ogni istante la configurazione si assumano gli spostamenti x_1 ed x_2 delle due masse, misurati a partire dalle rispettive posizioni di riposo.

Si ritengano infine trascurabili le azioni smorzanti.

a) *Integrazione delle equazioni del moto*

Si immagini che il sistema stia oscillando liberamente e siano x_1 ed x_2 (v. fig.5.23–1,b) le posizioni delle due masse in un istante generico t.

Le equazioni del moto libero del sistema si scrivono considerando che nella posizione considerata, per il principio di d'Alembert, su ciascuna delle due masse si fanno equilibrio la forza d'inerzia e le reazioni elastiche delle molle, collegate a quella massa.

Procedendo in questo modo, le equazioni del moto si scrivono:

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - K_1x_1 - K_3(x_1 - x_2) = 0 \\ -m_2\ddot{x}_2 - K_2x_2 - K_3(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}1)$$

e possono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - K_3x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3x_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}1)$$

I coefficienti:

$$\begin{aligned} k_{11} &= K_1 + K_3 \\ k_{22} &= K_2 + K_3 \\ k_{12} &= k_{21} = -K_3 \end{aligned} \qquad (5.23\text{-}2)$$

prendono il nome di coefficienti di rigidità del sistema ed hanno un chiaro significato fisico.

Infatti se, partendo dalla posizione di equilibrio statico del sistema, si immagina (v. fig.5.23–2) di spostare la massa m_1 di una quantità $x_1 = 1$ ferma restando la massa m_2 $(x_2 = 0)$, la reazione che il sistema esercita su m_1 è data da $-(K_1 + K_3) \cdot 1 = -k_{11}$.

Nelle stesse condizioni $(x_1 = 1;\ x_2 = 0)$ la reazione che il sistema esercita su m_2 è data da $K_3 \cdot 1 = -k_{21}$.

Analogamente si definiscono i coefficienti k_{22} e k_{12}.

In generale si può dire che per un sistema ad n gradi di libertà il coefficiente di rigidità k_{ij} è la reazione, col segno cambiato, che il sistema esercita sulla massa i–esima, se si impone uno spostamento unitario alla massa j–esima $(x_j = 1)$ ferme restando tutte le altre masse del sistema $(x_i = 0$ per $i \neq j)$.

Il sistema di equazioni differenziali omogenee (5.23-1), con le posizioni (5.23-2), si scrive:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.23\text{-}3$$

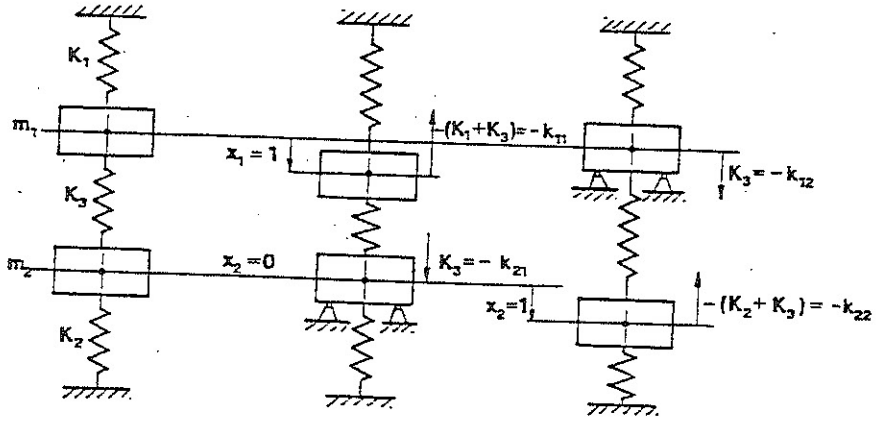


Fig.5.23–2

Questo sistema di equazioni differenziali rappresenta quindi il modello matematico del moto libero di un sistema discreto, a due gradi di libertà, in assenza di azioni smorzanti.

L'integrale generale del sistema (5.23-3) si ottiene ponendo nelle (5.23-3):

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ x_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases} \tag{5.23-4}$$

Si ottiene così il sistema di equazioni algebriche omogenee in C_1 e C_2:

$$\begin{cases} m_1\lambda^2 C_1 + k_{11}C_1 + k_{12}C_2 = 0 \\ m_2\lambda^2 C_2 + k_{21}C_1 + k_{22}C_2 = 0 \end{cases} \tag{5.23-5}$$

Dividendo la prima di queste equazioni per m_1, la seconda per m_2 ed ordinando si ottiene:

$$\begin{cases} (\lambda^2 + k_{11}/m_1)C_1 + (k_{12}/m_1)C_2 = 0 \\ (k_{21}/m_2)C_1 + (\lambda^2 + k_{22}/m_2)C_2 = 0 \end{cases} \tag{5.23-6}$$

Posto:

$$\begin{aligned} k_{11}/m_1 &= (K_1 + K_3)/m_1 = \Omega_1^2 \\ k_{22}/m_2 &= (K_2 + K_3)/m_2 = \Omega_2^2 \\ k_{12}/m_1 &= -K_3/m_1 = -\Omega_{13}^2 \\ k_{21}/m_2 &= -K_3/m_2 = -\Omega_{23}^2 \end{aligned} \tag{5.23-7}$$

le (5.23-6) si scrivono:

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \Omega_1^2)C_1 - \Omega_{13}^2 C_2 = 0 \\ -\Omega_{23}^2 C_1 + (\lambda^2 + \Omega_2^2)C_2 = 0 \end{cases} \tag{5.23-8}$$

Si osservi che le grandezze Ω_1, Ω_2, Ω_{13}, Ω_{23}, definite dalle posizioni (5.23-7), hanno le dimensioni di una pulsazione e coincidono con le pulsazioni naturali dei quattro sistemi ad 1 grado di libertà rappresentati in fig.5.23–3 e che sono parti (subsistemi) del sistema in esame.

Perché il sistema di equazioni (5.23-8) abbia soluzioni C_1 e C_2 diverse da zero, il determinante dei coefficienti deve essere pari a zero.

Si osservi a questo proposito che soluzioni nulle ($C_1 = C_2 = 0$) significano per le (5.23-4), assenza di moto del sistema (soluzione banale) e che per $\Delta = 0$ dalle (5.23-8) si ottengono soluzioni C_1 e C_2 indeterminate:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\Omega_{13}^2 \\ 0 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} = 0/0$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & 0 \\ -\Omega_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} = 0/0$$

Per quanto detto dovrà risultare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \Omega_1^2 & -\Omega_{13}^2 \\ -\Omega_{23}^2 & \lambda^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.23-9}$$

Sviluppando Δ, si ottiene:

$$\lambda^4 + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\lambda^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2 = 0 \tag{5-23-10}$$

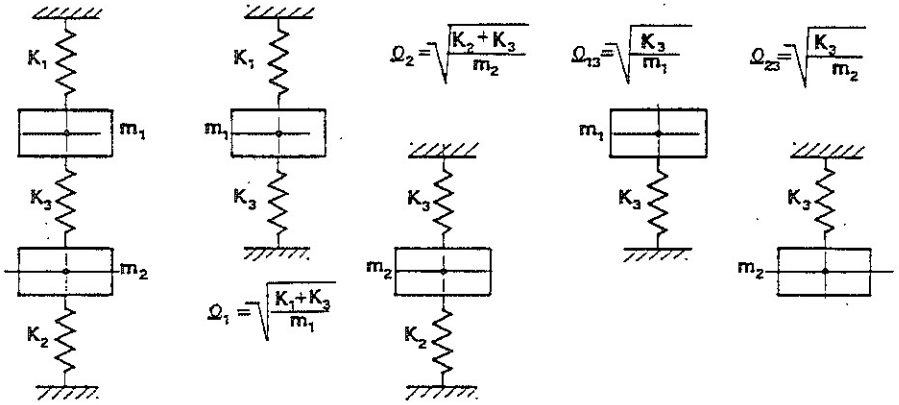


Fig.5.23–3

Il determinante Δ è il determinante caratteristico del sistema di equazioni (5.23-8) e l'equazione (5.23-10) è l'equazione algebrica caratteristica dello stesso sistema.

L'equazione (5.23-10) è biquadratica in λ e le sue due radici risultano essere le seguenti:

$$\lambda^2_{1,2} = -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 \pm \sqrt{[(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2]^2 - (\Omega_1^2\Omega_2^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2)} =$$
$$= -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 \pm \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2}$$

Poiché il discriminante è maggiore di zero e minore di $[(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2]^2$, le due radici risultano reali e negative.
Posto:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= -\omega_1^2 = -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 + \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2} \\ \lambda_2^2 &= -\omega_2^2 = -(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2 - \sqrt{[(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2} \end{aligned} \qquad (5.23\text{-}10')$$

con ω_1 e ω_2 reali e positive ed $\omega_1 < \omega_2$, le quattro radici della equazione caratteristica risultano date da:

$$\lambda_1 = \pm i\omega_1$$
$$\lambda_2 = \pm i\omega_2$$

A ciascuna di queste radici corrisponde un integrale particolare del tip (5.23-4): l'integrale generale del sistema (5.23-3) sarà quindi dato da:

$$\begin{cases} x_1(t) &= C_{11}e^{i\omega_1 t} + C_{12}e^{-i\omega_1 t} + C_{13}e^{i\omega_2 t} + C_{14}e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= C_{21}e^{i\omega_1 t} + C_{22}e^{-i\omega_1 t} + C_{23}e^{i\omega_2 t} + C_{24}e^{-i\omega_2 t} \end{cases} \qquad (5.23\text{-}11$$

Tenendo presenti le formule di Eulero si potrà scrivere in definitiva:

$$\begin{cases} x_1(t) &= A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \\ x_2(t) &= A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_{21}) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_{22}) \end{cases} \qquad (5.23\text{-}12$$

Da queste relazioni si deduce che il moto libero di ciascuna delle du masse m_1 ed m_2 è somma di due moti armonici di pulsazione ω_1 ed ω rispettivamente.

Noti i valori di Ω_1^2, Ω_2^2, Ω_{13}^2, Ω_{23}^2, dati dalle (5.23-7), i valori di ω_1^2 ed ω possono essere ricavati graficamente con la costruzione riportata i fig.5.23–4, analoga a quella del cerchio di Mohr relativo a stati tensiona piani.

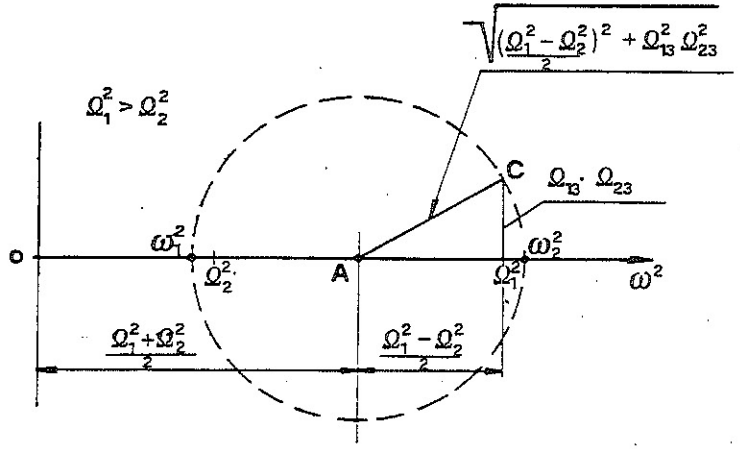


Fig.5.23–4

Riportati sull'asse ω^2, in una prefissata scala, i valori di Ω_1^2 ed Ω_2^2, s individua il punto medio A del segmento $\Omega_1^2\Omega_2^2$.

Il segmento OA rappresenta il valore di $(\Omega_1^2+\Omega_2^2)/2$, mentre il segment $A\Omega_1^2$ rappresenta, sempre nella scala adottata, il valore $(\Omega_1^2-\Omega_2^2)/2$.

Riportato per il punto Ω_1^2 il segmento pari a $\Omega_{13} \cdot \Omega_{23}$, normale all'asse delle ω^2, il segmento AC rappresenta il valore:

$$AC = \sqrt{\left(\frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2}\right)^2 + \Omega_{13}^2 \Omega_{23}^2}$$

La circonferenza di centro A e raggio pari ad AC individua, sull'asse ω^2, i valori di ω_1^2 e ω_2^2.

In figura si è supposto $\Omega_1^2 > \Omega_2^2$, ma la costruzione è analoga per $\Omega_1^2 < \Omega_2^2$.

Dall'esame della fig.5.23–4 si deduce che per $\Omega_1 > \Omega_2$ risulta:

$$\omega_1 < \Omega_2 < \Omega_1 < \omega_2 \qquad (5.23\text{-}13)$$

Analogamente si deduce che per $\Omega_2 > \Omega_1$ risulta:

$$\omega_1 < \Omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 \qquad (5.23\text{-}14)$$

Il valore della pulsazione ω_1 è quindi in ogni caso più basso dei valori Ω_1 ed Ω_2, mentre il valore di ω_2 risulta essere sempre più grande dei suddetti valori.

b) La determinazione delle costanti di integrazione

Riprendendo in esame le (5.23-12), si osserva che in queste relazioni compaiono otto costanti di integrazione, A_{ij} e ϕ_{ij} (i e $j = 1, 2$); per la loro determinazione è necessario scrivere otto relazioni indipendenti, che le legano.

Quattro di queste relazioni si ottengono fissando le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = x_{1,0} & x_2(0) = x_{2,0} \\ \dot{x}_1(0) = v_{1,0} \quad ; & \dot{x}_2(0) = v_{2,0} \end{array}$$

Le altre quattro relazioni debbono necessariamente essere caratteristiche del sistema e si determinano nel modo seguente.

Poiché ciascuno dei due moti armonici, che compaiono nelle (5.23-12), costituisce un integrale particolare delle equazioni del moto, ognuna di queste equazioni deve essere soddisfatta da ciascuno dei moti suddetti.

Prendendo in considerazione l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) \end{cases} \qquad (5.23\text{-}15)$$

e sostituendo questi valori nella prima delle (5.23-3) si ottiene:

$$-m_1\omega_1^2 A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) + k_{11} A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) +$$
$$+k_{12} A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = 0$$

e quindi:

$$A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) / A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = -k_{12}/(k_{11} - m_1\omega_1^2)$$

Dividendo per m_1 numeratore e denominatore della frazione a s membro di questa relazione e ricordando le (5.23-7), si può scrivere

$$A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) / A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2) \qquad (5$$

Essendo il secondo membro della (5.23-16) costante, le due gr armoniche, che figurano a primo membro della stessa relazione, d essere in fase tra loro, risultando così:

$$\phi_{11} = \phi_{21} + 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

(

$$A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2)$$

Analogamente sostituendo nella prima delle (5.23-3) l'integrale lare:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \\ x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{22}) \end{cases} \qquad (5$$

si ottiene:

$$A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) / A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{22}) = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2) \qquad (5$$

Essendo il secondo membro di questa relazione costante dovr essere:

$$\phi_{12} = \phi_{22} + 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$
$$A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2)$$

Le (5.23-17) e le (5.23-20) sono le quattro relazioni che, aggi condizioni iniziali, permettono il calcolo delle otto costanti di inte

Posto:

$$\alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2)$$
$$\alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{13}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2)$$
$$\phi_{11} = \phi_{21} = \phi_1 \quad ; \quad \phi_{12} = \phi_{22} = \phi_2$$

l'integrale generale (5.23-12) si può infine scrivere:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = (A_{11}/\alpha_1)\cos(\omega_1 t + \phi_1) + (A_{12}/\alpha_2)\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad (5.23\text{-}22)$$

e le quattro costanti di integrazione che vi compaiono (A_{11}, A_{12}, ϕ_1 e ϕ_2) sono determinate dalle quattro condizioni iniziali.

c) I modi di vibrare del sistema

Da quanto precede si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) Il moto libero $x_1(t)$ e $x_2(t)$ di ciascuna delle due masse m_1 ed m_2 del sistema è somma di due moti armonici di diversa pulsazione e risulta pertanto non armonico ed in genere non periodico.
Ciascuno di questi moti armonici viene chiamato modo di vibrare del sistema.

2°) Ogni modo di vibrare del sistema è caratterizzato, oltre che dal valore della pulsazione naturale, dal rapporto tra le ampiezze di oscillazione delle due masse.
Indicando come *primo modo di vibrare* quello a pulsazione più bassa ω_1 e *secondo modo di vibrare* quello a pulsazione ω_2, le grandezze che li caratterizzano sono date da:
1° modo di vibrare

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)/2 - \sqrt{[(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{1s}^2\Omega_{2s}^2}} \\ \alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{1s}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2) \end{cases}$$

2° modo di vibrare

$$\begin{cases} \omega_2 = \sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)/2 + \sqrt{[(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)/2]^2 + \Omega_{1s}^2\Omega_{2s}^2}} \\ \alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{1s}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2) \end{cases}$$

3°) Tenendo presente le disuguaglianze (5.23-13) e (5.23-14), si deduce che:

$$\alpha_1 = A_{11}/A_{21} = \Omega_{1s}^2/(\Omega_1^2 - \omega_1^2) > 0$$
$$\alpha_2 = A_{12}/A_{22} = \Omega_{1s}^2/(\Omega_1^2 - \omega_2^2) < 0$$

e queste relazioni stanno ad indicare che il primo modo di vibrare (a pulsazione ω_1 più bassa) è caratterizzato dalla circostanza che le due

masse si muovono in ogni istante nello stesso verso, ma in general diversa velocità (diversa ampiezza ed uguale frequenza).
Il secondo modo di vibrare (a pulsazione ω_2 più elevata) è caratter to invece dalla circostanza che le due masse si muovono in ogni is in verso opposto ed in generale con diversa velocità.

4°) Poiché ciascun modo di vibrare soddisfa separatamente alle equa del moto, se le condizioni iniziali sono opportunamente scelte, il sis oscilla secondo un particolare modo e quindi con legge armonica. Si dimostra che le condizioni iniziali, alle quali corrisponde una lazione libera costituita da un solo modo di vibrare, sono quell soddisfano alle relazioni:

$$1° \text{ modo di vibrare} = \begin{cases} x_{1,0}/x_{2,0} = A_{11}/A_{21} = \alpha_1 \\ v_{1,0}/v_{2,0} = A_{11}/A_{21} = \alpha_1 \end{cases}$$

$$2° \text{ modo di vibrare} = \begin{cases} x_{1,0}/x_{2,0} = A_{12}/A_{22} = \alpha_2 \\ v_{1,0}/v_{2,0} = A_{12}/A_{22} = \alpha_2 \end{cases}$$

I due modi di vibrare del sistema sono spesso rappresentati tracciar linee elastiche normali (v. fig.5.23–5).

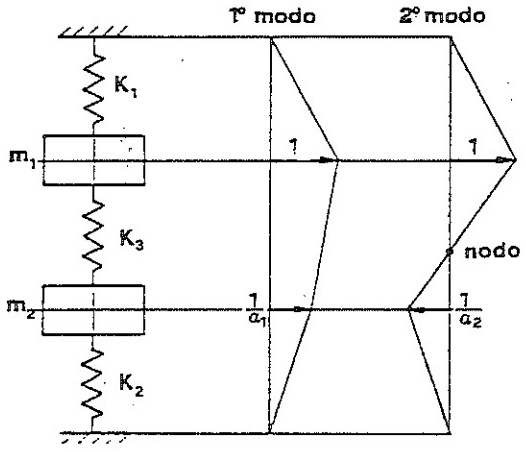


Fig.5.23–5

Queste particolari linee elastiche risultano definite imponendo la dizione (condizione di normalizzazione) che l'ampiezza di vibrazione massa m_1 nei due modi di vibrare sia pari ad uno:

$$A_{11} = A_{12} = 1$$

Restano così fissati i valori delle ampiezze di vibrazione della massa m_2:

$$1^\circ \text{ modo di vibrare} \quad : \quad A_{21} = 1/\alpha_1 > 0$$

$$2^\circ \text{ modo di vibrare} \quad : \quad A_{22} = 1/\alpha_2 < 0$$

È interessante notare che il secondo modo di vibrare è caratterizzato dalla presenza di un nodo di oscillazione, cioè di una sezione dell'elemento elastico, che accoppia le due masse, che non oscilla.

5.24 Oscillazioni forzate in assenza di smorzamento

Se sulle due masse m_1 ed m_2 del sistema di fig.5.23–1 agiscono forze eccitanti $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, il sistema compie un moto forzato.

Le equazioni del moto forzato del sistema sono:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = f_2(t) \end{cases} \tag{5.24-1}$$

Se le azioni forzanti sono funzioni periodiche del tempo, essendo il sistema lineare, è possibile determinare separatamente i moti forzati del sistema, eccitati da ciascuna delle componenti armoniche delle azioni forzanti: il moto del sistema si otterrà sovrapponendo gli effetti così calcolati.

Si supponga, pertanto, che su una delle masse del sistema, p.es. la m_1, agisca una forza armonica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (v. fig.5.24–1).

Le equazioni del moto (5.24-1) diventano:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{5.24-2}$$

L'integrale generale del sistema sarà del tipo:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1l} + x_{1f} \\ x_2(t) = x_{2l} + x_{2f} \end{cases}$$

dove x_{1l} ed x_{2l} rappresentano l'integrale generale del sistema omogeneo e quindi l'oscillazione libera, mentre x_{1f} ed x_{2f} rappresentano l'integrale particolare del sistema (5.24-2) e quindi l'oscillazione forzata, eccitata dalla forza $F_0 \cos \omega t$.

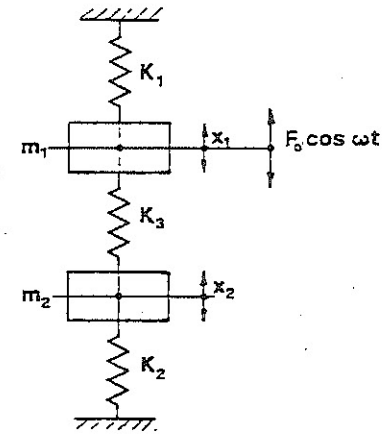


Fig.5.24–1

L'integrale particolare suddetto è del tipo:

$$\begin{cases} x_{1f} = X_1 \cos \omega t \\ x_{2f} = X_2 \cos \omega t \end{cases}$$

e il moto forzato di ciascuna delle due masse è un moto armonico sazione pari a quella della causa eccitante.

Sostituendo le (5.24-3) nelle equazioni del moto (5.24-2) ed ordin X_1 ed X_2 si ottiene:

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + k_{11})X_1 + k_{12}X_2 = F_0 \\ (k_{21}X_1 + (-m_2\omega^2 + k_{22})X_2 = 0 \end{cases}$$

Le (5.24-4) costituiscono un sistema di due equazioni algebriche n incognite X_1 ed X_2.

Dividendo la prima delle (5.24-4) per m_1 e la seconda per m_2 e t presenti le (5.23-7), si ottiene:

$$\begin{cases} (\Omega_1^2 - \omega^2)X_1 - \Omega_{13}^2 X_2 = F_0/m_1 \\ -\Omega_{23}^2 X_1 + (\Omega_2^2 - \omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

Indicando con Δ il determinante dei coefficienti del sistema (5.24

$$\Delta = (\Omega_1^2 - \omega^2)(\Omega_2^2 - \omega^2) - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2$$

si potrà scrivere:

$$\begin{cases} X_1 = (F_0/m_1)(\Omega_2^2 - \omega^2)/\Delta \\ X_2 = (F_0/m_1)\Omega_{23}^2/\Delta \end{cases} \qquad (5.24\text{-}7)$$

D'altra parte gli spostamenti $x_{1,st}$ e $x_{2,st}$, che subiscono le due masse del sistema per l'applicazione statica su m_1 di una forza pari ad F_0, si ottengono dalle (5.24-2) ponendo:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0 \quad ; \quad x_1 = x_{1,st} \quad ; \quad x_2 = x_{2,st}$$

Si avrà pertanto:

$$\begin{cases} k_{11}x_{1,st} + k_{12}x_{2,st} = F_0 \\ k_{21}x_{1,st} + k_{22}x_{2,st} = 0 \end{cases} \qquad (5.24\text{-}8)$$

Dividendo la prima di queste equazioni per m_1 e la seconda per m_2 e tenendo presenti le (5.23-7) si ottiene:

$$\begin{cases} \Omega_1^2 x_{1,st} - \Omega_{13}^2 x_{2,st} = F_0/m_1 \\ -\Omega_{23}^2 x_{1,st} + \Omega_2^2 x_{2,st} = 0 \end{cases} \qquad (5.24\text{-}9)$$

e quindi:

$$\begin{cases} x_{1,st} = \dfrac{F_0}{m_1} \cdot \dfrac{\Omega_2^2}{\Delta_{st}} \\ x_{2,st} = \dfrac{F_0}{m_1} \cdot \dfrac{\Omega_{23}^2}{\Delta_{st}} \end{cases} \qquad (5.24\text{-}10)$$

avendo indicato con Δ_{st} il determinante dei coefficienti del sistema (5.24-9):

$$\Delta_{st} = \Omega_1^2\Omega_2^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{23}^2$$

Tenendo presenti le (5.24-7) e le (5.24-10), è possibile ricavare i rapporti $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$:

$$\begin{cases} X_1/x_{1,st} = \dfrac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_2^2} \cdot \dfrac{\Delta_{st}}{\Delta} \\ X_2/x_{2,st} = \dfrac{\Delta_{st}}{\Delta} \end{cases} \qquad (5.24\text{-}11)$$

Le (5.24-11) permettono di tracciare le curve $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$ in funzione di ω (v. fig.5.24–2).

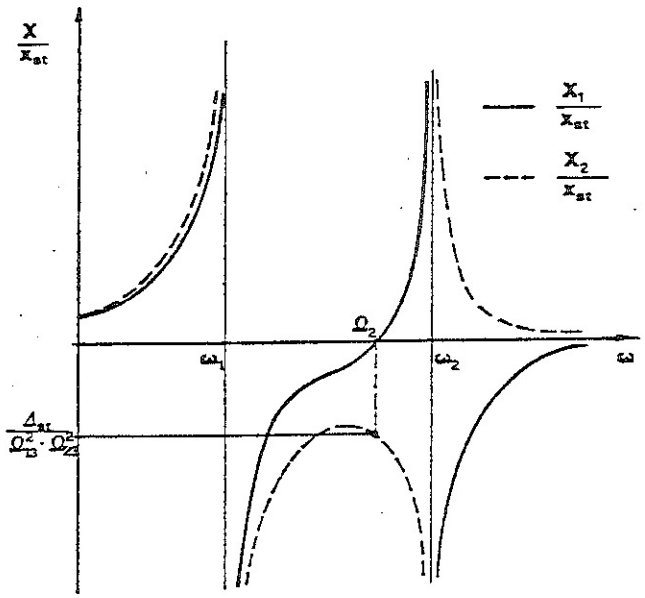


Fig.5.24–2

A questo scopo basta tener presente che:

1°) per $\omega = 0$: $\Delta = \Delta_{st}$; $X_1/x_{1,st} = X_2/x_{2,st} = 1$
2°) per $\omega \to \omega_1$, e per $\omega \to \omega_2$: $\Delta \to 0$ e $X_1/x_{1,st}$ e $X_2/x_{2,st}$
3°) per $\omega = \Omega_2$: $X_1/x_{1,st} = 0$; $X_2/x_{2,st} = -\Delta_{st}/\Omega_{13}^2 \cdot \Omega_{23}^2$
4°) per $\omega \to \infty$: $X_1/x_{1,st} \to 0$; $X_2/x_{2,st} \to 0$

È interessante notare che per $\omega = \Omega_2$ la massa m_1, sulla quale forza eccitante, resta ferma ($x_1 = 0$), mentre per la massa m_2 risu (5.24-11) e (5.24-10):

$$X_2 = x_{2,st} \cdot \Delta_{st}/\Delta = -\frac{F_0}{m_1} \cdot \frac{\Omega_{23}^2}{\Omega_{13}^2\Omega_{23}^2} = -\frac{F_0}{K_3}$$

La (5.24-12) esprime la circostanza che la massa m_2 oscilla in m che la reazione della molla K_3 fa in ogni istante equilibrio alla f agente sulla massa m_1:

$$K_3 x_2(t) = K_3 X_2 \cos\omega t = F_0 \cos\omega t$$

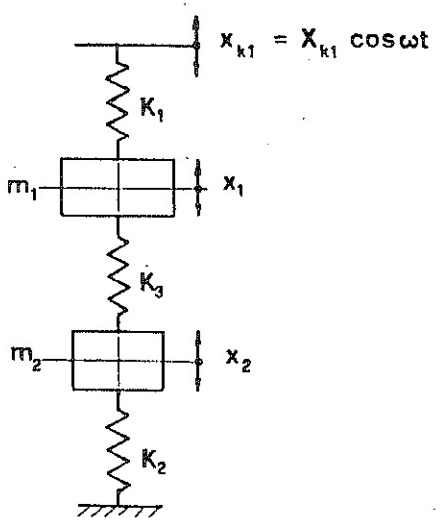


Fig.5.24–3

Anche nel caso in esame l'oscillazione forzata può essere eccitata imponendo, ad uno o ad entrambi gli estremi del sistema, un moto periodico.

Nell'ipotesi che l'estremo della molla K_1 vibri (v. fig.5.24–3) con legge armonica:

$$x_{K_1}(t) = X_{K_1} \cos \omega t$$

le equazioni del moto del sistema risultano essere le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + K_1(x_1 - x_{K_1}) + K_3(x_1 - x_2) = 0 \\ m_1 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 + K_3(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Tenendo presenti le (5.23-2) si può scrivere:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = K_1 x_{K_1} = K_1 X_{K_1} \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0 \end{cases}$$

e le equazioni del moto risultano essere quelle di un moto eccitato da una forza armonica applicata su m_1, di ampiezza $F_0 = K_1 X_{K_1}$ e pulsazione ω.

Il moto forzato del sistema è quindi dato per le (5.24-3) e (5.24-7):

$$\begin{cases} x_{1f} = X_1 \cos \omega t \\ x_{2f} = X_2 \cos \omega t \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} X_1 = K_1 X_{K_1}(\Omega_2^2 - \omega^2)/m_1 \Delta \\ X_2 = K_1 X_{K_1} \Omega_{23}^2 / m_1 \Delta \end{cases}$$

È da notare tra l'altro che anche in questo caso risulterà $X_1 =$ $\omega = \Omega_2$.

5.25 Esempio di applicazione: smorzatori dinamici

Per contenere entro limiti accettabili le vibrazioni forzate di un sis meccanico, si fa spesso ricorso ad uno smorzatore dinamico.

Questo tipo di smorzatore è costituito essenzialmente da un sistema liario massa–molla, che, collegato al sistema vibrante, provoca una att zione o smorzamento delle vibrazioni forzate di quest'ultimo: il prin di funzionamento di uno smorzatore dinamico è, come si vedrà, comp mente diverso da quello degli smorzatori di tipo viscoso.

A questo scopo si supponga che il sistema sottoposto ad oscilla forzate sia il sistema ad 1 grado di libertà (M, K) di fig.5.25–1 e cl esso sia collegato lo smorzatore dinamico (m, k).

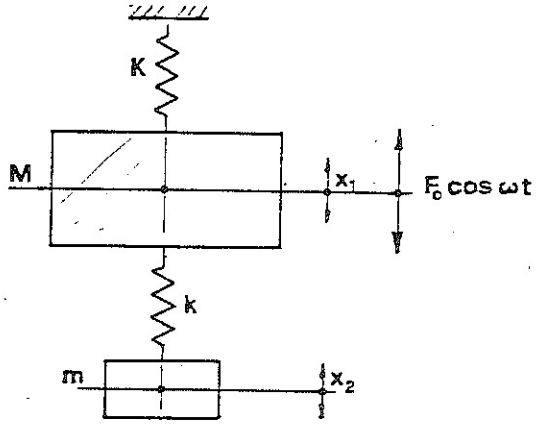


Fig.5.25–1

Con l'applicazione di quest'ultimo, il sistema vibrante diviene a due di libertà e ad esso possono essere applicati i risultati ottenuti nel para precedente.

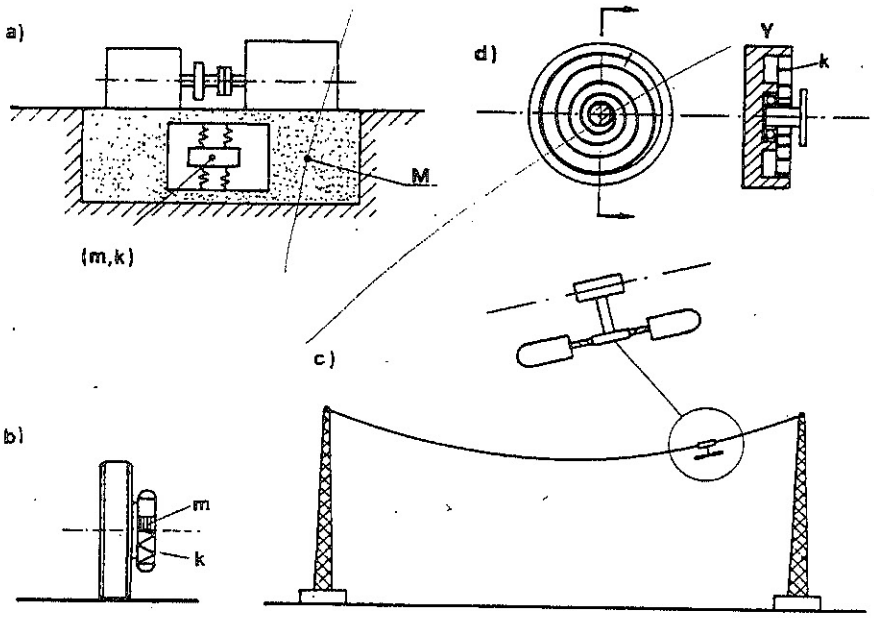


Fig.5.25–2

Ricordando che per $\omega = \Omega_2$ risulta:

$$\begin{cases} X_1 &= 0 \\ X_2 &= -F_0/K_s \end{cases}$$

e tenendo presente che dal confronto delle figg. 5.24–1 e 5.25–1 risulta:

$$m_1 = M \quad ; \quad m_2 = m$$
$$K_1 = K \quad ; \quad K_2 = 0 \quad ; \quad K_s = k$$

Si deduce quindi che per:

$$\omega = \Omega_2 = \sqrt{k_{22}/m_2} = \sqrt{k/m} \qquad (5.25\text{-}1)$$

risulta:

$$\begin{cases} x_{1f} = 0 \\ x_{2f} = -F_0 \cos \omega t/k \end{cases}$$

Questo risultato sta ad indicare che lo smorzatore dinamico (m, k) annulla l'oscillazione forzata della massa M, se la sua pulsazione naturale, $\omega_s = \sqrt{k/m}$, eguaglia la pulsazione della causa eccitante $F_0 \cos \omega t$.

In tali condizioni ($\omega = \omega_s$) la massa m dello smorzatore oscilla in sizione di fase con la causa eccitante, determinando una reazione (dell'elemento elastico k, che bilancia istante per istante la $F_0 \cos \omega t$.

Nota la pulsazione ω della causa eccitante, la determinazione dei della massa m e della rigidità k dello smorzatore si ottiene associand (5.25-1) la relazione che fissa il valore del rapporto r ($r < 1$) tra la m dello smorzatore e la massa nota M del sistema da smorzare:

$$\omega = \omega_s = \sqrt{k/m}$$

$$m/M = r$$

Smorzatori del tipo descritto sono usati per attenuare le vibrazioni fo dei basamenti industriali (v. fig.5.25–2,a), delle ruote di un autov (v. fig.5.25–2,b), le vibrazioni autoeccitate dei conduttori delle linee a tensione (smorzatori Stockbridge, v. fig.5.25–2,c), le oscillazioni tors nei motori a c.i. (v. fig.5.25–2,d).

5.26 Sistemi ad n gradi di libertà

Si riprenda in esame il sistema conservativo a due gradi di libertà presentato in fig.5.23–1 e si riscrivano le corrispondenti equazioni del libero (5.23-3):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0 \end{cases} \qquad (5$$

Il sistema di equazioni differenziali (5.23-1) può essere scritto in matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (5$$

ed in forma simbolica:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad (5$$

dove:

$[m] =$ matrice diagonale 2×2 delle masse $= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

$[k] =$ matrice simmetrica $(k_{12} = k_{21})$ 2×2 dei coefficienti di rigidità $= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$

$\{\ddot{x}\} =$ matrice colonna $2 \times 1 = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$

$\{x\} =$ matrice colonna $2 \times 1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$

Per un sistema ad n gradi di libertà le equazioni del moto coincidono formalmente con le (5.26-2), essendo:

$[m] =$ matrice diagonale $n \times n$ delle masse $m_i =$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & & \cdots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

$[k] =$ matrice simmetrica $n \times n$ dei coefficienti di rigidità $=$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \text{sim} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{\ddot{x}\} =$ vettore colonna $n \times 1$ delle accelerazioni $\ddot{x}_i$

$\{x\} =$ vettore colonna $n \times 1$ degli spostamenti x_i.

Le (5.26-2) valgono quindi per qualsiasi sistema discreto conserva
interessante osservare che, scritta l'equazione del moto libero per un s
ad 1 grado di libertà:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (5$$

le (5.26-2) si ottengono semplicemente aggiungendo alla (5.12-1) i s
di matrice.

A questa identità formale del modello matematico si accompagn
analogia di comportamento dinamico di maggior rilievo.

Per un sistema ad n gradi di libertà si può infatti affermare che:

1°) il moto libero $x_i(t)$ di ciascuna delle masse m_i del sistema è in ge
somma di n moti armonici di pulsazione ω_j $(j = 1, 2, ..., n)$: ci
di questi moti armonici viene chiamato *modo di vibrare del sist*

2°) ogni *modo di vibrare del sistema* è caratterizzato oltre che dal
sazione ω_j, da una particolare linea elastica normale: sono cioè
minati i valori dei rapporti:

$$u_{ij} = A_{ij}/A_{1j}$$

tra l'ampiezza A_{ij} della massa i–esima e l'ampiezza della mass

3°) ordinati i valori di ω_j in modo che risulti:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 ..... < \omega_n$$

la pulsazione ω_1 più bassa viene chiamata pulsazione fondament
sistema: questo modo di vibrare è caratterizzato dal fatto ch
masse del sistema si muovono tutte nello stesso verso e pert
corrispondente linea elastica normale non presenta nodi.
Nel secondo modo di vibrare le masse del sistema si dividono
gruppi; le masse di ciascun gruppo si muovono nello stesso vers
due gruppi si muovono in verso opposto.
Questo modo di vibrare presenta un nodo di oscillazione, ci
sezione che non partecipa alla vibrazione e che separa i due
suddetti.
In generale si può affermare che il modo j–esimo di vibrare,
sazione ω_j, presenta $(j-1)$ nodi, ciascuno dei quali separa gr
masse che oscillano in versi opposti.
In fig.5.26–1 sono riportate, a titolo esemplificativo, le linee el
normali di un sistema a quattro gradi di libertà.

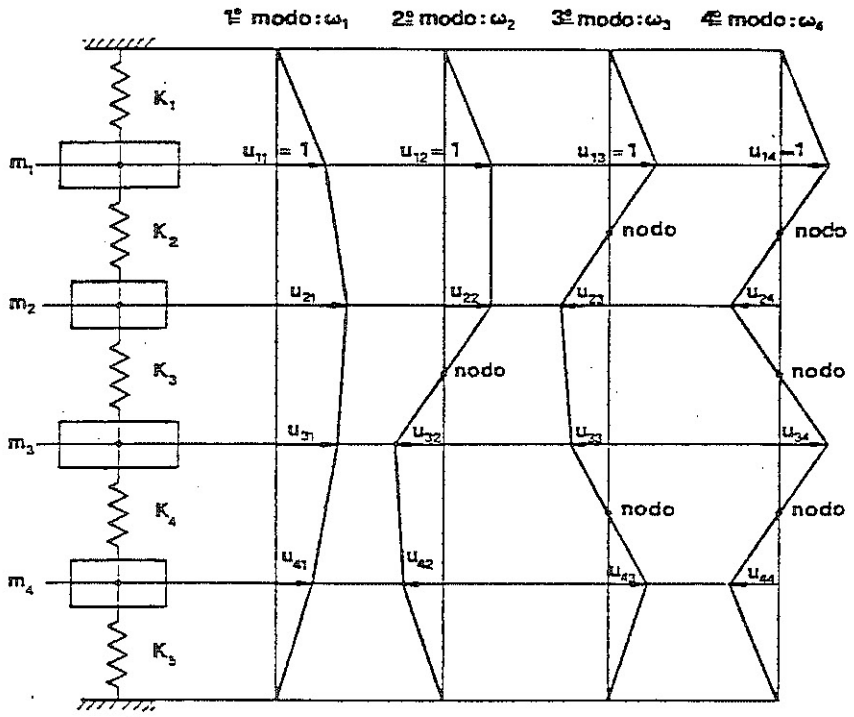


Fig.5.26–1

4°) Se un sistema ad n gradi di libertà è eccitato a vibrare da forze armoniche della stessa pulsazione ω, tutte le masse del sistema oscillano con legge armonica di pulsazione ω.
Al variare di ω si manifestano n fenomeni di risonanza, ciascuno dei quali caratterizzato dal fatto che $\omega = \omega_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$. In prossimità di ciascuna risonanza il sistema oscilla con una linea elastica praticamente simile a quella del modo di vibrare in risonanza con le cause eccitanti.