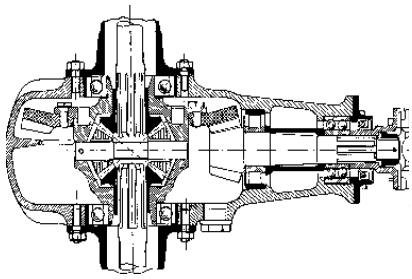
APPUNTI PER IL CORSO

DI

ELEMENTI DI MECCANICA

TEORICA ED APPLICATA

(prof. ing. R. Monastero)



Indice

Introduzione ix
Suddivisione del corso xi

Capitolo I - Richiami sui vettori liberi 1

Capitolo II – Vettori applicati

§ 1 – Momento di un vettore applicato 7
§ 2.- Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta 9
§ 3.- Sistemi di vettori applicati 10
§ 4. - Asse centrale 12
§ 5.- Trinomio invariante 14
§ 6. - Momento minimo 15

Capitolo III – Equivalenza di due sistemi di vettori applicati.

§ 1.- Definizione di sistemi equivalenti 17
§ 2.- Composizione e scomposizione di vettori 18
§ 3.- Riduzione di un sistema di vettori 21
§ 4.- Equivalenza a zero 23
§ 5. - Sistemi di vettori paralleli 24

Capitolo IV – Derivate di punti e vettori.

§ 1.- Derivata di un punto 29
§ 2.- Derivata di un vettore libero 30
§ 3 - Formula di Fernet 31

Capitolo V – Nozioni fondamentali di cinematica.

§ 1.- Posizione di un punto 34
§ 2.- Velocità di un punto 35
§ 3.-Accelerazione di un punto 36
§ 4.- I moti rigidi 38

§ 5. - Formule di Poisson 40
§ 6.- Formula fondamentale dei moti rigidi. Asse del Mozzi 41
§ 7.- Moto composto di un punto 43

Capitolo VI – Membri, coppie, contatti, meccanismi.

§ 1. - Membri di una macchina..... 47
§ 2. - Il moto in una macchina..... 48
§ 3. - Le coppie 49
§ 4. - Classificazione delle coppie..... 49
§ 5. - Tipi di contatto fra le superfici di una coppia 50
§ 6. - Coppie inferiori e superiori..... 54
§ 7. - Catene cinematiche 55
§ 8. – Meccanismi 56
§ 9. - Gradi di libertà di un meccanismo piano 57

Capitolo VII – Cinematica dei sistemi rigidi piani – Le velocità.

§ 1. - Distribuzione delle velocità nei sistemi rigidi piani..... 59
§ 2. - Applicazioni grafiche..... 63
§ 3. - Profili coniugati 64
§ 4. - Calcolo delle velocità per un rigido in moto composto 66
§ 5. - Applicazioni sui moti composti 71
§ 6. - Polare fissa e polare mobile..... 73
§ 7. - Velocità del punto di contatto fra le polari 74
§ 8. - Formula di Eulero-Savary e profili coniugati..... 78

Capitolo VIII - Cinematica dei sistemi rigidi piani – Le accelerazioni.

§ 1. - Distribuzione delle accelerazioni nei sistemi rigidi piani..... 83
§ 2. - Applicazioni grafiche..... 87
§ 3. - Il centro delle accelerazioni 91
§ 4. - Accelerazione del centro delle velocità 94
§ 5. - Circonferenza dei flessi e di stazionarietà..... 96
§ 6. - Punto di flesso della normale alla traiettoria di un punto..... 100
§ 7. - Circonferenza dei regressi..... 102
§ 8. - Esempio di determinazione del centro delle accelerazioni 104
§ 9. - Le accelerazioni nei moti composti. Teorema di Coriolis..... 106

Capitolo IX - I meccanismi piani.

§ 1.- Il quadrilatero articolato piano..... 110
§ 2.- Il manovellismo di spinta..... 115
§ 3.- La guida di Fairbairn..... 117
§ 4. - Il meccanismo a corsoio oscillante 121
§ 5. - Guida di Fairbairn modificata del I tipo..... 122

§ 6. - Guida di Fairbairn modificata del II tipo 126
§ 7. - Guida di Fairbairn modificata del III tipo..... 128
§ 8. - Meccanismi con contatti di puro rotolamento..... 129
§ 9. - Meccanismi con contatti di strisciamento 139

Capitolo X – Ruote dentate e rotismi.

§ 1.- Ruote di frizione 149
§ 2.- Le ruote dentate piane ad evolvente 152
§ 3.- Le ruote cilindriche a denti elicoidali 157
§ 4.- Le ruote coniche 160
§ 5.- Vite senza fine e ruota a denti elicoidali..... 162
§ 6.- Rotismi ordinari..... 166
§ 7.- Rotismi epicicloidali..... 170
§ 8.- Applicazioni 172

Capitolo X I – I fondamenti della meccanica.

§1 - Postulato d'inerzia e definizione di forza..... 177
§ 2 - Postulato del parallelogramma delle forze..... 178
§ 3 - Postulato di Galilei e nozione di massa 178
§ 4 - Principio di azione e reazione..... 179
§ 5 - Lavoro di una forza 180
§ 6 - Forze posizionali 182
§ 7 - Forze conservative e potenziale..... 183
§ 8 - Nota: integrazione grafica..... 185

Capitolo XII – Le forze e l'equilibrio dei sistemi.

§ 1.- Classificazione delle forze..... 189
§ 2.- Spostamenti virtuali e lavoro virtuale 192
§ 3.- Analisi dei vincoli in assenza di attrito 193
§ 4.- Equilibrio dei sistemi..... 197
§ 5.- Il Principio dei lavori virtuali 199

Capitolo XIII – Le forze vincolari in presenza di attrito.

§ 1.- Contatti puntiformi o lineari con attrito asciutto..... 201
§ 2 - Applicazione alle coppie rigide superiori 204
§ 3 - Coppie rotoidali..... 210
§ 4 - Contatti di rotolamento..... 214
§ 5. - Reazioni vincolari con attrito radente e volvente..... 216

Capitolo XIV – Azioni nei contatti di combaciamento.

§ 1. - Ipotesi del Reye e sue applicazioni..... 221

§ 2. - Coppia rotoidale portante 223
§ 3. - Freno a tamburo ad accostamento rigido 225
§ 4. - Freni a tamburo ad accostamento semilibero 234
§ 5. - Coppia rotoidale portante-spingente 236
§ 6. - Freni a disco ad accostamento rigido 239
§ 7. - Freni a disco ad accostamento semilibero 248
§ 8. - Altre applicazioni dell'ipotesi del Reye 250
Appendice 261

Capitolo XV – Trasmissione con organi flessibili.

§ 1.- Struttura delle funi 278
§ 2.- Proprietà elastiche e flessibilità 279
§ 3. – Equilibrio di un flessibile libero sospeso agli estremi 283
§ 4.- Equazioni di equilibrio del flessibile in moto 287
§ 5. - Trasmissioni di potenza con funi o cinghie 289
§ 6. - Rapporto di trasmissione 296
§ 7. – Rendimento 297
§ 8. - Variazione della tensione lungo i rami liberi del flessibile in moto 298
§ 9. - Sistemi di forzamento 300
§ 10. - Rigidezza di funi e cinghie 307
§ 11. – Carrucole e paranchi 311

Capitolo XVI – Geometria delle masse.

§ 1.- Baricentro 321
§ 2.- Calcolo del baricentro di un sistema continuo 323
§ 3.- Momento d'inerzia 328
§ 4.- Teorema di Huygens 329
§ 5.- Ellissoide d'inerzia 331
§ 5.- Momenti principali d'inerzia 333

Capitolo XVII – Le azioni d'inerzia.

§ 1. – Principio di D'Alembert 337
§ 2.- Risultante delle forze d'inerzia 338
§ 3. - Momento risultante delle forze d'inerzia 339
§ 4.- Azioni d'inerzia nel manovellismo di spinta 345
§ 5. - Equilibramento del monocilindro 352
§ 6. - Equilibramento dei pluricilindri 354
§ 7. – Applicazioni 358

Capitolo XVIII – Dinamica applicata

§ 1.- Le equazioni cardinali 363
§ 2.- Ricerca delle reazioni vincolari 365

§ 3. - Energia cinetica 368
§ 4 .- Energia cinetica di un monocilindro 371
§ 5. - Teorema dell'energia cinetica..... 375
§ 6. - Equazione dell'energia 377
§ 7. – Uniformazione 380
Appendice..... 363

Capitolo XIX – Le vibrazioni meccaniche

§ 1. – Introduzione..... 371
§ 2. - Richiami di cinematica del moto armonico 374
§ 3. - Moti periodici non armonici 375
§ 4. - Composizione di moti armonici..... 376
§ 5. - Lavoro di una forza in un moto armonico..... 381
§ 6. - Le caratteristiche elastiche e la loro combinazione 382
§ 7. - Vibrazioni libere senza smorzamento..... 386
§ 8. - Vibrazioni di masse su sopporti elastici 390
§ 9. - Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà..... 392
§ 10 - Vibrazioni libere con smorzamento viscoso 406
§ 11 - Vibrazioni forzate senza smorzamento..... 418
§ 12 - Vibrazioni forzate con smorzamento di tipo viscoso..... 425
§ 13 - Isolamento dalle vibrazioni..... 433
§ 14 - Vibrazioni di sistemi su sopporto mobile 440
§ 15 - Sismografi e accelerometri 443
Appendice..... 449

INTRODUZIONE

La Meccanica applicata si occupa dello studio meccanico delle macchine ossia di quei sistemi di corpi costruiti per il raggiungimento di una prefissata finalità.

Il reale significato di una tale definizione, apparentemente del tutto banale, sarà tuttavia chiaro solo dopo aver acquisito sia il concetto di macchina, in senso meccanico, sia il che cosa si debba intendere per studio meccanico di una macchina.

In termini meccanici, si definisce **macchina** un sistema (generalmente deformabile) che, a prescindere dalla sua destinazione pratica, sia stato costruito con la finalità di compiere un lavoro, e che sia costituito da parti (tutte solide oppure alcune anche fluide) fra le quali risulti definito il moto relativo.

Ogni macchina, quindi, concepita come un sistema di corpi collegati fra loro, si caratterizza per il fatto che è possibile una **trasmissione di energia** dall'uno all'altro dei corpi stessi: **trasmissione**, quindi, se ci si riferisce ad energia meccanica, **di moto e delle forze** necessarie per realizzarlo. Conviene sottolineare subito, però, che, nel parlare di trasmissione di energia, non si fa riferimento ad una particolare forma di energia, né è da intendersi che la forma di energia che si trasmette attraverso le varie parti della macchina sia sempre la medesima; in una macchina, anzi, si è sempre in presenza di *trasformazioni di energia*, se non altro per la inevitabile presenza di fenomeni dissipativi legati al suo stesso funzionamento ed ai quali si associa, in modo altrettanto inevitabile, una trasformazione da un tipo di energia, qualunque esso sia, in energia di tipo termico.

Lo **studio meccanico** di una macchina ha i suoi due grossi momenti nello studio del moto relativo fra le sue diverse parti e nella analisi delle forze in giuoco durante il suo funzionamento; lo scopo è soprattutto quello di ricercare i modi più efficaci per rendere minimo il disavanzo fra il lavoro motore ed il lavoro resistente utile, ossia quello di **rendere massimo il rendimento** della macchina.

La trasmissione di energia attraverso le varie parti di una macchina, ossia la trasmissione di forze e relativi spostamenti, è possibile per la presenza dei **vincoli**, che consistono in quegli accorgimenti costruttivi destinati a realizzare materialmente la **connessione fra** due o più **elementi della macchina** stessa: al vincolo è devoluta la fondamentale funzione di

condizionare il moto relativo fra due corpi e di consentire fra loro la **mutua trasmissione delle forze**.

Attraverso l'analisi di ciò che accade in corrispondenza dei vincoli sarà, quindi, possibile trovare informazioni utili allo studio meccanico di una macchina.

La possibilità di effettuare lo studio di una macchina, in senso meccanico, presuppone l'acquisizione di quegli elementi teorici che permettono di disporre degli strumenti atti allo scopo, ossia le **leggi generali** che governano i fenomeni del moto e di quelli con esso connessi; con questi si potrà affrontare lo studio delle **leggi fondamentali che regolano i movimenti relativi** fra le varie parti che compongono una macchina tenendo conto anche, sia della loro **conformazione**, sia del **modo in cui esse sono collegate**.

La meccanica applicata studia ancora la **natura delle forze agenti** sulle singole parti ed i problemi generali dell'**equilibrio dinamico**; tiene conto dei **materiali costituenti** le varie parti della macchina, per quegli aspetti che possono avere influenza sui fenomeni del moto e della trasmissione delle forze.

L'ampiezza del campo applicativo di una disciplina come la Meccanica applicata si può dedurre esaminando una classificazione delle macchine in base alla loro funzione.

Si hanno:

macchine motrici (o motori) la cui funzione è quella di trasformare una energia, di qualsiasi forma, in energia meccanica; (motori a combustione interna, motori oleodinamici, macchine a vapore, elettriche, a fluido, ecc.).

macchine generatrici la cui funzione è inversa di quella dei motori, e quindi trasformano energia meccanica in una diversa forma di energia; (pompe, compressori, dinamo, alternatori, ecc.).

macchine operatrici che costituiscono la tipologia più vasta ed a cui è devoluto il compito di realizzare specifiche operazioni, diverse dalla pura e semplice trasformazione di energia; (macchine utensili, agricole, tessili, di sollevamento e trasporto, confezionatrici, da ufficio, per la fabbricazione della carta, per la stampa, armi, veicoli, elettrodomestici, manipolatori, macchine per il movimento di terra, ecc.)

Altre macchine, che non hanno una utilità industriale diretta, si possono classificare nel gruppo delle **macchine trasmettitrici**; sono macchine la cui unica funzione è di trasmettere solamente energia meccanica operando tuttavia una trasformazione sui fattori costituenti il lavoro, ossia forze e spostamenti (ingranaggi, trasmissioni a cinghia o a catena, sistemi articolati, camme, ecc.). Queste consentono, una volta accoppiate fra loro, la realizzazione di una qualsiasi altra macchina.

La Meccanica applicata consente sia l'analisi del funzionamento di tutte queste macchine, sia la sintesi (progettazione di base) delle stesse basandosi sulla conoscenza della meccanica del corpo rigido e, per certi versi, anche della meccanica dei continui deformabili, siano essi solidi o fluidi.

Suddivisione del corso

Dalla duplice funzione di una macchina (trasmissione di

moto-trasmissione di forze) discende la classica suddivisione della Meccanica in Cinematica e Dinamica.

La **Cinematica** studia i fenomeni del moto indipendentemente dai fattori che lo hanno determinato o che lo influenzano, ossia indipendentemente dalla presenza di forze o di masse.

Nell'ambito della Cinematica si pongono due distinte categorie di problemi:

- i problemi diretti (o di analisi) in cui, data la macchina e definita la legge del moto di uno dei membri della macchina stessa (assegnandone l'equazione oraria) si ricercano le velocità e le accelerazioni di ogni punto del sistema; in particolare si determineranno i diversi rapporti di trasmissione fra gli elementi della macchina, ossia il rapporto fra le loro velocità angolari.
- i problemi inversi (o di sintesi) in cui, assegnata la legge del moto relativo fra due o più parti che debbano risultare fra loro collegate, si cercano le forme geometriche che a tali parti debbano (o possano) competere affinché quella legge del moto possa essere realizzata.

La **Dinamica** studia invece il moto della macchina tenendo conto delle varie forze agenti sul sistema o sulle sue singole parti (siano queste effettivamente applicate ovvero dipendenti dalla presenza delle masse costituenti il sistema stesso).

Da qui la necessità di articolare la Dinamica in due fasi di ricerca distinte:

a) - l'analisi delle forze operanti sulla macchina; esse si possono presentare, oltre che come forze attive, anche come forze di contatto e, tra queste, interessano particolarmente quelle che nascono quando esiste nei vincoli moto relativo: dipendono dal tipo di contatto che i corpi presentano fra loro, intendendo ciò sia in senso geometrico sia fisico o cinematico (rotolamento, strisciamento, urto); oppure si possono presentare come forze d'inerzia, dipendenti dalla presenza di masse in moto con velocità vettorialmente variabile: queste esistono, cioè, tutte le volte che non si è in presenza di un moto traslatorio uniforme.

Questo tipo di ricerca tende ad individuare le proprietà tipiche delle forze, ossia a dedurre i parametri da cui esse dipendono e la natura di tale dipendenza.

b) - lo studio del moto in presenza delle forze; consiste essenzialmente nella applicazione delle leggi della Dinamica e nella analisi delle equazioni in cui esse si traducono; e ciò ai fini o della determinazione del comportamento del sistema dato sotto l'azione di forze attive assegnate e per date condizioni iniziali, oppure della determinazione di alcuni elementi relativi ad un dato sistema cui si vuole imporre un prefissato comportamento.

I problemi di questo tipo possono essere quelli che si riferiscono a condizioni normali di funzionamento di una macchina, in cui questa si comporta, o si può considerare, ad un solo grado di libertà (per es. stabilirne il bilancio energetico nel funzionamento a regime); o anche quelli che si riferiscono a condizioni di esercizio più generali, in cui il numero dei gradi di libertà è, generalmente, sempre maggiore di uno, e nel cui ambito si pongono i problemi tipici della regolazione automatica, i problemi sui sistemi asserviti, i problemi di vibrazioni, ecc.

Le vibrazioni nascono da due circostanze concomitanti:

- il fatto che le forze applicate alla macchina sono generalmente variabili nel tempo, con una variabilità che, a seconda dei casi, può ricondursi ad una legge determinata (generalmente una somma di più armoniche), oppure può presentarsi in forma assolutamente casuale (di tipo random);

- il fatto che della macchina possono far parte corpi che presentano caratteristiche di elasticità: questa produce, sotto l'azione delle forze in giuoco, deformazioni del sistema variabili nel tempo e pertanto il suscitarsi di vibrazioni.

Lo studio delle vibrazioni si prefigge il compito di ricercare le condizioni per le quali il moto vibratorio può assumere un'ampiezza pericolosa (risonanza), e di indagare sui mezzi per evitare, o quanto meno ridurre, tale fenomeno salvaguardando, in taluni casi, la vita stessa della macchina.

CAPITOLO I

RICHIAMI SUI VETTORI LIBERI

SOMMARIO

1 - Somma o risultante di più vettori
2 - Differenza di due vettori
3 - Differenza di due punti
4 - Somma di un punto e di un vettore
5 - Prodotto di un vettore per un numero
6 - Prodotto scalare di due vettori
7 - Prodotto vettoriale di due vettori
8 - Prodotto misto di tre vettori
9 - Doppio prodotto vettoriale
10 - Componente di un vettore secondo una direzione orientata
11 - Componenti cartesiane di un vettore
12 - Espressione cartesiana delle operazioni vettoriali

Lo studio della meccanica, come ricerca delle leggi generali che governano i fenomeni del moto e delle interazioni fra i corpi, può essere fatto, in generale, attraverso lo studio delle grandezze fisiche che intervengono nel fenomeno stesso, grandezze che è utile e necessario rappresentare. Per tale scopo è fondamentale, quindi, poter disporre di un modo semplice ma anche il più possibile sintetico ed agevole per il calcolo.

E' banale il caso di una grandezza (massa, energia, temperatura, ecc.) che risulta completamente definita mediante un numero (il valore che ne rappresenta la misura in certe unità prefissate) e che perciò prende il nome di **grandezza scalare**.

Più complesso è invece il caso in cui per definire completamente una grandezza fisica (velocità, accelerazione, forza, ecc.) si ha bisogno di associare al suo valore anche altre informazioni come, per esempio, una direzione o un verso o entrambi.

In questo secondo caso si ha a che fare con **grandezze vettoriali** ed il metodo vettoriale torna assai utile, appunto, sia per la loro rappresentazione sia per il calcolo.

In tale contesto intervengono i seguenti enti fondamentali:

vettori liberi: caratterizzati da *modulo, direzione e verso;*
cursori: caratterizzati da *modulo, direzione, verso, e retta d'azione;*
vettori applicati: caratterizzati da *modulo, direzione, verso, e punto di applicazione;*
versori: caratterizzati da *direzione e verso;* (il modulo è unitario).

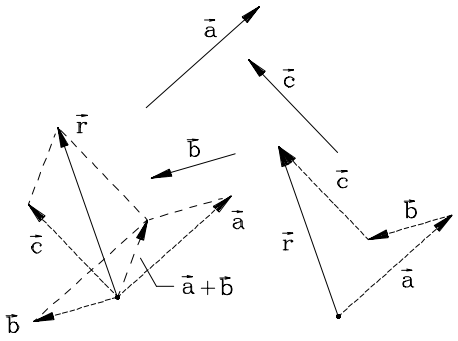


Figura 1

Ai vettori liberi, - o anche ai vettori applicati e ai cursori, quando si faccia astrazione dal loro punto di applicazione o dalla retta d'azione, - si applicano le note operazioni che qui di seguito si richiamano.

La **somma o risultante** di due o più vettori (fig.1) è un *vettore libero*, eguale al lato di chiusa della poligonale dei vettori addendi, con origine nell'origine del primo vettore e secondo estremo nel secondo estremo dell'ultimo.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

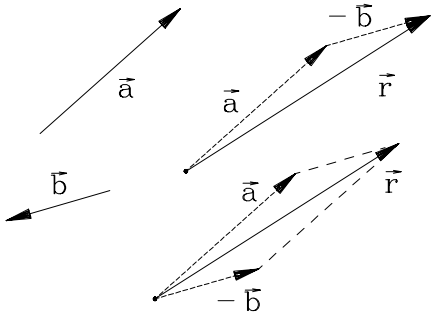


Figura 2

La **differenza** di due vettori (fig.2) è eguale alla somma del primo più l'opposto del secondo.

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

La **differenza di due punti** è un *vettore* che ha origine nel secondo punto e secondo estremo nel primo.

$$(P - O) = \vec{a}$$

Si ricava da quest'ultima l'espressione per **la somma di un punto più un vettore:** è il *punto* che si ottiene spostando il punto dato, nella direzione e verso del vettore, di un segmento pari al suo modulo.

$$P = O + \vec{a}$$

Si ricorda che per le espressioni contenenti punti e vettori è sempre lecito operare formalmente con le solite regole dell'algebra, *purché si badi a che non si pervenga ad espressioni prive di significato vettoriale.* E' quindi

lecita la seguente sottrazione vettoriale:

$$P = O + \vec{a}$$
$$Q = O + \vec{b}$$
$$P - Q = \vec{a} - \vec{b}$$

mentre non avrebbe senso la somma.

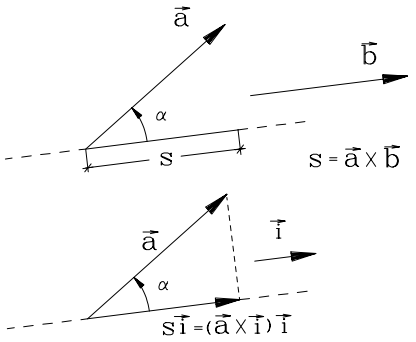


Figura 3

Il **prodotto di un vettore per un numero** è ancora un *vettore* che differisce dal primo solo per avere il modulo uguale al prodotto del modulo del vettore dato per quel numero.

Il **prodotto scalare di due vettori** (fig. 3) è un *numero (o scalare)* eguale al prodotto dei moduli dei vettori dati per il coseno dell'angolo compreso fra le loro direzioni; geometricamente è il prodotto del modulo dell'uno per la proiezione dell'altro su di esso.

$$s = \vec{a}x\vec{b} = ab\cos\alpha$$

se α è l'angolo fra i due vettori.
Se il prodotto scalare fra due vettori non nulli risulta nullo essi sono necessariamente perpendicolari fra loro.
Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma.
Quindi:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\times\vec{u} = \vec{a}\times\vec{u} + \vec{b}\times\vec{u} + \vec{c}\times\vec{u}$$

Il **prodotto vettoriale fra due vettori** (fig.4) è un vettore il cui modulo è uguale al prodotto dei moduli dei due vettori dati moltiplicato ancora per il seno dell'angolo compreso fra le loro direzioni; la sua direzione è quella della perpendicolare al piano individuato dai due vettori (e quindi sarà ortogonale ad entrambi i vettori dati); il suo verso sarà quello dell'avanzamento di una vite ruotata come ruoterebbe il primo vettore per sovrapporsi al secondo.

$$\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{b} = ab\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

se α è l'angolo fra i due vettori, misurato da $\vec{a}$ verso $\vec{b}$.
Se il prodotto vettoriale fra due vettori

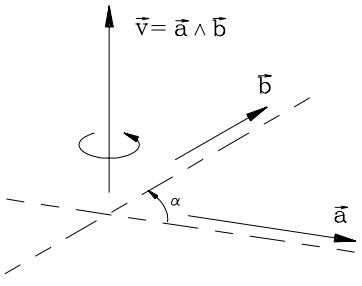


Figura 4

non nulli risulta nullo essi sono necessariamente paralleli fra loro.
Il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma ma **non gode** della proprietà commutativa. E', in-fatti:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

Geometricamente il prodotto vettore rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui vettori dati.

Il **prodotto misto di tre vettori** è uno *scalare* il cui valore misura il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori dati. Si definisce come:

$$s = \vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c}$$

Se esso si annulla i tre vettori sono complanari.

Il **doppio prodotto vettoriale** è un *vettore* definito da:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$$

E' importante ricordare che è diverso il risultato di:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

Il **componente di un vettore secondo una direzione orientata**, è il prodotto scalare del vettore dato per il versore di quella direzione. Pertanto, se $\vec{\rho}$ è il versore della direzione che interessa, il componente del vettore $\vec{a}$ secondo $\vec{\rho}$ è:

$$a_\rho = \vec{a} \times \vec{\rho} = a \cos a$$

se α è l'angolo di cui è ruotato il vettore $\vec{a}$ rispetto al versore.

Le **componenti cartesiane di un vettore** (fig.5) sono le componenti secondo le tre direzioni orientate di una terna cartesiana ortogonale, Oxyz, identificata dai suoi versori (es: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Si potrà quindi avere, per esempio:

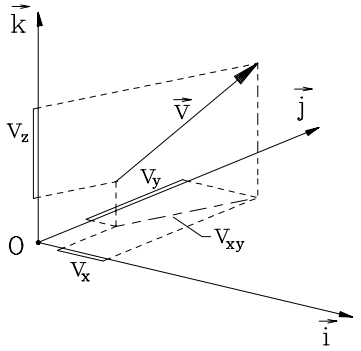


Figura 5

$$v_x = \vec{v} \times \vec{i} = v \cos\alpha$$
$$v_y = \vec{v} \times \vec{j} = v \cos\beta$$
$$v_z = \vec{v} \times \vec{k} = v \cos\gamma$$

Ne consegue l'identità:

$$\vec{v} \equiv v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = (\vec{v} \times \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \times \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \times \vec{k})\vec{k}$$

Utilizzando le componenti cartesiane dei vettori, le precedenti operazioni vettoriali richiamate assumono le seguenti espressioni.

Somma o risultante:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \\ r_z = a_z + b_z \end{cases}$$

Prodotto di un vettore per un numero:

$$\vec{b} = n\vec{a} \qquad \begin{cases} b_x = na_x \\ b_y = na_y \\ b_z = na_z \end{cases}$$

Prodotto scalare:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Prodotto misto:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z$$

Doppio prodotto vettoriale:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} =$$

$$= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)(b_x i + b_y j + b_z k) +$$

$$-(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)(a_x i + a_y j + a_z k)$$

Ricordiamo, infine, che una equazione vettoriale, se considerata in uno spazio tridimensionale, equivale a tre equazioni scalari, una per ogni versore della terna.

CAPITOLO II

VETTORI APPLICATI

SOMMARIO

1 - Momento di un vettore applicato rispetto ad un punto
2 - Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta
3 - Sistemi di vettori applicati
    3.1 - Momento risultante rispetto ad un punto
    3.2 - Momento risultante rispetto ad una retta
4 - Asse centrale
5 - Trinomio invariante
6 - Momento minimo

§ 1. - Momento di un vettore applicato

Se ad un vettore $\vec{u}$, fig. 6, si associa un determinato punto P, del piano o dello spazio, si ottiene un nuovo ente geometrico che si chiama **vettore applicato** e che si indica con il simbolo ($\vec{u}$, P). Detto punto P è allora il *punto di applicazione* del vettore $\vec{u}$, e la retta passante per P ed avente la direzione di $\vec{u}$ prende il nome di *retta di applicazione* del vettore.

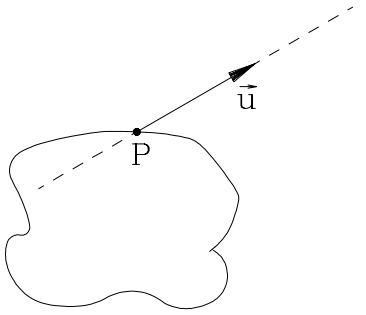


Figura 6

Scegliendo ad arbitrio un qualsiasi altro punto, Q, nello spazio, si può calcolare il momento del vettore ($\vec{u}$, P) rispetto a quel punto (o polo) Q definito (fig.7) dal vettore:

$$\vec{M}_Q = (P - Q) \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(1)}$$

Il vettore momento, come mostra il prodotto vettore presente nella (1), è un vettore, libero, perpendicolare sia al vettore $\vec{u}$ che al vettore $(P - Q)$, e quindi è ortogonale al loro piano.

Supponiamo, ora, di volere il vettore $\vec{u}$ applicato in un altro punto qualsiasi P' che appartenga però alla sua stessa retta di applicazione; ciò che equivale a spostare il vettore lungo la sua retta di applicazione (fig. 8).
Calcolando di nuovo il momento rispetto al punto Q, scriveremo:

$$\vec{M}_Q = (P'-Q) \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(2)}$$

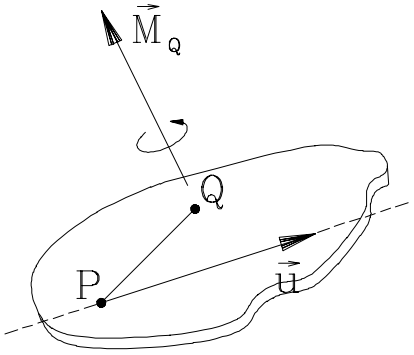


Figura 7

Poiché è pur vero che:

$$(P' - Q) = (P' - P) + (P - Q)$$

sostituendo nella (2) otterremo:

$$\vec{M}_Q = (P'-P) \wedge \vec{u} + (P-Q) \wedge \vec{u} = (P-Q) \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(3)}$$

in quanto è nullo il prodotto vettoriale $(P'-P) \wedge \vec{u}$: poiché, infatti, P e P' stanno sulla retta di applicazione di $\vec{u}$, i due vettori sono certamente paralleli.
Ciò mostra che il momento di un vettore applicato, rispetto ad un polo, non cambia se si sposta il vettore lungo la sua retta di applicazione; può risultare del tutto evidente se si riflette sulla definizione di prodotto vettore: il prodotto $|(P-Q)| \operatorname{sen}\alpha$ corrisponde alla distanza (braccio) di Q dalla retta di applicazione di $\vec{u}$ ed è perciò indipendente dalla scelta di P.

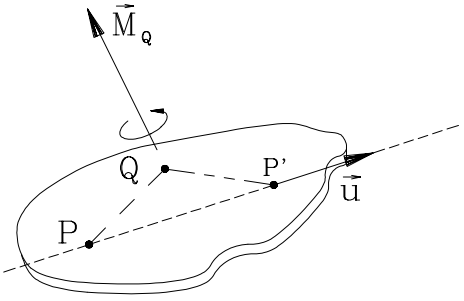


Figura 8

Una conseguenza immediata di quanto detto è, allora, che, se si sceglie come polo, rispetto al quale calcolare il momento di un dato vettore, un punto della retta di applicazione dello stesso, il momento ottenuto sarà nullo. Sarà comunque nullo, infatti, il braccio del vettore $\vec{u}$ rispetto a quel polo: i due vettori $\vec{u}$ e $(P-Q)$ sono in questo caso paralleli e quindi:

$$|(P-Q)| \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Supponiamo adesso di avere già calcolato il momento di un vettore $\vec{u}$ rispetto ad un dato polo Q, ossia la (1), e di voler calcolare il momento dello stesso vettore rispetto ad un altro polo qualsiasi Q'.
Il nuovo momento sarà dato da:

$$\vec{M}_{Q'} = (P - Q') \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(1')}$$

La differenza fra i due momenti (fig. 9) sarà data da:

$$\vec{M}_{Q'} - \vec{M}_{Q} = (P - Q') \wedge \vec{u} - (P - Q) \wedge \vec{u} = (Q - Q') \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(4)}$$

Possiamo quindi scrivere che, per effetto del cambiamento di polo, il nuovo momento è dato da:

$$\vec{M}_{Q'} = \vec{M}_{Q} + (Q - Q') \wedge \vec{u} \quad \textbf{(5)}$$

ossia che il momento rispetto al nuovo polo si ottiene sommando al primo il momento che avrebbe il vettore $\vec{u}$ se fosse applicato nel vecchio polo.

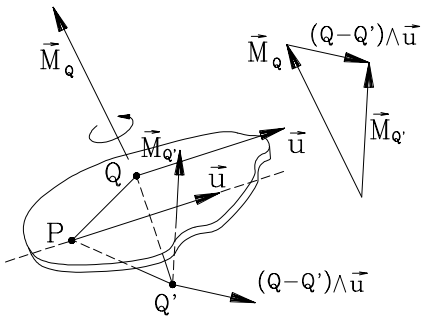


Figura 9

Ma la (5) ci dice anche che, se Q' viene scelto su una retta per Q parallela al vettore $\vec{u}$ il momento non cambierà: in questo caso, infatti, il secondo addendo della (5) risulterebbe nullo.

§ 2.- Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta.

Si definisce momento del vettore $(\vec{u}, P)$ rispetto ad una retta orientata r di versore **k** , il componente lungo la retta del momento di $(\vec{u}, P)$ calcolato rispetto ad un polo Q di r (momento assiale).
Ciò equivale formalmente al calcolo del prodotto misto:

$$M_r = (P - Q) \wedge \vec{u} \times \vec{k} = \\ = \vec{M}_Q \times \vec{k} \qquad \textbf{(6)}$$

ma ha in più la particolare condizione che il polo Q deve appartenere alla retta r (fig. 10).

Il momento assiale, che è uno scalare, non varia al variare di Q sulla retta r; e ciò è evidente se si tiene conto della definizione di

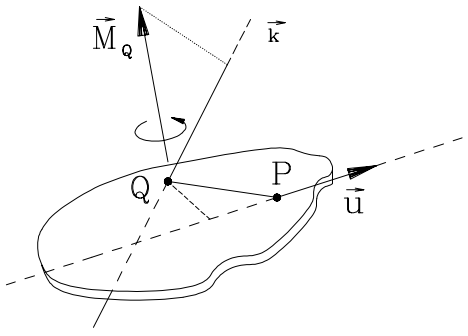


Figura 10

prodotto scalare: il componente di un vettore, del vettore momento in questo caso, secondo una retta dipende solo dalla direzione della retta. Infatti, (fig. 11), calcolando il nuovo momento assiale dello stesso vettore $(\vec{u}, P)$ utilizzando come polo un punto Q' della stessa retta r, avremmo:

$$M'_r = \left[\vec{M}_Q + (Q - Q') \wedge \vec{u}\right] \times \vec{k} = \vec{M}_Q \times \vec{k} + (Q - Q') \wedge \vec{u} \times \vec{k} \qquad \textbf{(7)}$$

Nella (7), poiché Q e Q' appartengono alla stessa retta r, il secondo addendo è certamente nullo e quindi $M'_r = M_r$.

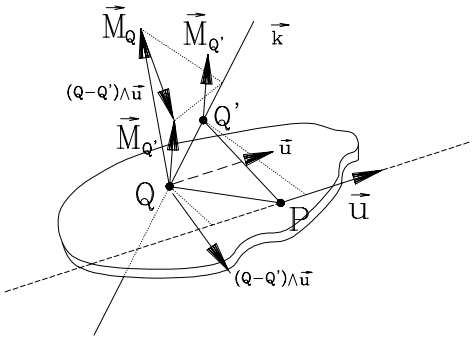


Figura 11

Se la retta r e la retta di applicazione di $(\vec{u}, P)$ sono complanari il momento M_r sarà nullo: infatti in questo caso il vettore momento $\mathbf{M}_Q$, che è perpendicolare ad $(\vec{u}, P)$, risulta pure perpendicolare ad r, e quindi il prodotto scalare risulta nullo.

Lo stesso accade se la retta r e la retta di applicazione di (**u**, P) sono incidenti in quanto risulta già nullo il vettore momento $\mathbf{M}_Q$ (v.§ 1).

§ 3.- Sistemi di vettori applicati

Un insieme di vettori, $(\vec{u}_1, P)$, $(\vec{u}_2, P)$, ..., $(\vec{u}_n, P)$, costituisce un **sistema di vettori applicati**; è molto importante essere in grado di determinare un unico vettore, il **risultante**, tale da poter essere sostituito agli n vettori del sistema dato.

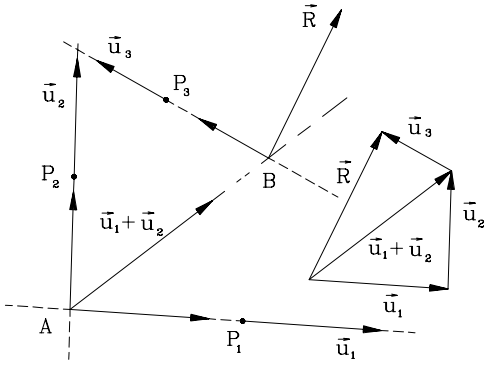


Figura 12

Di un sistema di vettori applicati si ottiene il risultante sommando successivamente a due a due gli n vettori secondo quanto visto per i vettori liberi, ma solo a patto (fig.12) che le rette di applicazione presentino sempre un punto di intersezione.

Formalmente esso sarà dato dal vettore:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n \qquad \textbf{(8)}$$

Il **momento risultante** di un sistema di vettori applicati **rispetto ad un punto** Q, è il risultante dei vettori momento, dei singoli vettori che costituiscono il sistema, rispetto allo stesso polo Q, e cioè:
Quindi:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge \vec{u}_i \qquad \textbf{(9)}$$

Supponendo, ora, di aver già calcolato il vettore momento $\mathbf{M}_Q$, vediamo come è possibile calcolare il momento risultante, dello stesso sistema di vettori applicati, rispetto ad un altro punto Q' (fig. 13), ossia il vettore:

$$\vec{M}_{Q'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q') \wedge \vec{u}_i$$

Possiamo scrivere, allo scopo, che è:

$$\vec{M}_{Q'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q') \wedge \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q + Q - Q') \wedge \vec{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge \vec{u}_i + (Q - Q') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = \qquad \textbf{(10)}$$

$$= \vec{M}_Q + (Q - Q') \wedge \vec{R}$$

La (10) quindi ci mostra, *che il momento risultante di un sistema di vettori applicati rispetto ad un polo Q' è uguale al momento risultante di quel sistema rispetto ad un polo Q più il momento del risultante, applicato in Q, rispetto al polo Q'*.

Dalla stessa (10) si deduce pure che se Q' appartiene ad una retta passante per Q e parallela ad **R** il secondo termine della somma risulta nullo, ossia $\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_{Q'}$; vediamo allora che *il momento del sistema è sempre il medesimo se calcolato rispetto a tutti i punti di una qualsiasi retta, parallela al risultante del sistema stesso*.

Si deduce anche che il momento *rimane sempre il medesimo*, al variare del polo, *se è nullo il risultante* del sistema di vettori applicati.
E' questo il *caso tipico di una coppia* (due vettori paralleli di ugual modulo e versi opposti) in cui il risultante è nullo ed il cui momento, indipendentemente dal polo scelto, avrà per modulo il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la distanza (braccio) fra le due rette di applicazione.

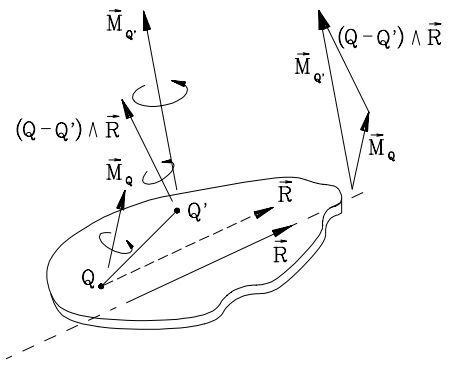


Figura 13

Il **momento assiale** rispetto ad una retta orientata r di versore $\vec{k}$ sarà a sua volta dato da:

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge \vec{u}_i \times \vec{k} \qquad \textbf{(11)}$$

in cui il punto Q è un punto della retta r.
Poiché il versore $\vec{k}$ è indipendente dall'indice di sommatoria, si può scrivere:

$$M_r = \left[\sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge \vec{u}_i \right] \times \vec{k} = \vec{M}_Q \times \vec{k} \qquad \textbf{(12)}$$

concludendo che il momento assiale risultante è, di fatto, il momento assiale del momento risultante del sistema secondo la retta r.

§ 4. - Asse centrale.

Si è visto nel precedente paragrafo, e in particolare attraverso la (10), come, dato un sistema di vettori applicati il cui risultante non sia nullo, il momento risultante di tale sistema sia un vettore sempre diverso al variare della scelta, peraltro arbitraria, del polo. Data tale arbitrarietà, si vuole, allora, cercare quel particolare polo Q_o per cui si abbia:

$$\vec{M}_{Q_o} \wedge \vec{R} = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

ossia un polo che dia come momento risultante del sistema di vettori applicati un vettore che risulti parallelo al risultante dello stesso oppure

nullo.
Supponendo di avere già calcolato, per lo stesso sistema, il momento risultante rispetto ad un generico punto Q, per la (10), potremo scrivere:

$$\vec{M}_{Q_o} \wedge \vec{R} =$$
$$= \left[\vec{M}_Q + (Q - Q_o) \wedge \vec{R}\right] \wedge \vec{R} = \vec{M}_Q \wedge \vec{R} + (Q - Q_o) \wedge \vec{R} \wedge \vec{R} = \quad \textbf{(14)}$$
$$= \vec{M}_Q \wedge \vec{R} + \left[(Q - Q_o) \times \vec{R}\right]\vec{R} - R^2 (Q - Q_o) = 0$$

Si può verificare che la (14) risulta certamente verificata se è:

$$(Q - Q_o) = \frac{1}{R^2}\left(\vec{M}_Q \wedge \vec{R}\right) \qquad \textbf{(15)}$$

e quindi è verificata anche la (13).
Sostituendo, infatti,la (15) nella (14), il terzo termine darà luogo ad un vettore eguale ed opposto primo, mentre il secondo termine darà luogo ad un vettore nullo, essendo certamente:

$$\left(\vec{M}_Q \wedge \vec{R}\right) \times \vec{R} = 0$$

Inoltre, per quanto visto al § precedente il momento risultante, non cambia se si prende come polo un qualsiasi altro punto Q' di una retta passante per il vecchio polo e parallela al risultante; quindi la (13) risulta verificata per tutti i punti della *retta passante per Q_o e parallela al risultante*. Questa retta prende il nome di **asse centrale del sistema di vettori applicati** definita quindi come luogo di quei punti per cui il momento risultante calcolato rispetto ad essi risulta un vettore parallelo al risultante stesso.

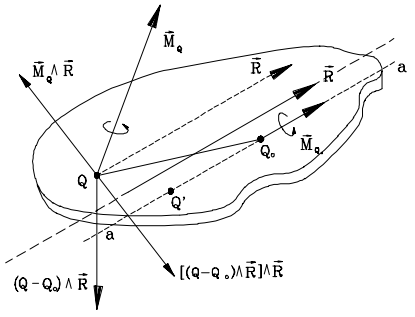


Figura 14

La fig. 14 mostra come, in effetti, il vettore $(Q - Q_o) \wedge \vec{R}$ risulta ortogonale al piano di $(Q - Q_o)$ e di $\vec{R}$; moltiplicandolo poi vettorialmente per $\vec{R}$, il vettore che ne risulta, dovendo essere ortogonale di nuovo ad $\vec{R}$, avrà direzione parallela e verso opposto al vettore $\vec{M}_Q \wedge \vec{R}$, anch'esso ortogonale ad $\vec{R}$. Il vettore momento, calcolato rispetto al polo Q_o dato dalla (15) sarà dato da:

$$\vec{M}_{Q_o} = \vec{M}_Q + (Q - Q_o) \wedge \vec{R} = \vec{M}_Q + \frac{\vec{M}_Q \wedge \vec{R}}{R^2} \wedge \vec{R} =$$

$$= \vec{M}_Q + \frac{1}{R^2}\left[\left(\vec{M}_Q \times \vec{R}\right)\vec{R} - R^2 \vec{M}_Q\right] = \left(\vec{M}_Q \times \vec{R}\right)\frac{\vec{R}}{R^2}$$

ossia proprio un vettore parallelo al risultante.

In termini analitici, indicando con x', y', z' le coordinate di Q', con R_x, R_y, R_z le componenti di **R**, e con M_x, M_y, M_z le componenti del momento risultante rispetto al polo Q', le (16) danno direttamente le coordinate del punto Q_o dell'asse centrale:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{M_y R_z - M_z R_y}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ y_0 &= \frac{M_z R_x - M_x R_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ z_0 &= \frac{M_x R_y - M_y R_x}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(16)}$$

Le equazioni parametriche di quest'ultimo si possono ricavare da:

$$P = Q' + \frac{1}{R^2}\left(\vec{R} \wedge \vec{M}_Q\right) + \lambda \vec{R} \qquad \textbf{(17)}$$

essendo P il generico punto dell'asse centrale e λ un parametro arbitrario proporzionale alla distanza da Q.

Un metodo analitico più semplice per la determinazione dell'asse centrale è quello di calcolare il momento $\vec{M}_Q$ utilizzando come polo un generico punto Q(x,y,z,) ed imponendo che la condizione $\vec{M}_Q \wedge \vec{R} = 0$ attraverso la proporzionalità dei componenti dei due vettori.

§ 5.- Trinomio invariante.

Dato un sistema di vettori applicati di cui si conosca già il risultante $\vec{R}$ ed il momento risultante $\vec{M}_Q$ rispetto ad un generico polo Q prendiamo in esame il componente di $\vec{M}_Q$ lungo una retta r che sia parallela al risultante $\vec{R}$, ossia il prodotto scalare $\vec{M}_Q \times \vec{R}$.

Per mezzo della relazione (10), consideriamo in particolare cosa accade di tale componente quando si opera un cambiamento di polo, da

Q a Q'.
Scriveremo:

$$\vec{M}_{Q'} \times \vec{R} = \left[\vec{M}_Q + (Q - Q') \wedge \vec{R} \right] \times \vec{R} \qquad \textbf{(18)}$$

rilevando che (fig. 15), poiché il vettore $(Q - Q') \wedge \vec{R}$ è certamente perpendicolare ad $\vec{R}$, il suo prodotto scalare per lo stesso $\vec{R}$ dà per risultato zero; pertanto la (18) ci dice che:

$$\vec{M}_{Q'} \times \vec{R} = \vec{M}_Q \times \vec{R} \qquad \textbf{(19)}$$

e cioè che, al variare del polo, il componente del vettore momento risultante lungo la direzione di $\vec{R}$ è sempre lo stesso.

E' per questo motivo che si dà il nome di **trinomio invariante** all'espressione cartesiana del prodotto:

$$T = \vec{M}_Q \times \vec{R} \qquad \textbf{(20)}$$

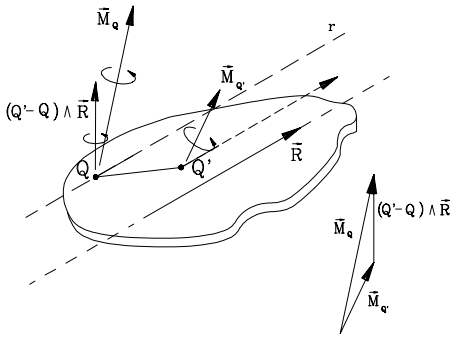


Figura 15

Il trinomio invariante è nullo per un sistema piano di vettori, ossia costituito da vettori giacenti tutti sullo stesso piano: in tal caso infatti il risultante giacerà certamente sullo stesso piano mentre il vettore momento risultante, calcolato rispetto ad un qualsiasi punto di quel piano, sarà perpendicolare a questo; il prodotto scalare (20) sarà quindi nullo.

Il trinomio invariante è pure nullo per un sistema di vettori paralleli; infatti il risultante sarà certamente parallelo alla direzione comune a tutti i vettori del sistema, e il momento risultante calcolato rispetto ad un polo qualsiasi sarà necessariamente perpendicolare alla medesima direzione; anche in questo caso quindi il prodotto scalare (20) sarà quindi nullo.

§ 6. - Momento minimo.

La proprietà principale dell'asse centrale è quella di essere il luogo dei poli rispetto ai quali il momento risultante di un sistema di vettori applicati risulta minimo.

Infatti se il momento è calcolato rispetto ad un polo Q_o, che sia punto dell'asse centrale, ogni altro momento calcolato rispetto ad un altro punto Q non appartenente all'asse centrale si otterrebbe dalla (10), dando luogo evidentemente ad un vettore di modulo maggiore.

Infatti se Q è un punto fuori dall'asse centrale il vettore $(Q_o - Q)$ non può essere parallelo ad $\vec{R}$ e quindi il prodotto $(Q_o - Q) \wedge \vec{R}$ risulta certamente non nullo.

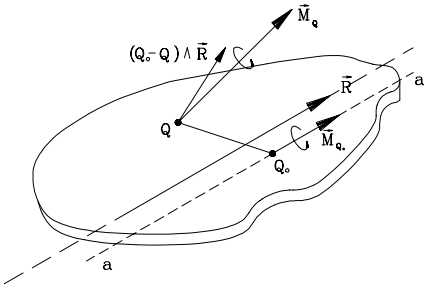


Figura 16

Un risultato interessante si ottiene considerando che, il versore dell'asse centrale, parallelo al risultante, può essere espresso come $\vec{\rho} = \vec{R}/R$, e che quindi il momento risultante calcolato rispetto ad un punto dell'asse centrale si può scrivere:

$$\vec{M}_{Q_o} = \left(\vec{M}_{Q_o} \times \vec{\rho}\right)\vec{\rho} = \frac{\vec{M}_{Q_o} \times \vec{R}}{R^2}\vec{R} = \frac{T}{R^2}\vec{R} \qquad \textbf{(21)}$$

e ciò mostra che*, se il trinomio invariante è nullo, l'asse centrale del sistema risulta il luogo dei punti rispetto al quale è nullo il momento risultante del sistema stesso*.

CAPITOLO III

EQUIVALENZA DI DUE SISTEMI DI VETTORI APPLICATI

SOMMARIO

1 - Definizione di sistemi equivalenti
2 - Composizione e scomposizione di vettori
3 - Riduzione di un sistema di vettori
4 - Equivalenza a zero
5 - Sistemi di vettori paralleli

§ 1.- Definizione di sistemi equivalenti.

La teoria dell'equivalenza di due sistemi di vettori applicati ha notevole importanza nello studio della meccanica dei sistemi rigidi; si basa sul concetto che due diversi sistemi di forze applicate ad un rigido, se equivalenti, producono su di esso lo stesso effetto sia staticamente che dinamicamente.

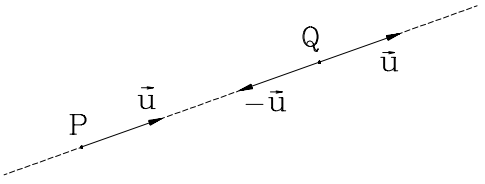


Figura 17

Due diversi **sistemi di vettori** applicati si dicono fra loro **equivalenti** se possono essere ottenuti, l'uno dall'altro, mediante le operazioni elementari di composizione, di scomposizione.

A queste operazioni si può aggiungere anche quella, banale, di **spostamento di un vettore lungo la sua retta di applicazione** (fig.17)**.**

Se ad un vettore ($\vec{u}$ P) aggiungiamo due vettori come ($\vec{u}$, Q) e (-$\vec{u}$, Q), -

ossia quella che può essere chiamata una coppia di braccio nullo, - e tali che Q appartenga alla stessa retta di applicazione di $\vec{u}$, abbiamo, di fatto, sovrapposto ad ($\vec{u}$, P) un sistema di vettori il cui risultante è nullo e nullo il suo momento rispetto a qualsiasi polo; il precedente sistema costituito dal solo vettore ($\vec{u}$, P) non sarà quindi alterato da tale sovrapposizione.
Ma, adesso, anche i due vettori ($\vec{u}$, P) e (-$\vec{u}$, Q) costituiscono una coppia di braccio nullo; possiamo quindi analogamente sopprimerli senza, di nuovo, alterare il sistema: si ottiene come risultato finale il solo vettore ($\vec{u}$, Q).

§ 2.- Composizione e scomposizione di vettori

La **composizione di due vettori** applicati (fig.18) è possibile quando le loro rette di applicazione si intersecano in un punto, per es. A. Il risultato di tale operazione è un vettore $\vec{r}$ la cui retta di applicazione passa per il punto A ed ha la direzione ed il verso del vettore somma dei due vettori dati.
Siano i due vettori assegnati, per esempio, ($\vec{u}_1$, P) e ($\vec{u}_2$, Q) e sia γ l'angolo formato dalle loro rette di applicazione. Vogliamo trovare il vettore $\vec{r}$ risultante dalla loro composizione.
Il vettore risultante $\vec{r}$ sarà applicato nel punto A punto di intersezione delle rette di applicazione dei due vettori dati e il suo modulo, per il teorema di Carnot, applicato al triangolo dei tre vettori, sarà dato da:

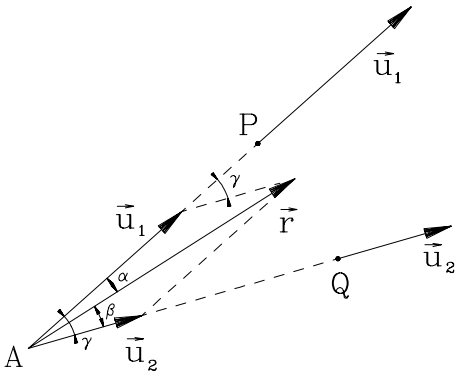


Figura 18

$$r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\gamma} \qquad \textbf{(22)}$$

Gli angoli che la sua retta di applicazione forma con quelle degli altri due saranno dati, nell'ordine, da:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{u_2}{r}\operatorname{sen}\gamma \qquad\qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{u_1}{r}\operatorname{sen}\gamma \qquad \textbf{(23)}$$

L'operazione di **scomposizione di un vettore** applicato in un punto in altri due vettori risulta invece più problematica.
Si consideri il vettore, ($\vec{u}$, A), e lo si voglia scomporre in due altri vettori ($\vec{u}_1$, A) e ($\vec{u}_2$, A).
Una operazione di questo tipo è possibile se, oltre al vettore dato, si conoscono alternativamente:
a) le due direzioni $\vec{\lambda}$ di $\vec{u}_1$ e $\vec{\mu}$ di $\vec{u}_2$;
b) il vettore $\vec{u}_1$;
c) i moduli di $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$;
d) il modulo di $\vec{u}_1$ e la direzione $\vec{\mu}$ di $\vec{u}_2$.

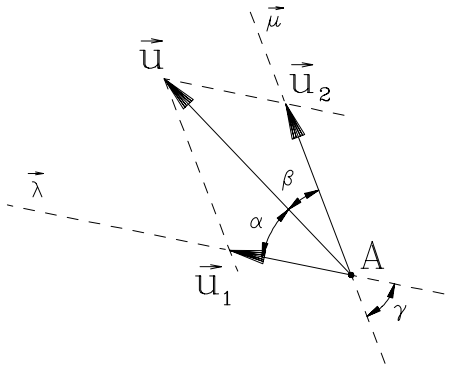


Figura 19

Nel primo caso il problema si risolve, graficamente (fig.19), costruendo nel punto A il parallelogramma avente i lati con le direzioni di $\vec{\lambda}$ e di $\vec{\mu}$ ed il vettore $\vec{u}$ come diagonale; i vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ si avranno sui due lati uscenti da A. In termini analitici, analogamente a quanto visto per la (23), si ha:

$$u_1 = u\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad\qquad u_2 = u\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \textbf{(24)}$$

Nel caso b), (fig.20) il vettore ($\vec{u}_2$, A) si trova applicando in A il vettore differenza $\vec{u}$-$\vec{u}_1$.
Analiticamente il problema può essere riportato nella ricerca del vettore risultante dalla somma di $\vec{u}$ e di -$\vec{u}_1$, e, pertanto si ha dalla (22):

$$u_2 = \sqrt{u^2 + u_1^2 - 2uu_1\cos\alpha}$$

essendo α l'angolo fra i due vettori $\vec{u}$ ed $\vec{u}_1$; il vettore $\vec{u}_2$ formerà con il vettore $\vec{u}$ un angolo β dato da:

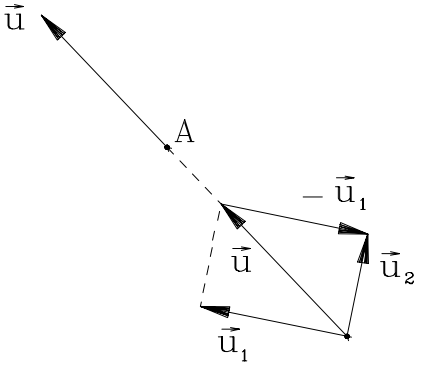


Figura 20

$$\operatorname{sen}\beta = -\frac{u_1}{u_2}\operatorname{sen}\alpha$$

Il caso c) si può agevolmente risolvere graficamente con la costruzione indicata in fig.21: si traccia con centro nel primo estremo del vettore $\vec{u}$ un arco di circonferenza di raggio pari al modulo noto u_1, e con centro nel suo secondo estremo un secondo arco di circonferenza di raggio pari all'altro modulo noto u_2. Il punto di intersezione fra i due archi risolve il problema.

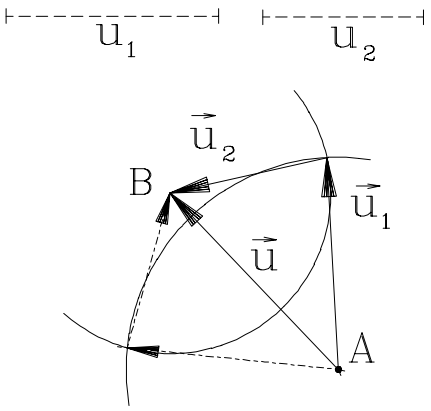


Figura 21

Vale la pena di sottolineare che, qui, la soluzione esiste solo se $u<u_1+u_2$; diversamente, come si può rilevare dalla figura stessa, non potrebbe esistere alcuna intersezione fra i due archi tracciati.

In termini analitici, indicando con α e β gli angoli, incogniti, formati rispettivamente dai vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ con il vettore $\vec{u}$, dovrà essere:

$$\cos\alpha = \pm\frac{u^2 + u_1^2 - u_2^2}{2uu_1} \qquad \textbf{(24)}$$

in cui le due soluzioni corrispondono ai segni superiori o inferiori.

Anche per il caso d) si può avere sia la soluzione grafica (fig.22) che la soluzione analitica. Graficamente è' sufficiente tracciare, dal primo estremo del vettore $\vec{u}$, un arco di circonferenza di raggio pari al modulo u_1 e trovarne l'intersezione con una retta per il secondo estremo di $\vec{u}$, parallela alla direzione assegnata.

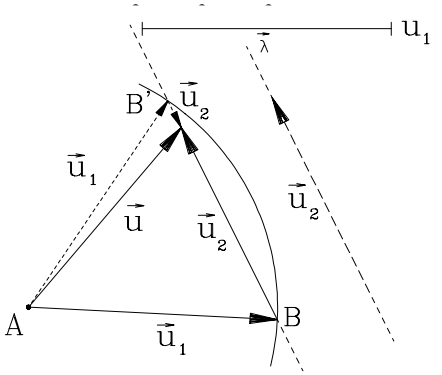


Figura 22

Si capisce anche che, a seconda delle circostanze, questo problema può avere una, due, o nessuna soluzione.

Analiticamente, essendo noto l'angolo β che il vettore $\vec{u}_2$ dovrà formare con il vettore $\vec{u}$, dovrà aversi:

$$u_2 = u\cos\beta \pm \sqrt{u_1^2 - (u\,\mathrm{sen}\,\beta)^2} \qquad \textbf{(25)}$$

e poi, trovato tale modulo, l'angolo α formato dal vettore $\vec{u}_1$ con il vettore $\vec{u}$, si ricava, come nella (24), da:

$$\cos\alpha = \pm\frac{u^2 + u_1^2 - u_2^2}{2uu_1} \qquad \textbf{(26)}$$

Il radicale che compare nella (25) ed i doppi segni che compaiono sia nella (25) che nella (26) mostrano, come già visto, che il problema non ha una soluzione univoca.

§ 3.- Riduzione di un sistema di vettori.

Dato un sistema di vettori applicati, costituito da un certo numero di vettori ($\vec{u}_i$,P_i) è sempre possibile ridurlo ad un sistema costituito dal suo risultante applicato in un punto arbitrario dello spazio e ad una coppia.

La dimostrazione può aversi operando secondo tre fasi successive.

a) riduzione del sistema dato ad un sistema di **tre vettori** applicati in **tre punti** distinti dello spazio **scelti ad arbitrio**, purché non allineati.

Indichiamo (fig.23) con A, B, C i tre punti scelti ad arbitrio: essi individuano ovviamente un piano che indichiamo con .

a.1) Potrebbe accadere che nessuno dei tre vettori abbia il punto di applicazione P_i sul punti piano σ; in tal caso è possibile scomporre ciascun vettore ($\mathbf{u}_i$, P_i) secondo le tre direzioni P_iA, P_iB, P_iC e spostare quindi ciascun componente, lungo la propria retta di applicazione, fin nei rispettivi punti A, B, C; si possono allora sommare fra loro, in A, B, e C, le componenti omologhe ottenendo quindi tre soli vettori: ($\vec{w}_1$,A), ($\vec{w}_2$,B), ($\vec{w}_3$,C).

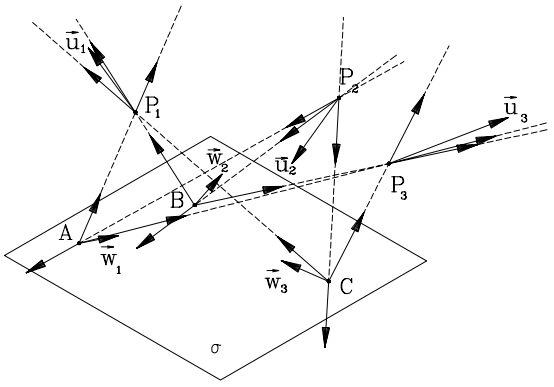


Figura 23

a.2) Ma se uno o più vettori hanno il punto di applicazione sullo stesso piano σ:

a.2.1) se non sono paralleli al piano σ questi potranno comunque essere prima spostati lungo la loro retta di applicazione in un punto qualsiasi e poi trattati nel modo già visto;

a.2.2) se invece un vettore è parallelo al piano σ si può congiungere il suo punto di applicazione con due qualsiasi fra i tre punti A, B, C, e riportare su di essi le componenti secondo le due rette utilizzate.

b) riduzione del sistema di vettori $(\vec{w}_1,A)$, $(\vec{w}_2,B)$, $(\vec{w}_3,C)$ ad un sistema di **due vettori** applicati in **due punti** distinti dello spazio **di cui uno scelto ad arbitrio** (fig.24).

Consideriamo il piano σ_1 contenente il vettore $(\vec{w}_1,A)$ e passante per il punto C, ed il piano σ_2 contenente il vettore $(\vec{w}_2,B)$ e passante per il punto C; questi piani, in generale distinti, e sui quali giaceranno i due vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, avranno come intersezione una retta, passante per C, sulla quale possiamo scegliere ad arbitrio un punto D, punto che, ovviamente, appartiene sia al piano σ_1 che al piano σ_2.

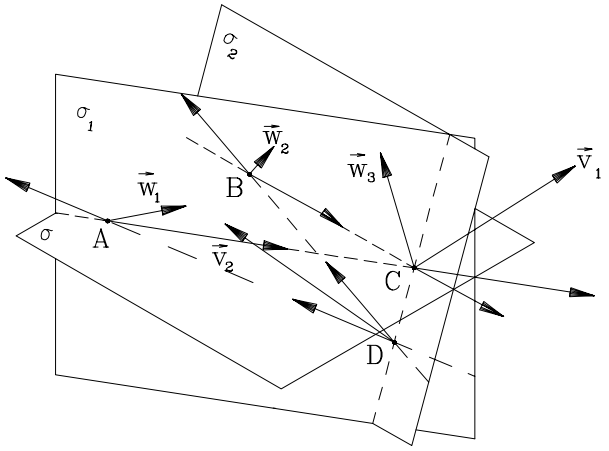


Figura 24

Possiamo quindi scomporre il vettore $(\vec{w}_1,A)$ secondo le rette AC e AD e spostare le componenti ottenute in C e in D; scomporre il vettore $(\vec{w}_2,B)$ secondo le rette BC e BD, e di nuovo spostare le componenti ottenute in C e in D; in C e in D si possono ora sommare i vet-tori ivi applicati, ottenendo un sistema costituito dai due soli vettori $(\vec{v}_1,C)$ e $(\vec{v}_2, D)$.

c) riduzione (fig.25) dei due vettori $(\vec{v}_1,C)$ e $(\vec{v}_2, D)$ ad un sistema formato dal **risultante** applicato in **un punto** dello spazio scelto **ad arbitrio**, e da **una coppia** il cui momento è pari al momento risultante del sistema rispetto a quel punto di applicazione.

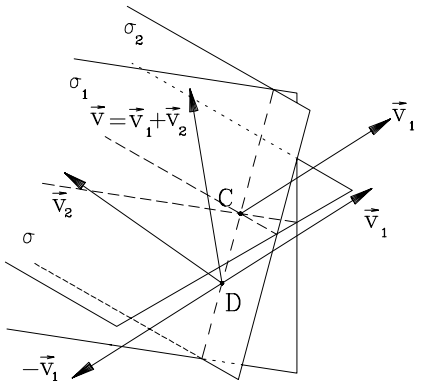


Figura 25

Se, ad esempio, nel punto D applichiamo altri due vettori come $(\vec{v}_1, D)$ e $(-\vec{v}_1, D)$, che costituiscono a loro volta un sistema a risultante e momento risultante nullo, certamente il precedente sistema non risulta alterato. Esso equivale, tuttavia, al sistema costituito dai vettori: $(\vec{v}_1+\vec{v}_2, D)$, $(-\vec{v}_1, D)$, e $(\vec{v}_1, C)$, di cui il primo è evidentemente il risultante del sistema originario, mentre gli altri due costituiscono una coppia il cui momento deve essere necessa-

riamente uguale al momento risultante del sistema dato rispetto al punto D: ciò perché nessuna delle operazioni eseguite può avere alterato il suo momento risultante.

Si può concludere, infine, *che se due diversi sistemi di vettori applicati danno luogo alla* ***stessa risultante*** *ed allo* ***stesso momento risultante*** *essi sono* ***equivalenti***.

§ 4.- Equivalenza a zero.

Per la risoluzione di alcuni problemi meccanici, e in particolare per tutti quei problemi in cui occorre ricercare condizioni di equilibrio, è utile, in generale, imporre che il sistema di forze applicate a quel dato sistema abbia **risultante e momento risultante nulli**; ciò che equivale a dire imporre l'**equivalenza a zero** di un dato sistema di vettori applicati.

Se il sistema di vettori è un sistema piano (vettori giacenti tutti sullo stesso piano), l'applicazione di tale condizione risulta semplice in quanto il risultante, $\vec{R}$, starà certamente sul medesimo piano ed il momento risultante calcolato rispetto ad un polo O qualsiasi di quel piano, $\vec{M}_O$, risulterà normale allo stesso.

In tal caso per imporre l'equivalenza a zero del sistema sarà sufficiente imporre che siano nulle le componenti di $\vec{R}$ secondo due rette qualsiasi del piano, purché non parallele, e che sia nullo $\vec{M}_O$: in tutto, tre condizioni scalari. Oppure si può imporre che siano nullo il momento risultante rispetto a due punti distinti, $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} = 0$, e contemporaneamente sia nullo il componente di $\vec{R}$ secondo una direzione qualsiasi purché non sia perpendicolare alla retta congiungente OO'; oppure ancora si può imporre che siano nulli i momenti rispetto a tre punti non allineati: $\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = 0$.

Nel caso particolare in cui il sistema dato è costituito da soli **tre vettori**, (fig.26), l'equivalenza a zero è possibile solo se essi giacciono su un unico **piano** (sistema piano) e se le loro rette di applicazione **si intersecano in uno stesso punto**, sia esso al finito o all'in-

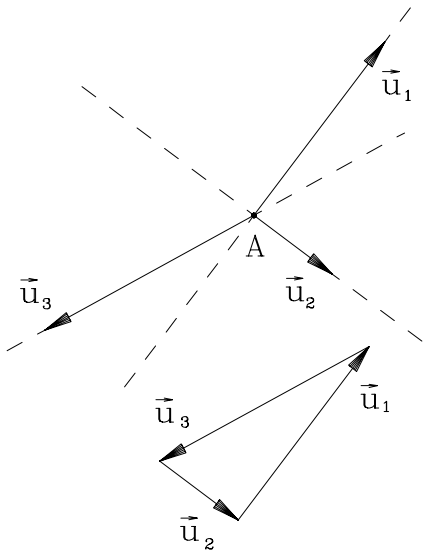


Figura 26

finito.

Infatti, l'essere nullo $\vec{R}$, equivale a dire che uno dei tre vettori deve essere uguale ed opposto al risultante degli altri due, e deve con esso condividere la retta di applicazione affinché sia nullo il momento rispetto al punto di intersezione delle rette di applicazione dei primi due; se è nullo il momento rispetto a tale punto è, ovviamente, pure nullo il momento rispetto a qualsiasi altro punto.

Se invece i tre vettori non fossero complanari potrebbe accadere che uno dei tre, per es. $\vec{u}_3$, o giaccia su un piano parallelo al piano degli altri due (fig. 27), oppure sia incidente a tale piano (fig. 28). In entrambi i casi $\vec{u}_3$ avrebbe certamente un momento diverso da zero rispetto al punto, A, di intersezione delle rette di appli-

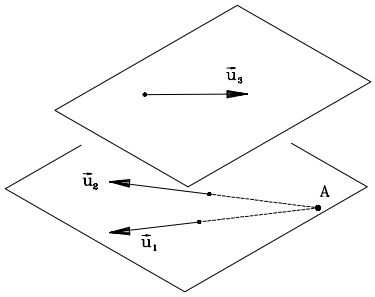


Figura 27

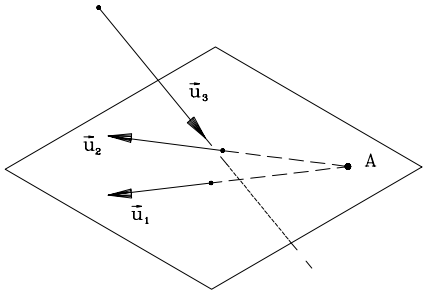


Figura 28

cazione di $\vec{u}_1$ e di $\vec{u}_2$ mentre questi, rispetto allo stesso punto avrebbero momento nullo; né si potrebbe nemmeno avere $\vec{R} = 0$ perché la retta di applicazione di $\vec{u}_3$ risulterebbe sghemba rispetto alla direzione del risultante di $\vec{u}_1$ e di $\vec{u}_2$; fa eccezione, sotto questo aspetto, nella situazione di fig. 28, il caso in cui la retta di applicazione di $\vec{u}_3$ passi proprio per A, ma tale eccezione lascia comunque invariato il fatto che non si avrebbe $\vec{M}_A = 0$.

§ 5. - Sistemi di vettori paralleli.

Un sistema di vettori paralleli è un sistema costituito da vettori $\vec{u}_i$, applicati in punti P_i, aventi tutti una medesima direzione, e quindi tutti del tipo:

$$\vec{u}_i = u_i \vec{\rho}$$

la cui retta di applicazione passa quindi per il punto all'infinito della loro direzione comune ed il cui risultante è quindi il vettore:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \vec{\rho} \tag{27}$$

applicato in un punto G.
Ora, poiché i vettori sono tutti fra loro paralleli (il punto all'infinito di $\vec{\rho}$ è il punto di intersezione di tutte le rette di applicazione) per il momento risultante del sistema si può applicare il **teorema di Varignon.**
Il teorema di Varignon afferma che *se i vettori di un sistema hanno tutti la medesima origine A il momento risultante rispetto ad un polo O è uguale al momento del risultante del sistema applicato in quel punto A*.

Che ciò sia vero in generale si può comprendere se si riflette sul fatto che, se i vettori del sistema hanno tutti la medesima origine A, le loro rette di applicazione passano tutte per tale punto; ciascun vettore del sistema può farsi scorrere, quindi, lungo la sua retta di applicazione fino al punto A, punto in cui risulterà certamente applicato il risultante del sistema.

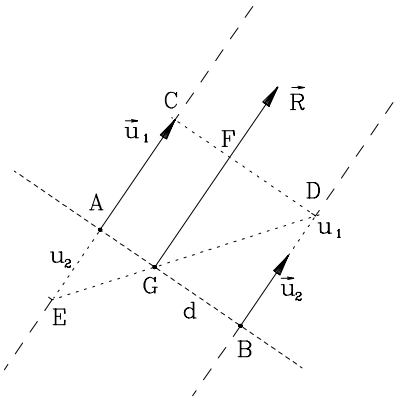


Figura 29

Nel nostro caso, indicando con G il punto in cui pensare applicato il risultante del sistema di vettori paralleli, si può quindi scrivere il teorema di Varignon nella forma:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{n} \left(P_i - O \right) \wedge \vec{u}_i = (G - O) \wedge \vec{R} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \left(P_i - O \right) \wedge \vec{\rho} = R(G - O) \wedge \vec{\rho} \end{aligned} \tag{28}$$

valida qualunque sia $\vec{\rho}$.
Il punto G, tale che sia:

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \left(P_i - O \right)}{R} \tag{29}$$

si definisce **centro del sistema di vettori paralleli**, e da come è stato ottenuto si può concludere che G è indipendente dalla orientazione dei vettori e non varia se tutti i vettori sono moltiplicati per uno stesso numero.

Consideriamo ora il caso particolare in cui il sistema sia costituito solamente dai due vettori paralleli ($\vec{u}_1$, A) e ($\vec{u}_2$, B).

Poiché è lecito far scorrere i vettori lungo la loro retta di applicazione, possiamo anche ritenere che il punto B sia l'intersezione della perpendicolare per A con la retta di applicazione di $\vec{u}_2$, e chiamiamo quindi con d la distanza AB.
Si possono avere due casi:
a) che $\vec{u}_1$ ed $\vec{u}_2$ sono concordi (fig.29); in tal caso possiamo scrivere:

$$(G - O) = \frac{u_1(A - O) + u_2(B - O)}{u_1 + u_2} \tag{30}$$

Ora poiché il punto O è arbitrario, se si pone una volta O≡A ed una volta O≡B, otteniamo:

$$(G - A) = \frac{u_2}{u_1 + u_2}(B - A) = \frac{u_2}{R}\, d$$

$$(G - B) = \frac{u_1}{u_1 + u_2}(A - B) = -\frac{u_1}{R}\, d \tag{31}$$

da cui si vede che G sta su AB ed è interno ad esso in quanto entrambi i rapporti che compaiono nelle due relazioni sono <1; ed infine si vede pure che

$$\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{u_2}{u_1} \tag{32}$$

ossia che G divide AB in parti inversamente proporzionali ai moduli dei due vettori: sarà quindi più vicino al punto di applicazione del vettore di modulo maggiore.
Per ottenere graficamente il punto di applicazione G del risultante $\vec{R}$ è sufficiente riportare in B il modulo $\vec{u}_1$ in modo che sia concorde con $\vec{u}_2$, e in A il modulo $\vec{u}_2$ in modo che sia invece discorde con $\vec{u}_1$. La congiungente DE taglia in G la retta AB e la similitudine dei triangoli AEG e BDG soddisfa la (32).
Il modulo del risultante è la somma dei due moduli u_1 ed u_2.
b) che $\vec{u}_1$ ed $\vec{u}_2$ sono discordi (fig.30); dobbiamo ora scrivere:

$$(G - O) = \frac{u_1(A - O) - u_2(B - O)}{u_1 - u_2} \tag{30'}$$

e con le stesse sostituzioni otteniamo:

$$(G - A) = -\frac{u_2}{u_1 - u_2}(B - A) = -\frac{u_2}{R}\, d$$

(31')

$$(G - B) = -\frac{u_1}{u_1 - u_2}(A - B) = -\frac{u_1}{R}\, d$$

da cui si vede che G sta ancora su AB e che è esterno ad esso; starà dalla parte di A o di B a seconda se è $u_1 > u_2$ oppure $u_2 > u_1$; anche qui è infine:

$$\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{u_2}{u_1} \qquad \textbf{(32')}$$

ossia che G divide AB in parti inversamente proporzionali ai moduli dei due vettori: il punto G starà ancora più vicino al vettore di modulo maggiore.

Anche in questo caso è possibile ottenere graficamente il punto di applicazione G del risultante $\vec{R}$; si riporta in B il modulo di $\vec{u}_1$ in modo che sia discorde con $\vec{u}_2$, e in A il modulo $\vec{u}_2$ in modo che sia invece concorde con $\vec{u}_1$. La congiungente DE taglia in G la retta AB e la similitudine dei triangoli AEG e BDG soddisfa la (32'). Il modulo del risultante è la differenza dei due moduli u_1 ed u_2.

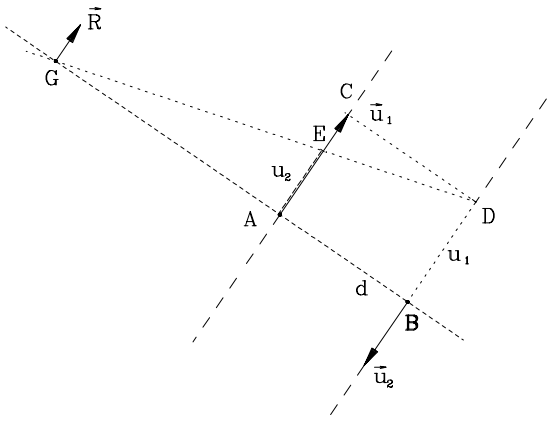


Figura 30

CAPITOLO IV

DERIVATE DI PUNTI E VETTORI

SOMMARIO

1 - Derivata di un punto
2 - Derivata di un vettore libero
3 - Formula di Frenet

L'operazione di derivazione applicata a punti o a vettori è ricorrente, nei calcoli della meccanica, in particolar modo quando tali enti sono funzioni della variabile numerica tempo. La derivazione ci indica, in questi casi, come varia il punto o il vettore al variare della grandezza tempo.

§ 1.- Derivata di un punto.

Se un punto P è funzione della variabile tempo, t, vuol dire che la funzione P(t) ci darà ad ogni istante il valore delle sue coordinate x(t), y(t), z(t) in un riferimento Oxyz le quali consentono di definire la sua posizione nello spazio all'istante considerato.
In base alle convenzioni formali che legano punti e vettori, la differenza:

$$\vec{P}(t+h) - \vec{P}(t) = \Delta\vec{P}$$

rappresenta un ben determinato vettore.
Ha senso, allora, scrivere il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{P}(t+h) - \vec{P}(t)}{h} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

e definirlo come **derivata del punto P rispetto a t**.

La sua generica espressione cartesiana, nello stesso riferimento Oxyz, sarà data da:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} \qquad \textbf{(33)}$$

e la sua valutazione è naturalmente legata alla conoscenza delle espressioni analitiche di x(t), y(t), z(t).

§ 2.- Derivata di un vettore libero.

In modo analogo per un vettore libero $\vec{u}(t)$ si definisce la sua derivata come:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h}$$

Tuttavia, nell'eseguire la derivata di un vettore, occorre distinguere tre casi:
a) che sia:

$$\vec{u}(t) = u(t)\,\vec{\rho} \qquad \textbf{(34)}$$

ossia, più chiaramente, che la sua variabilità del vettore $\vec{u}(t)$ con il tempo discende dalla variabilità del modulo e non dal suo versore che invece rimane costante.
Avremo in tal caso:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[u(t)\,\vec{\rho}\right] = \frac{du(t)}{dt}\,\vec{\rho} \qquad \textbf{(35)}$$

ottenendo un vettore ancora parallelo al precedente.
b) che sia:

$$\vec{u}(t) = u\vec{\rho}(t) \qquad \textbf{(36)}$$

ossia che, rimanendo costante il modulo di $\vec{u}(t)$, è il suo versore che varia nel tempo.
In questo caso dovremo scrivere:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = u\frac{d\vec{\rho}}{dt} \tag{37}$$

Il vettore che si ottiene è un **vettore perpendicolare** al precedente. Infatti poiché il versore è un vettore di modulo costante dobbiamo poter scrivere:

$$\rho^2 = \vec{\rho} \times \vec{\rho} = \text{cost}$$

Tale espressione, derivata, dà:

$$\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$$

e questo ci fa vedere, appunto, che il versore e la sua derivata sono due vettori perpendicolari fra loro.
c) che sia:

$$\vec{u}(t) = u(t)\,\vec{\rho}(t) \tag{38}$$

ossia, che dipendono dal tempo sia il modulo di $\vec{u}(t)$ che il suo versore. Si avrà, in questo caso, derivando:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[u(t)\,\vec{\rho}(t)\right] = \frac{du(t)}{dt}\,\vec{\rho} + u\frac{d\vec{\rho}}{dt} \tag{39}$$

ottenendo quindi un vettore che avrà un componente avente ancora la direzione del vettore non derivato ed un altro componente che risulta ad esso perpendicolare.

§ 3 - Formula di Frenet.

Come caso particolare di quanto visto nel caso b) del § precedente consideriamo una generica curva la quale presenti in corrispondenza di un arbitrario punto P raggio di curvatura R; la posizione di P sulla curva sia definita dalla coordinata curvilinea s.
Indichiamo con $\vec{\tau}$ il versore tangente alla curva in P e con $\vec{n}$ il versore della normale in P positivo se orientato verso il centro di curvatura O: cerchiamo un'espressione per la derivata d $\vec{\tau}$/ds.
Sia P' il punto che sulla curva si trova a distanza ds: in P' il raggio di curvatura è ancora R ma i versori $\vec{\tau}$ ed $\vec{n}$ saranno ruotati di un angolo dϑ tale che sia ds=Rdϑ.
Ne segue che si ha:

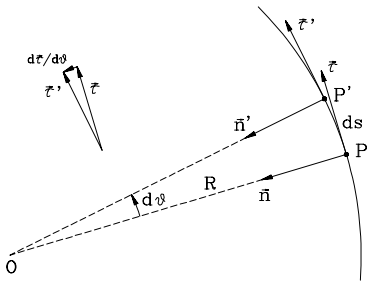


Figura 31

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{\tau}}{d\vartheta} = \frac{1}{R}\vec{n} \qquad \textbf{(40)}$$

essendo, ovviamente, $d\vec{\tau} = d\vartheta\,\vec{n}$.
La precedente espressione è la prima delle formule di Frenet e rappresenta il legame che esiste fra il versore tangente ad una curva in un punto ed il corrispondente versore normale.

CAPITOLO V

NOZIONI FONDAMENTALI DI CINEMATICA

SOMMARIO

1 - Posizione di un punto
2 - Velocità di un punto
3 - Accelerazione di un punto
4 - I moti rigidi.
5 - Formule di Poisson.
6 - Formula fondamentale dei moti rigidi. Asse del Mozzi.
7 - Moto composto di un punto

La cinematica è quella parte della meccanica che si prefigge di studiare il moto dei corpi prescindendo dalle cause che lo hanno generato.

Per "studio del moto" si intende, in questo ambito, riuscire a disporre di una relazione matematica capace di descrivere le diverse posizioni assunte dal corpo con il trascorrere del tempo, in modo che esse siano rappresentabili numericamente (o graficamente).

Occorre, inoltre, chiarirsi come intendere il corpo quando se ne voglia studiare il moto: scegliere di considerare un corpo, comunque esteso, come un semplice punto materiale o nella sua interezza, rigido o deformabile, dipende quasi sempre dallo scopo che ci si prefigge attraverso quello studio; la scelta dipenderà, in definitiva da un bilancio "economico" fra la precisione che si vuole ottenere nei risultati e le difficoltà che occorre superare per conseguirla.

Fatta questa scelta, lo studio del moto del corpo, in termini analitici, sarà possibile solo se le sue diverse posizioni siano individuabili per mezzo di un riferimento, e biunivocamente corrispondenti alla variabile tempo: il riferimento, generalmente, è costituito da una terna di assi cartesiani ortogonali, ma può anche essere comodo, a seconda dei casi, servirsi di ascisse curvilinee o coordinate cilindriche o altri particolari riferimenti.

§ 1.- Posizione di un punto.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane, la posizione assunta, al variare del tempo, da un punto P, sia esso un punto materiale o un punto appartenente ad un corpo, è espressa da una relazione del tipo:

$$P = \mathrm{P}(t) \qquad \textbf{(41)}$$

il che esprime, in forma sintetica, che se, a un dato istante, x, y, z sono le coordinate di P in quel riferimento, esistono tre relazioni:

$$x = \mathrm{x}(t) \quad y = \mathrm{y}(t) \quad z = \mathrm{z}(t) \qquad \textbf{(42)}$$

che, per ogni valore della variabile tempo, t, danno il valore delle tre coordinate di P e quindi ne individuano la posizione (fig.1).

Le (42) intese come luogo dei punti dello spazio occupati dal punto P al variare del tempo, t, costituiscono la **traiettoria** del punto considerato.
Ne segue, ovviamente, che alla infinità dei punti che costituiscono un dato corpo corrisponde, durante il suo moto, una infinità di traiettorie ciascuna identificata da una relazione come la (41) ossia un sistema del tipo indicato in (42).

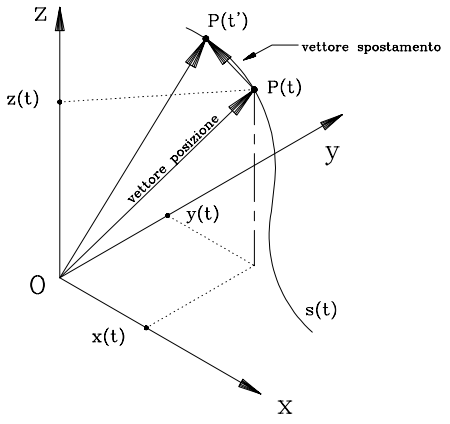


Figura 1

Se si considera un vettore avente il primo estremo nell'origine della terna cartesiana di riferimento ed il secondo estremo in P, la posizione di P, all'istante t, è identificata dal **vettore posizione** (P-O); se in un istante successivo, t', il punto si è portato in P', il vettore (P'-O) è il vettore rappresentativo della nuova posizione del punto.
Il vettore differenza (P'-P) è, allora, il **vettore spostamento** relativo al moto di P fra gli istanti t e t'.

Identificata la traiettoria di un punto P, può essere comodo introdurre una ascissa curvilinea s per identificare su di essa la posizione di P attraverso la cosiddetta **equazione oraria del moto**:

$$s = \mathrm{s}(t) \qquad \textbf{(43)}$$

per mezzo della quale esprimere la posizione del punto P come:

$$P = \mathrm{P}(s) \qquad \textbf{(41')}$$

relazione che, in analogia a quanto detto prima, corrisponde alle tre equazioni:

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s) \tag{42'}$$

Sostituendo la (43) nella (41'), o nelle (42'), appare chiaro che la posizione di P si può pensare come funzione del tempo attraverso l'ascissa curvilinea s.

§ 2.- Velocità di un punto.

Per velocità di un punto P lungo la sua traiettoria si intende la rapidità con cui esso si sposta su questa da una posizione ad un'altra.
Il vettore spostamento visto al § precedente dà la indicazione della posizione di P in due istanti successivi, ma dà anche, con la sua direzione ed il suo verso, il "modo" con cui il punto si è portato da P a P'.

Se l'intervallo di tempo t=(t'-t) che occorre al punto per portarsi da P a P' è un intervallo di tempo finito, il rapporto fra il vettore spostamento (P'-P) ed il corrispondente intervallo di tempo Δt è il vettore **velocità media** del punto in quell'intervallo di tempo o fra quei due punti della traiettoria.

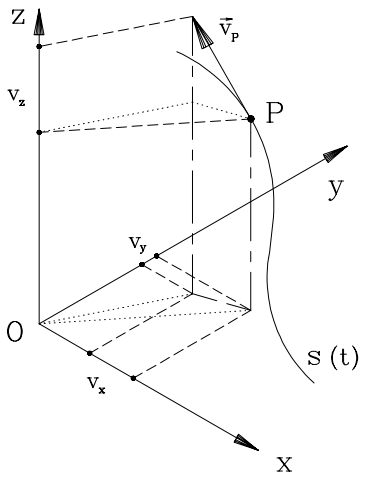


Figura 2

Ossia:

$$\left(\vec{v}_P\right)_m = \frac{P(t') - P(t)}{t' - t} = \frac{(P' - P)}{\Delta t} \tag{44}$$

e la direzione ed il verso di questo vettore sono i medesimi del vettore spostamento.

E' facile comprendere quindi che la **velocità istantanea** si avrà quando si farà tendere a zero l'intervallo di tempo entro il quale si osserva lo spostamento del punto. Dovremo cioè scrivere per la velocità istantanea:

$$\vec{v}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t') - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} \tag{45}$$

Ora, (fig.2), se la posizione del punto è espressa in forma cartesiana attraverso le (42), le **componenti cartesiane della velocità** di P saranno date da:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \tag{46}$$

Se invece la traiettoria del punto è stata espressa attraverso l'ascissa curvilinea s(t), la (45) si scrive:

$$\vec{v}_P = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{\tau} \tag{47}$$

avendo indicato con $\vec{\tau}$ il versore dP/ds, versore che è tangente alla traiettoria di P e diretto, nel verso delle s crescenti se è $\dot{s} > 0$ **(moto progressivo)**, oppure nel verso delle s decrescenti, se è $\dot{s} < 0$ **(moto retrogrado)**. La derivata $\dot{s}$ dell'ascissa curvilinea si chiama **velocità scalare** di P. Se poi fosse $\dot{s} = \text{cost}$ il moto di P sarebbe un **moto uniforme**.

§ 3.-Accelerazione di un punto.

Se si esclude il caso di moto uniforme su traiettoria rettilinea, ad ogni posizione di P lungo la sua traiettoria corrisponde un diverso vettore velocità, diverso per modulo, per direzione o per verso o per una qualsiasi combinazione di tali caratteristiche.

Il vettore velocità di P è quindi, in generale, un vettore variabile al variare del tempo. Tale variabilità è espressa dal **vettore accelerazione** di P, ossia da:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt}$$

a cui corrispondono le **componenti cartesiane dell'accelerazione**:

$$\left(a_P\right)_x = \ddot{x}_P = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \left(a_P\right)_y = \ddot{y}_P = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \left(a_P\right)_z = \ddot{z}_P = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{48}$$

Se consideriamo poi il caso in cui la traiettoria del punto sia espressa attraverso l'ascissa curvilinea s(t), possiamo definire, in modo analogo a quanto visto per il caso della velocità, anche la **accelerazione scalare** $\ddot{s}(t)$ come derivata seconda dell'ascissa curvilinea s(t).

Se l'accelerazione scalare è costante, $\ddot{s} = \text{cost}$, il moto del punto si dirà uniformemente accelerato o ritardato dipendentemente dal segno. Inoltre si può dedurre che, se velocità ed accelerazione hanno lo stesso segno il punto ha un **moto accelerato**, mentre se velocità ed accelerazione hanno segno opposto il moto del punto sarà **ritardato**.

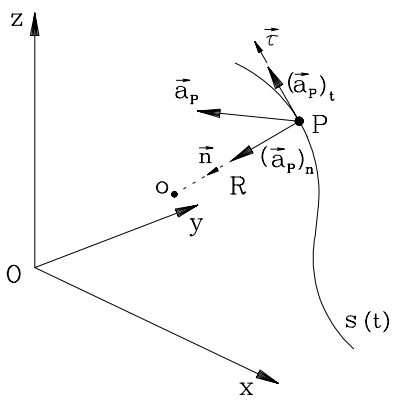


Figura 3

Di particolare interesse è poi (fig.3) considerare l'espressione che si ottiene effettuando l'operazione di derivazione sulla (47). per la quale si dovrà tener conto che al variare del tempo t, è variabile sia il termine $\dot{s}$ che l'orientamento del versore .
Si ottiene, ricordando (v. cap. IV §3) che è:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

una espressione per l'accelerazione del punto P del tipo:

$$\vec{a}_P = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} \qquad \textbf{(49)}$$

essendo ρ =OP il raggio di curvatura della traiettoria di P all'istante considerato.
Da questa si osserva allora che il vettore accelerazione di P sta nel piano che contiene la curva sua traiettoria, e consta di **due componenti**: il primo, detto **accelerazione tangenziale**, orientato secondo la tangente alla traiettoria, tiene conto della variazione del modulo della velocità; il secondo, detto **accelerazione normale**, orientato secondo la normale principale e verso il centro di curvatura della traiettoria, tiene conto della variazione che subisce la direzione del vettore velocità.

Pertanto si potranno anche avere i seguenti due casi estremi: l'annullarsi del componente tangenziale, quando il moto si svolge a velocità costante (s=cost); oppure l'annullarsi del componente normale quando la traiettoria del punto sia tale, in quell'istante, da essere $1/\rho$ =0 (ossia rettilinea o, in generale, che presenti un punto di flesso).
Ed essendo questi i due casi limite possibili, si comprende che il vettore accelerazione di un punto P sarà sempre contenuta nel semipiano individuato dalla tangente alla sua traiettoria e dal punto centro di curvatura di questa.

§ 4.- I moti rigidi.

Si definisce **corpo rigido,** o semplicemente rigido, un corpo che, per sua costituzione è tale per cui risulta sufficientemente valida l'ipotesi che la distanza fra due qualsiasi dei suoi punti non varia nel tempo.

Se un siffatto corpo è in moto, tale moto si definisce appunto **moto rigido**.

Quali siano le implicazioni che discendono dalla ipotesi di rigidità sarà visto più avanti; ciò che intanto si può dire, in termini generali, è che la sua posizione nello spazio (e quindi quella di tutti i punti che gli appartengono) risulterà completamente definita quando si conoscerà, rispetto ad un arbitrario riferimento fisso, la posizione di un suo punto Ω e l'*orientazione* di un qualsiasi elemento rigido che sia ad esso solidale: quest'ultimo si può individuare, per generalità, in un secondo riferimento che sia solidale al corpo stesso e che, per comodità, abbia origine proprio in Ω.

Sia Oxyz (fig.4) il riferimento fisso di versori $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, e sia quindi Ωξηζ il riferimento solidale al rigido di versori $\vec{\lambda}\vec{\mu}\vec{\nu}$, la cui orientazione è definita dagli angoli, α,β,γ, che essi formano con i corrispondenti versori $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ del riferimento fisso.

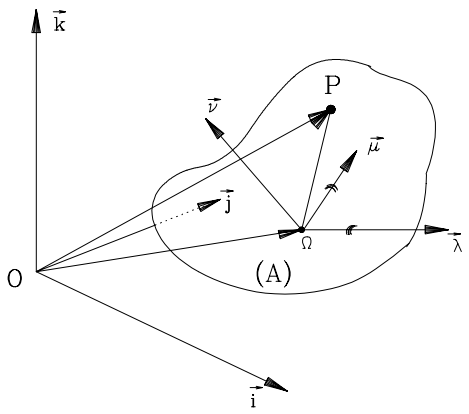


Figura 4

La posizione di un generico punto P che appartenga al corpo (A), nel riferimento Oxyz, può essere determinata attraverso la posizione del punto Ω, che appartiene anch'esso al rigido e dalla posizione che lo stesso punto P ha sul rigido, ossia nel riferimento Ωξηζ che è solidale ad (A).

Esprimendo tutto ciò in termini vettoriali, la posizione di P, ad un dato istante, sarà data (fig.4) dal vettore:

$$P - O = (\Omega - O) + (P - \Omega) \qquad \textbf{(50)}$$

che esprime come la posizione di P rispetto al riferimento fisso si ottiene dalla somma del vettore che dà la posizione di un punto qualsiasi Ω di (A), in cui è fissata l'origine del riferimento Ωλμν, e del vettore che dà la posizione del punto P sul corpo (A).

Chiamando con ξ,η,ζ le coordinate di P nel riferimento Ωλμν, e con x_o, y_o, z_o le coordinate di Ω nel riferimento fisso, la (50) si scrive:

$$P - O = \left(x_o \vec{i} + y_o \vec{j} + z_o \vec{k}\right) + \left(\xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu}\right) \quad \textbf{(51)}$$

Derivando questa espressione rispetto al tempo, otterremo la **velocità di P** nella forma:

$$\vec{v}_P = \left(\dot{x}_o \vec{i} + \dot{y}_o \vec{j} + \dot{z}_o \vec{k}\right) + \left(\xi \frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta \frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta \frac{d\vec{\nu}}{dt}\right) \quad \textbf{(52)}$$

dove si può notare che i tre termini nella prima parentesi esprimono la velocità del punto Ω, mentre quelli che compaiono nella seconda sono i tre termini che tengono conto della variazione dell'orientamento della terna mobile.
La (52) allora può scriversi anche come:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \left(\xi \frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta \frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta \frac{d\vec{\nu}}{dt}\right) \quad \textbf{(53)}$$

la quale mette chiaramente in evidenza che, se il rigido è in moto, la velocità di un suo punto P dipende sia dalla velocità del punto Ω quanto dal moto del rigido nel suo insieme.
Quest'ultimo moto, legato alla variazione nel tempo della orientazione dei versori $\vec{\lambda}\vec{\mu}\vec{\nu}$, è certamente una rotazione che avverrà secondo un certo asse, con un certo verso e con una certa intensità: è ciò che basta per definire un vettore **velocità angolare**, $\vec{\omega}$; che descriverà appunto il **moto rotatorio del rigido** nel suo insieme. Il verso del vettore $\vec{\omega}$ definisce il verso della rotazione, oraria o antioraria, secondo la regola usuale della vite.
I due vettori $\vec{v}_\Omega$ ed $\vec{\omega}$; sono i vettori caratteristici del più generale **moto rigido nello spazio** che risulta, allora, dalla composizione di una traslazione ($\vec{v}_\Omega$) e da una rotazione ($\vec{\omega}$), e che, quindi, prende il nome di **moto rototraslatorio**.
Possono esistere ovviamente anche quei casi particolari in cui uno dei due vettori caratteristici sia nullo: quello in cui il rigido si trova in moto traslatorio, in cui è $\vec{\omega}$=0 mentre tutti i suoi punti hanno la medesima velocità $\vec{v}_\Omega$; oppure quello in cui il rigido si trova in moto rotatorio, in cui è $\vec{v}_\Omega$=0 mentre tutti gli altri punti hanno velocità diversa da zero.

Derivando ancora la (52), essendo ξ,η,ζ costanti, si ottiene:

$$\vec{a}_P = \left(\ddot{x}_o \vec{i} + \ddot{y}_o \vec{j} + \ddot{z}_o \vec{k}\right) + \left(\xi \frac{d^2\vec{\lambda}}{dt^2} + \eta \frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\vec{\nu}}{dt^2}\right)$$

che è l'accelerazione del punto P appartenente al rigido in moto, ossia:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \left(\xi \frac{d^2\vec{\lambda}}{dt^2} + \eta \frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\vec{\nu}}{dt^2} \right) \qquad \textbf{(54)}$$

L'accelerazione del punto P sarà, allora, la somma dell'accelerazione di un altro punto dello stesso sistema rigido e di una accelerazione che dipende dalla rapidità con cui si modifica la variazione dell'orientamento della terna mobile ad esso solidale.

§ 5. - Formule di Poisson.

La (53) del precedente § può essere scritta in modo più sintetico facendo comparire esplicitamente il moto del rigido nel suo insieme; occorre disporre di una relazione tra il vettore $\vec{\omega}$ e le derivate temporali dei versori $\vec{\lambda}\vec{\mu}\vec{\nu}$.
Le derivate rispetto al tempo di questi versori possono essere scritte, intanto, nelle loro componenti, come:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\lambda}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\lambda} \right)\vec{\lambda} + \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\mu} \right)\vec{\mu} + \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\nu} \right)\vec{\nu} \\
\frac{d\vec{\mu}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\lambda} \right)\vec{\lambda} + \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\mu} \right)\vec{\mu} + \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\nu} \right)\vec{\nu} \\
\frac{d\vec{\nu}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\lambda} \right)\vec{\lambda} + \left(\frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\mu} \right)\vec{\mu} + \left(\frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\nu} \right)\vec{\nu}
\end{aligned} \qquad \textbf{(55)}$$

nelle quali però sappiamo (§2 Cap. IV) che è:

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\lambda} = 0 \quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\mu} = 0 \quad \frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\nu} = 0$$

Le (55), quindi, corrispondono di fatto alle:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\lambda}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\mu} \right)\vec{\mu} + \left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt} \times \vec{\nu} \right)\vec{\nu} \\
\frac{d\vec{\mu}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\lambda} \right)\vec{\lambda} + \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{\nu} \right)\vec{\nu} \\
\frac{d\vec{\nu}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\lambda} \right)\vec{\lambda} + \left(\frac{d\vec{\nu}}{dt} \times \vec{\mu} \right)\vec{\mu}
\end{aligned} \qquad \textbf{(54')}$$

D'altra parte, la condizione di perpendicolarità fra i versori:

$$\vec{\lambda} \times \vec{\mu} = 0 \quad \vec{\mu} \times \vec{\nu} = 0 \quad \vec{\nu} \times \vec{\lambda} = 0$$

implica, per derivazione, che deve essere pure:

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\times\vec{\mu}+\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{\lambda}=0$$
$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{\nu}+\frac{d\vec{\nu}}{dt}\times\vec{\mu}=0$$
$$\frac{d\vec{\nu}}{dt}\times\vec{\lambda}+\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\times\vec{\nu}=0$$

e pertanto le (54') si possono ancora scrivere come:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\lambda}}{dt}&=\left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\times\vec{\mu}\right)\vec{\mu}-\left(\frac{d\vec{\nu}}{dt}\times\vec{\lambda}\right)\vec{\nu}\\ \frac{d\vec{\mu}}{dt}&=-\left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\times\vec{\mu}\right)\vec{\lambda}+\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{\nu}\right)\vec{\nu}\\ \frac{d\vec{\nu}}{dt}&=\left(\frac{d\vec{\nu}}{dt}\times\vec{\lambda}\right)\vec{\lambda}-\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{\nu}\right)\vec{\mu}\end{aligned}\qquad\textbf{(54'')}$$

Se allora poniamo che sia:

$$\vec{\omega}=\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\times\vec{\nu}\right)\vec{\lambda}+\left(\frac{d\vec{\nu}}{dt}\times\vec{\lambda}\right)\vec{\mu}+\left(\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\times\vec{\mu}\right)\vec{\nu}\qquad\textbf{(56)}$$

possiamo verificare che, effettuando il prodotto vettoriale di questo vettore per ciascuno dei versori $\vec{\lambda}\vec{\mu}\vec{\nu}$, le (54'), e quindi le (55), risultano verificate.
Si ha, cioè, che:

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\lambda}=\frac{d\vec{\lambda}}{dt}\quad\vec{\omega}\wedge\vec{\mu}=\frac{d\vec{\mu}}{dt}\quad\vec{\omega}\wedge\vec{\nu}=\frac{d\vec{\nu}}{dt}\qquad\textbf{(57)}$$

Queste rappresentano le **formule di Poisson** le quali consentono, appunto, di esprimere, in modo sintetico, le derivate temporali dei versori della terna mobile utilizzando il vettore rotazione del rigido in moto.

§ 6.- Formula fondamentale dei moti rigidi. Asse del Mozzi.

Attraverso le formule di Poisson, è possibile ora riscrivere la (53); sostituendovi le (57), si potrà scrivere:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \left(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}\right) \qquad \textbf{(58)}$$

ossia, per confronto con la (50) e la (51):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) \qquad \textbf{(59)}$$

Questa è la **formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi**: essa mostra che la velocità di un punto generico P di un rigido si ottiene aggiungendo alla velocità di un altro suo altro punto Ω la velocità che avrebbe P in un moto puramente rotatorio intorno ad un asse passante per Ω e parallelo ad $\vec{\omega}$.
Si vede allora che il moto più generale di rigido nello spazio è sempre **un atto di moto elicoidale**.

Una rapida riflessione lascia capire come, ad un dato istante, ogni punto P del rigido possiede una sua velocità, risultante dalla (59), e che tali velocità sono diverse da punto a punto; in particolare non può esistere alcun punto che abbia velocità nulla.

Appare lecito chiedersi se esiste almeno un particolare punto P' del rigido la cui velocità sia proprio parallela al vettore $\vec{\omega}$; ossia tale per cui sia:

$$\vec{v}_{P'} \wedge \vec{\omega} = 0 \qquad \textbf{(60)}$$

E' un problema strettamente analogo a quello già visto al §4 del Cap. II, e, poiché formalmente la (60) è uguale alla (13) così come formalmente la (59) è uguale alla (10), seguendo la medesima metodologia, troveremo, analogamente alla (15), che i punti che soddisfano alla (60) saranno quelli per cui:

$$(P' - \Omega) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega}{\omega^2} \qquad \textbf{(61)}$$

Anche qui si può verificare che tutti i punti, e solo essi, appartenenti alla retta passante per P' e parallela ad $\vec{\omega}$ soddisfano la (61); tale retta, cui si dà il nome di **asse del Mozzi**, gode della proprietà di essere il luogo dei punti le cui **velocità hanno modulo minimo**; come si deduce immediatamente dalla (59) sostituendo Ω con P' (cfr. §6 Cap. II).

Se poi accade, in particolare, che la velocità di P' è nulla, è pure nulla, di conseguenza, quella di tutti i punti dell'asse del Mozzi: l'atto di moto del rigido in tal caso è soltanto un atto di moto rotatorio e l'asse del Mozzi diventa l'**asse di istantanea rotazione del rigido**.

Per derivazione della (59) si può ottenere una analoga espressione per la accelerazione dei P.
Si ricava:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - \Omega) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_P - \vec{v}_\Omega\right)$$

e questa, per la stessa (59), si può scrivere:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-\Omega) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-\Omega)]$$

Se poi facciamo intervenire il punto P' dell'asse del Mozzi, per il quale è verificata la (60), la precedente diventa:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-\Omega) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-P'+P'-\Omega)] = \\ &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-\Omega) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-P')] + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P'} = \\ &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-\Omega) + \omega^2 (P-P') \end{aligned} \qquad \textbf{(62)}$$

in cui il risultato tiene conto che nello sviluppo del doppio prodotto vettore, sempre per la (60), risulta nullo il termine contenente $\vec{\omega} \times (P-P')$ giacché i due vettori sono ortogonali.

§ 7.- Moto composto di un punto.

E' assai frequente, nella risoluzione dei problemi di cinematica, trovarsi (fig.5) nelle condizioni di dovere esprimere le caratteristiche cinematiche (velocità e accelerazione) di un punto P di un certo corpo (B) che si muove rispetto ad un altro corpo (A) il quale, a sua volta, si muove in modo indipendente.

E' facile comprendere che il moto complessivo del corpo (B), in queste condizioni, dovrà risentire contemporaneamente sia del moto che egli possiede nei confronti del corpo (A), sia del moto dello stesso corpo (A).

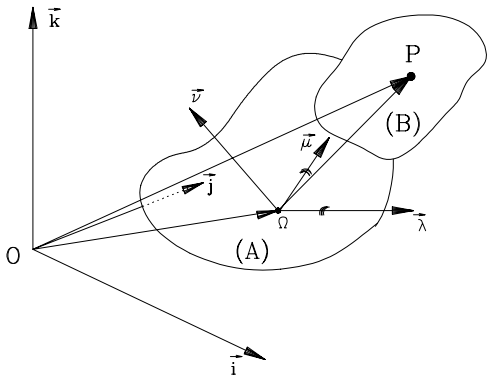


Figura 5

In casi come questi, il moto complessivo del corpo (B) (**moto assoluto**) risulta essere, quindi, un moto composto; e con moto composto si intende che esso risulta dalla sovrapposizione di due moti componenti: quello del corpo (B) rispetto al corpo (A), che prende il nome di **moto relativo** di (B) rispetto ad (A); quello proprio del corpo (A) che, per il corpo (B), prende il nome di **moto di trascinamento** di (B) da parte di (A).

La prima deduzione di carattere generale che si può quindi fare in modo immediato è che *il moto di trascinamento di (B) da parte di (A) coincide in ogni caso con il moto assoluto di (A)*.

Ora, in tali condizioni, per poter esprimere la posizione, ad un

dato istante, di un qualsiasi punto P appartenente a (B) durante il suo moto assoluto (complessivo) sarà sufficiente conoscere, dapprima la configurazione istantanea del corpo (A) e quindi la configurazione assunta, nello stesso istante, dal corpo (B) (e quindi la posizione del suo punto P) rispetto al corpo (A).
Dovendo procedere in termini analitici sarà allora necessario introdurre: un riferimento fisso, Oxyz, rispetto al quale individuare la configurazione di (A), ed un secondo sistema di riferimento, $\Omega\lambda\mu\nu$, solidale ad (A) che ci permetta di esprimere la posizione del corpo (B) rispetto al corpo (A): gli assi di quest'ultimo, per il fatto di essere esso solidale al corpo (A), per effetto del suo moto avranno un orientamento variabile nel tempo.

Per descrivere, in termini vettoriali, la posizione del punto P, ad un dato istante, vale ancora la relazione (50) del §4, ossia:

$$P - O = (\Omega - O) + (P - \Omega)$$

Utilizzando di nuovo come nella (51) le coordinate ξ,η,ζ le coordinate di P nel riferimento mobile $\Omega\lambda\mu\nu$, e le coordinate x_o, y_o, z_o di Ω nel riferimento fisso,scriveremo:

$$P - O = \left(x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}\right) + \left(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}\right)$$

Ma ora, derivando questa espressione rispetto al tempo, per ottenere la **velocità di P** appartenente a (B) **nel suo moto assoluto**, occorre tener presente che le coordinate ξ,η,ζ di P nel riferimento mobile non sono più delle costanti per cui si dovrà scrivere:

$$\vec{v}_P = \left(\dot{x}_o\vec{i} + \dot{y}_o\vec{j} + \dot{z}_o\vec{k}\right) + \left(\xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta\frac{d\vec{\nu}}{dt}\right) + \left(\dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}\right) \quad \textbf{(63)}$$

dove i termini nelle prime due parentesi coincidono con la (52) del § 4 e quindi esprimono la velocità che avrebbe il punto P se fosse solidale al corpo (A), mentre i termini della terza parentesi esprimono la variazione delle coordinate di P nella terna mobile, e quindi la velocità che avrebbe il punto P rispetto al corpo (A) se quest'ultimo fosse fisso.
Possiamo pertanto definire una **velocità di P nel moto relativo di (B) rispetto ad (A)** come:

$$\vec{v}_P^{(r)} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu} \quad \textbf{(64)}$$

ed una **velocità di P nel moto di trascinamento di (B) da parte di (A)** come:

$$\vec{v}_P^{(t)} = \vec{v}_\Omega + \xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta\frac{d\vec{\nu}}{dt} \quad \textbf{(65)}$$

Sinteticamente, allora, la (63) si potrà scrivere come:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} \tag{66}$$

che costituisce il **teorema di composizione delle velocità** per un moto composto.

Il passo successivo è quello di trovare una espressione per l'**accelerazione assoluta** del punto P, cioè l'accelerazione, riferita alla terna Oxyz, del punto P del corpo (B) che si muove di moto composto.

Questa si otterrà, ovviamente, con una ulteriore derivazione, rispetto al tempo, della (63), e si avrà allora:

$$\begin{aligned}\vec{a}_P = &\left(\ddot{x}_o\vec{i} + \ddot{y}_o\vec{j} + \ddot{z}_o\vec{k}\right) + \\ &+\left(\ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\zeta}\vec{\nu} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\xi}\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\vec{\nu}}{dt}\right) + \\ &+\left(\dot{\xi}\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\vec{\nu}}{dt} + \xi\frac{d^2\vec{\lambda}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\vec{\nu}}{dt^2}\right)\end{aligned}$$

e cioè:

$$\begin{aligned}\vec{a}_P \;=\; &\vec{a}_\Omega + \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\zeta}\vec{\nu} + \xi\frac{d^2\vec{\lambda}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\vec{\nu}}{dt^2} + \\ &+ 2\left(\dot{\xi}\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\vec{\nu}}{dt}\right) +\end{aligned} \tag{67}$$

Se, allora, poniamo:

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(r)} &= \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\zeta}\vec{\nu} \\ \vec{a}_P^{(t)} &= \vec{a}_\Omega + \xi\frac{d^2\vec{\lambda}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\vec{\mu}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\vec{\nu}}{dt^2} \\ \vec{a}_P^{(co)} &= 2\left(\dot{\xi}\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \dot{\eta}\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \dot{\zeta}\frac{d\vec{\nu}}{dt}\right)\end{aligned} \tag{68}$$

la (67) si può scrivere, in forma sintetica, come:

$$\vec{a}_P^{(a)} = \vec{a}_P = \vec{a}_P^{(r)} + \vec{a}_P^{(t)} + \vec{a}_P^{(co)} \tag{69}$$

che è la relazione che va sotto il nome di **teorema di Coriolis**.

Analizzando i termini elencati nella (68) vediamo:

- che il primo di essi, $\vec{a}_P^{(r)}$, raggruppa le derivate seconde delle coordinate del punto P nel riferimento mobile, Ωλμν, solidale al corpo (A) e quindi si riferisce al moto relativo del corpo (B) rispetto al corpo (A): prende perciò il nome di **accelerazione di P nel moto relativo** di (B) rispetto ad (A).
- che il secondo, $\vec{a}_P^{(t)}$, raggruppa il vettore accelerazione dell'origine Ω

delle medesima terna ed i termini che tengono conto della variazione seconda nell'orientamento dei suoi versori; poiché la terna mobile è solidale al corpo (A), questo termine descrive l'accelerazione di (A), e pertanto corrisponde alla accelerazione che avrebbe il punto P se il corpo (B) fosse solidale al corpo (A): prende perciò il nome di **accelerazione di P nel moto di trascinamento** di (B) da parte di (A). E' identico, infatti, alla (54) e quindi alla (62).

- che il terzo termine, $\vec{a}_P^{(co)}$, che prende il nome di **accelerazione complementare di P** o **accelerazione di Coriolis**, risulta dalla combinazione delle derivate prime delle coordinate di P rispetto alla terna mobile e delle derivate prime dei versori della terna mobile: una combinazione quindi della velocità di P nel moto relativo di (B) rispetto ad (A) e del moto di (A) che è per (B) il moto di trascinamento da parte di (A).

La (69) rappresenta il **teorema di composizione delle accelerazioni**, in base al quale, **in un moto composto, l'accelerazione di un generico punto è data dalla somma della accelerazione che esso ha nel moto relativo, di quella che esso ha nel moto di trascinamento e di quella di Coriolis**.

CAPITOLO VI

MEMBRI, COPPIE, CONTATTI, MECCANISMI

SOMMARIO

1 - Membri di una macchina.
2 - Il moto in una macchina.
3 - Le coppie.
4 - Classificazione delle coppie.
5 - Tipi di contatto fra le superfici di una coppia.
6 – Coppie inferiori e superiori.
7 - Catene cinematiche.
8 - Meccanismi.
9 - Gradi di libertà di un meccanismo piano.

§ 1. - Membri di una macchina.

Le varie parti di una macchina, allorquando siano suscettibili di moto relativo l'una rispetto all'altra, nella terminologia corrente della Meccanica applicata si dicono membri della macchina. Se uno di tali membri è, in particolare, fisso, esso costituisce il telaio della macchina stessa.

Un **membro** della macchina può essere **solido** (biella, stantuffo di una macchina alternativa), **liquido** (il lubrificante, l'acqua in una pompa), o **aeriforme** (i gas in espansione all'interno del cilindro di una motore alternativo).

A sua volta un membro **solido** può essere **rigido** o **deformabile**, e se è deformabile può a sua volta essere **elastico** (una molla), **anelastico** (l'asfalto sotto un compressore stradale), o **flessibile** (una cinghia, una catena) se può essere disposto con il suo asse geometrico secondo una linea qualsiasi senza per ciò aver necessità di dover fornire lavoro esterno.

Una tale **classificazione** è tuttavia puramente **convenzionale**: a rigore, un membro reale non può essere attribuito esclusivamente ad una di queste categorie. Un membro rigido, ad esempio ha sempre in sé una

certa aliquota di elasticità, e, a seconda delle condizioni in cui lavora, può anche divenire anelastico. Analogamente, un membro flessibile ha pur sempre bisogno, per essere deformato, di ricevere una certa quantità di lavoro esterno e può pure possedere una certa dose di elasticità.

La validità della classificazione è commisurata alla possibilità di pervenire alla definizione di un **modello matematico** del sistema in esame che risulti sufficientemente semplice nelle espressioni analitiche che lo descrivono.

§ 2. - Il moto in una macchina.

Si chiama **moto libero** quello di un corpo che non abbia alcun vincolo materiale con altri corpi, mentre si chiama **moto vincolato** quello di un membro materialmente connesso ad altri e che è da questi cinematicamente condizionato.

Considerati due membri di una macchina, (A) e (B), se si definisce **moto diretto** il moto di (A) rispetto a (B), risulta definito come **moto inverso** (o reciproco) il moto di (B) rispetto ad (A).

Quando un membro, il cui moto è definito come quello che, in un dato verso, fa percorrere ai suoi punti certe traiettorie, se esso, poi, si muove invece in verso opposto, in modo che i suoi punti ripercorrono le medesime traiettorie, si dice che esso è in **moto retrogrado**.

Quando una macchina, partendo da una configurazione iniziale dei suoi membri, dopo aver assunto configurazioni diverse, si ripresenta dopo un certo tempo nella medesima configurazione, si dice che essa ha compiuto un **ciclo di movimento**. Se al termine di ogni ciclo la macchina non si arresta il suo moto si dice **continuo**; se si arresta per un intervallo di tempo finito prima che inizi il ciclo successivo, il moto si dice **intermittente**; se durante il ciclo il suo moto si inverte, il moto si dice **alternativo**.

Se cicli successivi sono compiuti secondo una identica legge del moto, il moto si dice **periodico**. In tal caso si può avere **regime periodico** se la variazione di energia cinetica in un tempo pari al periodo, o ad un multiplo di questo, è nulla; mentre se l'energia cinetica si mantiene costante nel tempo siamo nel caso di **regime uniforme** (o assoluto).

Quando il funzionamento di una macchina non è in condizioni di regime essa si trova in condizioni di **moto vario**, (generalmente un **transitorio**) situazione tipica delle fasi di avviamento o di arresto.

Quando una macchina viene considerata funzionante in assenza di fenomeni dissipativi si dice che essa è in condizioni di **funzionamento ideale**; viceversa si dice che è in condizioni di **funzionamento reale**.

§ 3. - Le coppie.

Per poter avere trasmissione di lavoro fra **due membri** di una macchina, questi devono essere innanzitutto a contatto; e lo sono, in generale, attraverso due superfici, sagomate in modo opportuno, che prendono il nome di **superfici coniugate**. L'insieme delle due superfici coniugate, fra le quali esiste moto relativo, ed attraverso le quali si trasmettono le forze, si definisce **coppia**.

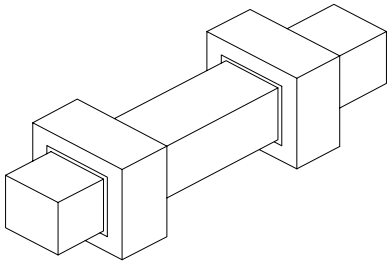


Figura 1

In una macchina, le coppie costituiscono elemento fondamentale per il suo studio: in generale, infatti, tutte le informazioni a ciò utili si possono ricavare proprio in corrispondenza di esse, punto di transito sia per gli spostamenti che per le forze, elementi costitutivi del lavoro che i membri si trasmettono. Ed è per questo che, nelle schematizzazioni della cinematica, gli elementi di collegamento fra le coppie non vengono caratterizzati.

Si definisce **coppia cinematica** quella che lascia a ciascun membro **un solo grado di libertà**, ossia una sola possibilità di moto relativo; se ciò non accade, non siamo in presenza di una coppia cinematica.

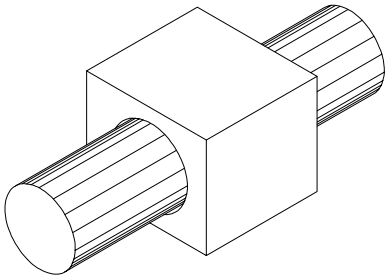


Figura 2

Una coppia (fig. 1) costituita da uno stelo prismatico e dalla guida in cui esso scorre è una coppia cinematica; non è coppia cinematica (fig. 2) quella costituita da uno stelo cilindrico e dalla sua guida. In questo secondo caso, infatti, lo stelo oltre a poter scorrere lungo il suo asse ha anche la possibilità di ruotare intorno ad esso; ha quindi due gradi di libertà.

§ 4. - Classificazione delle coppie.

Guardando al **tipo dei membri** che vengono in contatto, le coppie possono distinguersi in coppie **rigide**, se entrambi i membri che formano coppia sono rigidi, coppie **rigido-flessibile**, se uno dei membri è rigido e l'altro flessibile, **rigido-fluido**, se si è in presenza di un fluido in contatto con un rigido, ecc..

Per tutti i tipi di coppie, se si fa riferimento al **tipo di vincolo** che esse realizzano, si possono distinguere coppie in cui **un membro è fisso mentre l'altro è mobile**, oppure coppie in cui sono **mobili entrambi** gli elementi.

Dal **punto di vista cinematico** è più interessante la distinzione fra:

- **coppie indipendenti**, (fig.1), in cui la forma stessa delle superfici coniugate assicurano, nel moto relativo, un solo grado di libertà (stelo prismatico);
- **coppie dipendenti**, in cui la forma delle superfici coniugate non assicura, di per sé, un unico grado di libertà, ma questo viene ottenuto indirettamente tramite l'imposizione di ulteriori vincoli (stantuffo-cilindro + spinotto-biella-manovella-telaio);

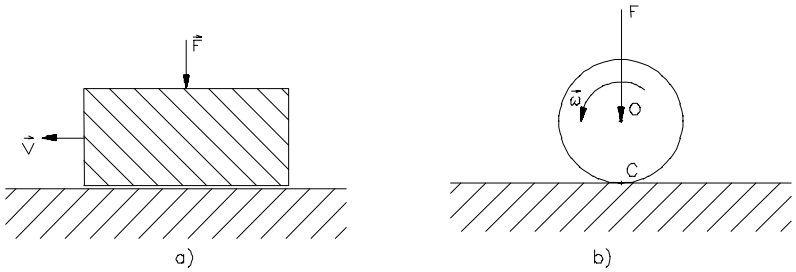


Figura 3

- **accoppiamenti di forza**, (fig.3), in cui la geometria dei membri a contatto assicura solamente un vincolo unilaterale incompleto, ed in cui l'unico grado di libertà si ha solo se esiste una forza e-sterna agente su uno dei membri (**forza di chiusura**) che garantisca la permanenza del contatto o il verificarsi di particolari condizioni di moto.

§ 5. - Tipi di contatto fra le superfici di una coppia.

Caratteristica comune di tutte le coppie è la circostanza che, in assenza di punti singolari, le loro superfici presentano sempre, nel punto di contatto, un **piano tangente comune**; la normale a tale piano passante per quel punto si chiama **normale di contatto**.

Sulla base della natura geometrica del contatto le coppie possono presentare:

- **contatti puntiformi** (come nel caso dei cuscinetti a sfere);
- **contatti lineari** (come nel caso dei cuscinetti a rulli);

- **contatti superficiali** o di combaciamento (caso delle bronzine).

I primi due tipi, in effetti, esistono solamente, sia detto subito, come semplice astrazione teorica perché, in generale, la deformabilità dei materiali a contatto genera localmente una certa areola attraverso la quale ha effettivamente luogo il contatto e sulla quale esiste una distribuzione di pressioni che possono raggiungere anche valori elevati; i contatti superficiali presentano invece una più estesa ripartizione delle pressioni e quindi, a parità di forza scambiata, valori più bassi di queste.

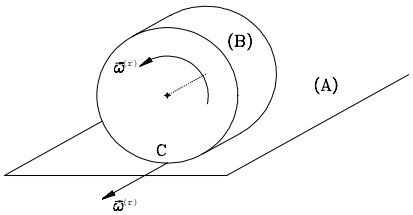


Figura 4

Una ulteriore distinzione può essere fatta riferendosi ai **caratteri cinematici** della coppia stessa, ovverosia al tipo di moto relativo che si può realizzare fra i due membri a contatto: si possono avere, allora, contatti di **rotolamento**, contatti di **strisciamento**, contatti d'**urto**.

Se si hanno due membri (A) e (B) in contatto fra loro, si è in presenza di un **contatto di rotolamento** quando l'atto di moto relativo di uno dei due membri, per es. (B), rispetto all'altro, (A), è tale per cui nel punto C di contatto, all'istante considerato, si ha:

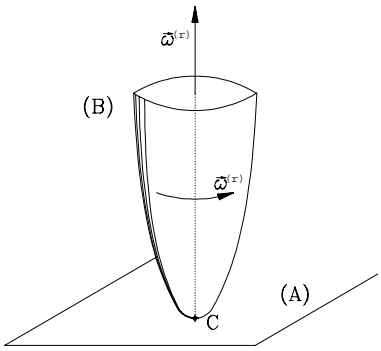


Figura 5

$$\vec{v}_C^{(r)} = 0$$

mentre rimane diversa da zero la velocità di tutti gli altri punti di (B). L'atto di moto è, in tal caso, un **atto di moto rotatorio** intorno ad una retta passante per il punto di contatto C.

A seconda della giacitura di tale retta rispetto al piano tangente comune di contatto in C si può avere: **rotolamento puro** (fig.4), se l'asse istantaneo della rotazione giace su tale piano; **prillamento puro** (fig.5) se l'asse istantaneo della rotazione è disposto perpendicolarmente al piano tangente; **rotolamento e prillamento** (fig.6), quando l'asse istantaneo della rotazione è comunque inclinato rispetto

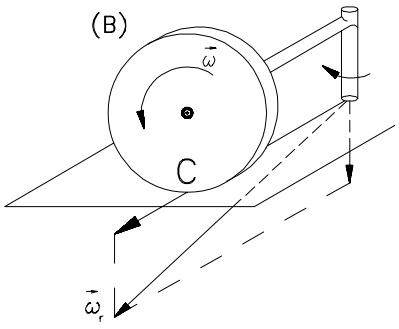


Figura 6

al piano tangente: in tal caso si possono individuare separatamente la componente di rotolamento (sul piano) e la componente di prillamento (perpendicolare al piano tangente).

Si è, invece, in presenza di un **contatto di strisciamento puro** quando è possibile individuare sul piano tangente comune di contatto una retta di versore $\vec{\tau}$ tale per cui, per il punto C di contatto, si può scrivere:

$$\vec{v}_C^{(r)} = v_c^{(r)}\vec{\tau} \quad v_c^{(r)} \neq 0$$

ossia che la velocità del punto di contatto C nel moto relativo dei due membri (A) e (B) giace proprio sul piano tangente comune (fig.7).

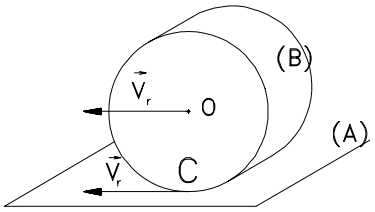


Figura 7

Discende da questa circostanza una caratteristica del contatto di strisciamento puro: le velocità assolute di due punti in contatto di strisciamento puro hanno la medesima componente lungo la normale di contatto.

Consideriamo, infatti, (fig.8) il punto di contatto C fra due membri (A) e (B) che siano fra loro in moto relativo di strisciamento puro, e chiamiamo $\vec{v}_{C,(A)}$ e $\vec{v}_{C,(B)}$ rispettivamente le velocità che ha il punto C, nel moto assoluto dei due membri, quando lo si considera appartenente una volta ad (A) ed una volta a (B).

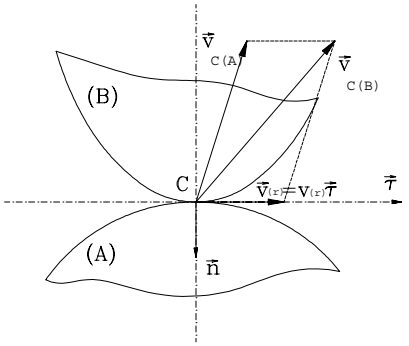


Figura 8

La velocità che avrà il punto C nel moto relativo, per es. di (B) rispetto ad (A), sarà allora data da:

$$\vec{v}_C^{(r)} = \vec{v}_{C,(B)} - \vec{v}_{C.(A)} = v_C^{(r)}\vec{\tau}$$

Ne segue che, se si indica con $\vec{n}$ il versore della normale comune di contatto, sarà:

$$\left(v_C^{(r)}\vec{\tau} \times \vec{n}\right)\vec{n} = 0$$

ossia:

$$\left[\left(\vec{v}_{C,(B)} - \vec{v}_{C,(A)}\right) \times \vec{n}\right]\vec{n} = 0$$

e quindi:

$$\left(\vec{v}_{C,(B)} \times \vec{n}\right)\vec{n} = \left(\vec{v}_{C,(A)} \times \vec{n}\right)\vec{n}$$

Il vettore $\vec{v}_C^{(r)}$ è il vettore velocità di strisciamento di C nel moto relativo di (B) rispetto ad (A) e, se siamo in presenza di strisciamento puro, tutti i punti di (B), diversi da C, avranno la medesima velocità se tale moto è traslatorio, mentre se tale moto è rotatorio avranno velocità proporzionali alla rispettiva distanza da C.

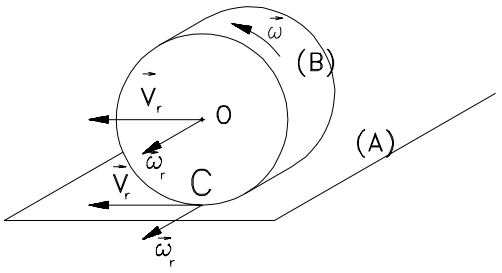


Figura 9

Nel caso in cui il moto relativo risulta composto contemporaneamente da un moto di **rotolamento** e da uno di **strisciamento** (fig. 9) si avrà, nel contatto la sovrapposizione delle caratteristiche cinematiche dei due moti componenti: il vettore $\vec{\omega}$, caratteristico del rotolamento, ed il vettore $\vec{v}_C^{(r)}$, caratteristico dello strisciamento.

Si ha, infine, un **contatto d'urto** quando la $\vec{v}_C^{(r)}$, nell'istante in cui in C ha inizio il contatto, ha una componente non nulla nella direzione della normale di contatto e diretta nel verso per il quale le due superfici tendono ad avvicinarsi.

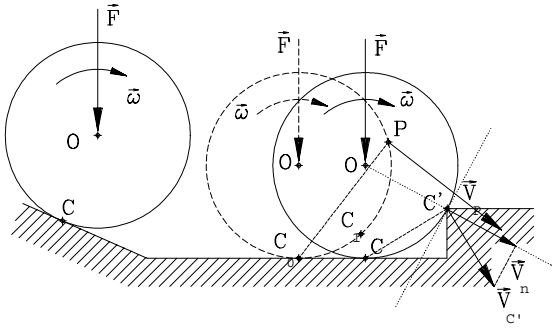


Figura 10

Nel caso, per esempio, di un disco che, rotolando su un piano senza strisciare, viene in contatto con un ostacolo (fig. 10) si ha che, un istante prima del contatto, il suo atto di moto è una rotazione intorno al punto C e quindi il punto C' che andrà in contatto con l'ostacolo avrà in quell'istante una velocità:

$$\vec{v}_{C'} = \vec{\omega} \wedge (C' - C)$$

la quale presenta, lungo la normale di contatto, una componente $\vec{v}_n$ diversa da zero e diretta verso l'ostacolo; tale componente, data la non compenetrabilità dei corpi, deve annullarsi istantaneamente (il punto C' diventa improvvisamente centro istantaneo di rotazione) e di qui l'urto.

In realtà, poiché esiste sempre una certa deformabilità dei corpi, l'annullarsi della $\vec{v}_n$ si verifica in un intervallo di tempo finito e quindi anche la forza che i due corpi si scambiano durante l'urto è grande ma anch'essa finita.

In relazione a ciascuno di questi tipi di contatto si possono fare alcune considerazioni di natura dinamica.

Il **contatto di rotolamento** è quello che richiede il **minor dispendio di energia, ma,** per il fatto che esso avviene per punti o per linee, comporta il dover ricorrere a materiali con caratteristiche meccaniche elevate poiché nel contatto si manifestano **carichi locali elevati**.

Il **contatto di strisciamento** è quello che richiede la maggior quantità di energia in quanto la presenza nel contatto di una $\vec{v}_C^{(r)}$ non nulla è legata al manifestarsi di **fenomeni dissipativi** più o meno accentuati ma sempre presenti (attrito asciutto o mediato).

I **contatti d'urto** sono quelli in cui si manifestano forze e deformazioni di notevole entità e sono quindi, **generalmente, da evitarsi** in quanto pericolosi per la vita stessa della macchina; producono, fra l'altro, un rapido logoramento delle parti a contatto, vibrazioni, dispersioni di energia, ecc..

Ciò non toglie, tuttavia, che esistono pure dei casi in cui i contatti d'urto sono appositamente voluti, per es. in macchine come magli, battipalo, o altre, laddove viene sfruttata proprio l'energia che, in seguito all'urto si trasferisce dall'uno all'altro dei membri in contatto.

Conviene infine sottolineare che, poiché il contatto d'urto dà luogo ad un accoppiamento istantaneo, esso è da escludere **ai fini della attuazione di un moto relativo di tipo continuativo**, ricorrendo **esclusivamente**, per ciò, a coppie che presentino **contatti di rotolamento o contatti di strisciamento.**

§ 6. - Coppie inferiori e superiori.

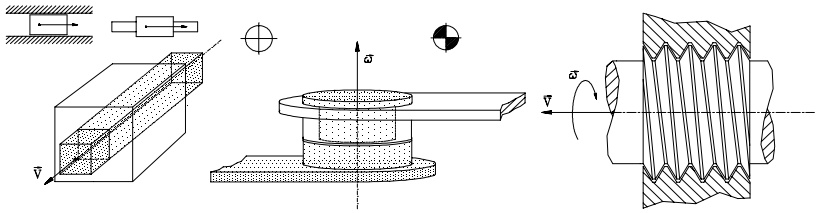
Le coppie cinematiche si distinguono in due categorie: coppie cinematiche elementari (o inferiori) e coppie cinematiche superiori.

Le **coppie cinematiche inferiori** sono le coppie **rigide** (costituite da membri rigidi), **indipendenti**, le cui superfici presentano un **contatto di combaciamento**. Le loro superfici sono identiche e devono poter scorrere fra loro senza deformarsi.

Possono essere solamente di tre tipi: **prismatiche**, **rotoidali**, **elicoidali**.

Sono raffigurate in fig.11 insieme ai simboli cui normalmente si ricorre per identificarle.

Esse, nel moto relativo, realizzano i tre moti rigidi elementari: **tra-**

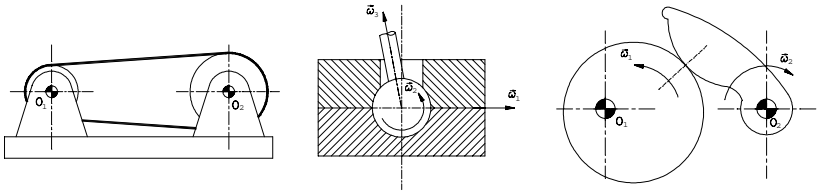


a) coppia prismatica b) coppia rotoidale c) coppia elicoidale

Figura 11

slatorio, **rotatorio**, **elicoidale**. Inoltre godono della proprietà di essere **reciproche**, ossia di poter scambiare la funzione dei due membri che costituiscono la coppia.

Le **coppie cinematiche superiori** sono invece tutte quelle che non sono elementari: comprendono (fig.12) coppie cinematiche **combacianti ma non rigide** (puleggia-flessibile, palettatura di una turbina-fluido, ecc.), coppie cinematiche **rigide, combacianti, ma non indipendenti** (snodo sferico), **rigide ma non combacianti** (ruote dentate o eccentrici), in cui il contatto non è superficiale e per le quali il moto relativo consentito non è un moto rigido elementare.



Accoppiamento puleggia flessibile Snodo sferico Eccentrico

Figura 12

In tal caso le superfici a contatto sono ancora coniugate, ma sono diverse per forma e caratteri geometrici, e si toccano lungo linee variamente distribuite.

Gli elementi che costituiscono una coppia superiore non possono essere scambiati senza, generalmente, alterare la funzionalità della coppia stessa.

§ 7. - Catene cinematiche.

Si dice **catena** l'insieme di due o più membri cinematicamente accoppiati fra loro; se gli accoppiamenti sono ottenuti tutti per mezzo di coppie cinematiche e sono tali per cui, fissato uno qualsiasi dei membri della catena, ne risulta un sistema ad un sol grado di libertà, la catena è

una **catena cinematica.**

Se una catena cinematica è tale per cui i suoi membri presentano ciascuno due soli accoppiamenti con membri adiacenti, essa è una **catena cinematica semplice**; se invece uno o più membri di essa presenta più di due accoppiamenti con membri adiacenti la catena è una **catena cinematica composta** (fig.13).

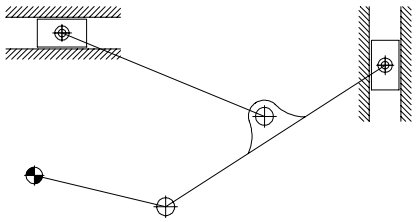


Figura 13

Se l'ultimo membro della catena è accoppiato con il primo membro della stessa sia ha una **catena cinematica chiusa**; diversamente si ha una **catena cinematica aperta**.

§ 8. - Meccanismi.

Una catena cinematica chiusa è un **meccanismo** quando uno dei suoi membri ha funzione di **telaio** ossia è un membro fisso.

In base alla disposizione degli assi di rotazione delle coppie i meccanismi si possono suddividere in:

- **meccanismi piani**, quando gli assi di rotazione delle coppie sono tutti paralleli fra loro;
- **meccanismi sferici**, quando gli assi di rotazione delle coppie sono concorrenti in un punto;
- **meccanismi spaziali**, quando gli assi di rotazione delle coppie sono comunque disposti nello spazio.

Il complesso di più meccanismi collegati fra loro costituiscono una **macchina**.

Il **collegamento** fra due o più meccanismi può essere realizzato **in serie**, quando il cedente del primo è anche movente del secondo; **o in parallelo**, quando i diversi meccanismi abbiano in comune un unico movente o un unico cedente. Nel collegamento in parallelo, se si ha un unico movente il lavoro da esso trasmesso si ripartisce fra i cedenti dei diversi meccanismi, mentre, se si ha un unico cedente, è questo che raccoglie il lavoro che gli perviene da ciascun meccanismo.

Due **meccanismi** diversi si dicono **cinematicamente equivalenti** quando entrambi i moventi ed entrambi i cedenti hanno lo stesso identico moto.

§ 9. - Gradi di libertà di un meccanismo piano.

Per gradi di libertà di un sistema si intende il numero minimo di parametri che occorre in qualche modo fissare per poterne definire in modo inequivocabile la posizione.

Se si ha a che fare con un rigido mobile su un piano (il che vuol dire che si ipotizza che non se ne possa allontanare) la sua posizione è univocamente determinata se è fissata, rispetto ad un qualsiasi riferimento fisso, la posizione di un suo punto e la direzione (angolo) di una retta che gli appartiene.

Ciò vuol dire che un rigido in **moto piano** possiede **tre gradi di libertà**: le due coordinate del punto e l'angolo formato dalla retta rispetto al riferimento usato.

Se il rigido, invece, può muoversi **nello spazio** i suoi gradi di libertà diventano **sei**; per definirne la posizione, infatti, occorrerà fissare la posizione di uno dei suoi punti e la sua orientazione (tre coordinate per il punto e tre angoli).

Per un meccanismo piano, allora, se indichiamo con **m** il numero dei **membri mobili**, con **i** il numero delle **coppie inferiori** presenti, e con **s** il numero delle **coppie superiori** presenti, il numero dei gradi di libertà **g** del meccanismo può essere calcolato con la relazione:

$$g = 3m - 2i - s$$

Infatti ogni membro mobile avrebbe, nel piano, 3 gradi di libertà, ogni coppia cinematica inferiore toglie 2 gradi di libertà al moto relativo fra due di essi, mentre ogni coppia superiore ne toglie uno soltanto.

Particolare attenzione occorre prestare alle **coppie di puro rotolamento** le quali dal punto di vista del contatto andrebbero computate fra le coppie superiori: la condizione che nel punto di contatto C vi sia rotolamento puro implica l'ulteriore condizione che sia $\vec{v}_C^{(r)} = 0$, e ciò riduce ad 1 i gradi di libertà consentiti da questo tipo di coppia. Pertanto è possibile, dal punto di vista pratico, o computare direttamente una coppia di puro rotolamento fra le coppie inferiori, oppure attenersi alle definizioni date e decurtare poi il valore di g ottenuto di un numero pari a quello delle coppie di rotolamento puro presenti nel meccanismo.

Il moto di un meccanismo con g gradi di libertà è definito quando è assegnata l'equazione oraria di un numero di membri pari a g.

CAPITOLO VII

CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI PIANI

(1 - LE VELOCITA')

SOMMARIO

1 - Distribuzione delle velocità nei sistemi rigidi piani
2 - Applicazioni grafiche.
3 - Profili coniugati.
4 - Calcolo delle velocità per un rigido in moto composto.
5 - Applicazioni sui moti composti.
6 - Polare fissa e polare mobile.
7 - Velocità del punto di contatto fra le polari.
8 - Formula di Eulero-Savary e profili coniugati.

§ 1. - Distribuzione delle velocità nei sistemi rigidi piani.

Un sistema di punti materiali si definisce sistema rigido allorquando è possibile ritenere che le mutue distanze fra gli stessi rimangono costanti nel tempo.
In tal caso, fra due punti qualsiasi di esso, A e B, dovrà sussistere la relazione:

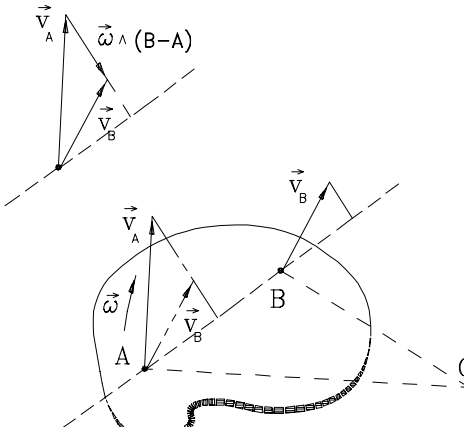
$$(B-A)^2 = (B-A)\times(B-A) = \text{cost}$$

Se deriviamo tale relazione rispetto al tempo otteniamo:

$$\vec{v}_A \times (B - A) = \vec{v}_B \times (B - A)$$

Questa, detta **condizione di rigidità**, configura la caratteristica cinematica fondamentale dei sistemi rigidi: "*le velocità assolute di due punti appartenenti ad uno stesso sistema rigido hanno la stessa componente lungo la congiungente i punti stessi*" (fig. 1).

Si definisce **atto di moto** di un sistema rigido la distribuzione delle velocità dei suoi punti ad un dato istante.



Riprendiamo in esame la (59) del Cap. V:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$$

che, come si è già detto, è la formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi; nel caso di un moto piano i punti P ed Ω, insieme a tutti gli altri punti del rigido, appartengono sempre ad un unico piano, il cosiddetto **piano mobile** (mobile rispetto al **piano fisso** di riferimento o **piano del moto**), e le rispettive velocità devono essere vettori giacenti pure sullo stesso piano.

Ciò deve valere, ovviamente, anche per il vettore $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$: il prodotto vettoriale ci indica allora chiaramente che il vettore $\vec{\omega}$, velocità angolare del sistema rigido, deve essere perpendicolare al piano del moto.

L'atto di moto del rigido, quindi, non è più un atto di moto elicoidale, ma è, più semplicemente, un **atto di moto rotatorio** ed il vettore $\vec{\omega}$, che è il vettore caratteristico del moto d'insieme del rigido, quando si è in presenza di un moto rigido piano, si mantiene sempre parallelo a se stesso.

Dalla stessa (59) può aversi un'ulteriore deduzione chiedendosi se, fra tutti i punti appartenenti al rigido in moto piano e con velocità angolare $\vec{\omega}$, non ve ne sia uno, C, che, almeno ad un dato istante, abbia velocità nulla; per il quale cioè si possa scrivere:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge (C - \Omega) = 0$$

Tale punto esiste, e, tenendo conto del prodotto vettoriale, si può affermare che sarà quel punto C che, situato sulla perpendicolare per Ω a $\vec{v}_\Omega$, si trova a distanza:

$$(\Omega - C) = \frac{v_\Omega}{\omega}$$

Il punto C prende il nome di **centro delle velocità** del rigido, con la caratteristica, quindi, di avere **istantaneamente** velocità nulla.
L'esistenza del punto C, con tale caratteristica, ci può far aggiungere a quanto prima detto che l'atto di moto del rigido è in definitiva un atto di moto rotatorio intorno ad un particolare punto del piano mobile (che può anche non far parte fisicamente del rigido), il centro C appunto, (istantaneo o permanente se il moto avviene intorno ad un punto fisso) ed è caratterizzato dal vettore (cursore) velocità angolare, $\vec{\omega}$, che ne definisce il moto d'insieme.

Se, come caso particolare, accade che il vettore $\vec{\omega}$ è nullo, in tal caso, se almeno un punto del rigido ha velocità diversa da zero, si è in presenza di un atto di moto traslatorio: tutti i punti del sistema avranno, in quell'istante, la stessa velocità, e si può intendere che la rotazione del sistema avviene intorno al punto all'∞ della normale alla direzione del moto.
In tal caso, almeno in un intorno di quella configurazione, il rigido si muoverà mantenendosi parallelo a se stesso.

In virtù di quanto visto, quando sia nota la posizione del punto C sul piano, e se è noto il vettore $\vec{\omega}$, la velocità di un qualsiasi punto A del rigido può scriversi:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C) \qquad \textbf{(69)}$$

Ma l'analoga relazione deve, ovviamente, valere anche per un qualsiasi altro punto B del medesimo sistema rigido; ossia:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C) \qquad \textbf{(69')}$$

ed allora, poiché per un rigido in moto può esistere uno ed un solo punto C, centro delle velocità, dalle (69) e (69') si può far discendere il **teorema di Chasles** che dice (fig.1):
"*Il centro delle velocità di un rigido in moto piano si trova sulla intersezione delle normali alle traiettorie dei punti del rigido stesso*."
Si può comprendere che non fa alcuna differenza fare riferimento alle velocità dei punti del rigido oppure alle loro traiettorie dal momento che, per definizione, la velocità di un punto è tangente alla sua traiettoria.

Un problema successivo può essere quello di trovare, nota la velocità di un generico punto A del rigido, la velocità di un altro suo punto B.
Se facciamo la differenza fra le velocità dei punti A e B, espresse dalle (69) e (69') abbiamo:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (B - C) - \vec{\omega} \wedge (A - C) = \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

e pertanto:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \qquad \textbf{(70)}$$

Le velocità di A e di B differiscono, quindi, (fig.1) per un vettore che è certamente perpendicolare alla congiungente AB; ciò è in accordo con l'ipotesi di rigidità, in quanto il vettore differenza può risultare perpendicolare ad AB solo se i due vettori da sottrarre l'uno dall'altro hanno la medesima componente sulla AB stessa. Il vettore

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

può essere interpretato come la velocità che avrebbe B se il moto del rigido avvenisse intorno ad A; la sua espressione, infatti, mostra che il punto A assume, in tale ambito, la veste di centro della rotazione.
Si può quindi concludere che "se due punti appartengono allo stesso sistema rigido, e siano essi A e B, la velocità di B può essere ricavata aggiungendo alla velocità di A la velocità che avrebbe B se il moto del rigido avvenisse intorno ad A".

La (70) è la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi piani. Si può notare che essa è, e non poteva non esserlo, formalmente identica alla (59) del Cap. V; infatti il modo con cui è stata ricavata la (70) è di fatto sostanzialmente il medesimo di quello che ha consentito, nel §4-Cap.V, di ottenere la (59).

La (70), letta inversamente, mostra anche come la velocità di un generico punto P di un sistema rigido in rotazione intorno ad un qualsiasi punto O può essere sempre scomposta nella velocità che esso avrebbe in un moto rotatorio intorno ad un qualsiasi altro punto A dello stesso rigido, ed in quella che questo avrebbe in una traslazione in direzione perpendicolare alla congiungente OA.
Infatti scritta la velocità di P:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

si può avere:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O + A - A) = \vec{\omega} \wedge (P - A) + \vec{\omega} \wedge (A - O)$$

e cioè:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - A) + \vec{v}_A$$

dove il vettore:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - O)$$

è proprio perpendicolare ad OA.

§ 2. - Applicazioni grafiche.

a). - L'applicazione in forma vettoriale della relazione fondamentale (70) mostra una proprietà utile dal punto di vista del calcolo grafico (fig.2): il triangolo delle velocità, BDE, è simile al triangolo ABC, in quanto il primo risulta formato da lati rispettivamente perpendicolari ai lati del secondo.
I vettori $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ sono, infatti, esprimibili anche come:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C)$$
$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C)$$

e quindi hanno anche i moduli proporzionali alle rispettive distanze AC e BC.
Si può concludere, allora, che, noto il valore di $\vec{\omega}$, i lati del triangolo ABC rappresentano, a tale scala, i vettori velocità $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_{BA}$ ruotati di 90°.

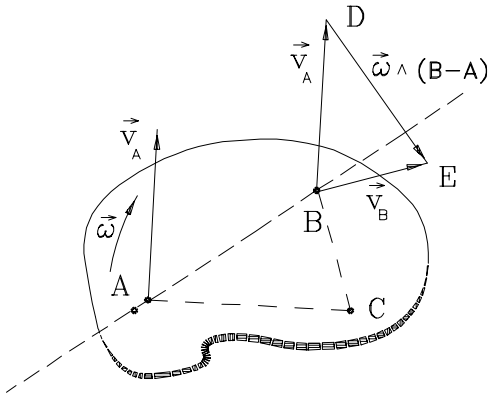


Figura 2

b). - La relazione generale (69) mostra che, nel moto piano, in cui il vettore $\vec{\omega}$ è certamente perpendicolare al piano del moto, esiste una proporzionalità diretta fra il modulo della velocità di P e la distanza PC: questa circostanza consente (fig. 3) la costruzione grafica del vettore $\vec{v}_B$ quando sia noto il vettore $\vec{v}_A$ di un punto A dello stesso sistema rigido cui appartiene B, ed il punto C intorno a cui si svolge l'atto di moto del rigido stesso.
E' sufficiente riportare in B' la distanza di B da C e costruire i due triangoli simili AA'C e BB"C; il segmento B'B" è il modulo di $\vec{v}_B$, vettore da riportare poi in B in direzione perpendicolare

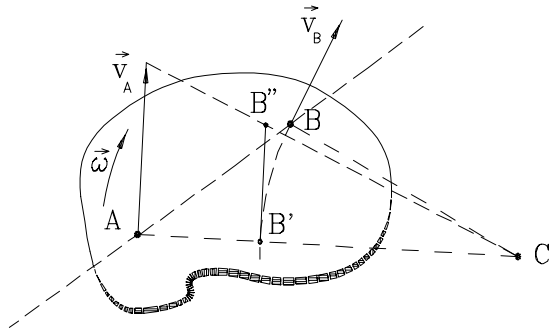


Figura 3

a BC e verso coerente con quello di $\vec{\omega}$.

Osserviamo adesso che il moto di un rigido, quando questo sia parte di un meccanismo, esiste in quanto collegato ad altri membri, generalmente in movimento, i quali, attraverso i vincoli, impongono a ciascuno dei suoi punti delle traiettorie obbligate. In tal caso sarà possibile calcolare la velocità di un punto P di un rigido anche attraverso la conoscenza del raggio di curvatura della sua traiettoria. Se indichiamo con O (fig. 4) il centro di curvatura della traiettoria di P, la sua velocità può esprimersi anche come:

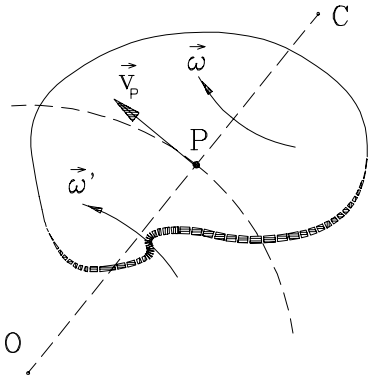


Figura 4

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \wedge (P - O)$$

dove il vettore $\vec{\omega}_1$ è la velocità angolare del raggio vettore (P-O).
Poiché il medesimo punto P, nel medesimo istante, non può avere due diverse velocità, sarà allora vero che:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \wedge (P - O) = \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

Ora, trattandosi di moto piano, i due vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\omega}_1$ sono paralleli fra loro e quindi dovranno pure essere paralleli fra loro i vettori (P-O) e (P-C).
Se ne conclude quindi che **il punto P, il centro di curvatura O della sua traiettoria, ed il centro della rotazione istantanea C** del rigido cui P appartiene **sono sempre allineati** su un'unica retta. E questa è anche una conferma del teorema di Chasles.

§ 3. - Profili coniugati.

Quando un membro rigido (A) è in contatto con un altro membro (B), fisso o mobile, ed ha, rispetto ad esso, un moto relativo di **strisciamento** (né di puro rotolamento né di urto), le superfici a contatto costituiscono nel piano del moto una coppia di profili coniugati, σ_f, σ_m (fig.5).
Poiché siamo in presenza di strisciamento, la velocità del punto di contatto di (A), nel moto rispet-to a (B), deve avere la direzione della tangente comune ai due profili;

e poiché anche per tale punto deve valere la relazione generale:
$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$
se ne deduce che il punto C deve trovarsi sulla normale alla $\vec{v}_P$ passante per P; pertanto possiamo affermare che **il centro della rotazione istantanea si trova sempre sulla normale comune ai profili coniugati**.

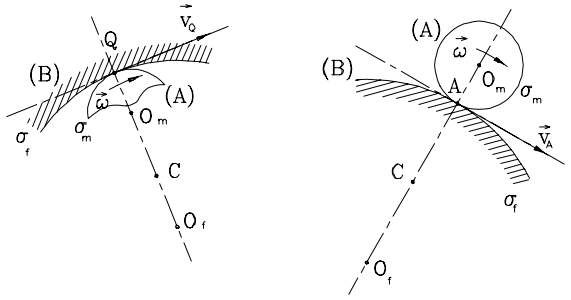
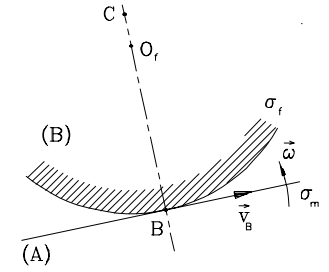


Figura 5

Possiamo anche aggiungere che, poiché la normale ai profili deve contenere anche i centri di curvatura O_f ed O_m, rispettivamente di σ_f e di σ_m, su questa stessa retta troveremo: punto di contatto fra i profili, i loro centri di curvatura ed il punto C.

Anche per il caso in cui la coppia di profili coniugati sia costituita da una retta e dal profilo da essa inviluppato nel suo moto oppure per quello in cui la coppia sia costituita da un punto e dalla sua traiettoria (fig.6) vale quanto sopra.



Sono i casi particolari in cui il profilo mobile σ_m ha raggio di curvatura ∞, nel primo caso, oppure raggio di curvatura nullo, nel secondo.

Tuttavia la particolarità riguarda esclusivamente la geometria del sistema: infatti nella deduzione vista sopra non sono stati coinvolti i raggi di curvatura dei profili a contatto e quindi dal punto di vista cinematico non può esservi nulla di mutato.

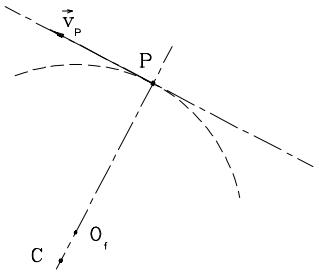


Figura 6

Il punto e la sua traiettoria, possiamo affermare senz'altro, costituiscono una particolare coppia di profili coniugati, quello in cui il profilo mobile degenera in un punto ($O_m \equiv P$). Analogamente, per la retta ed il suo inviluppo, caso in cui il raggio di curvatura del profilo mobile è $PO_m = \infty$.

§ 4. - Calcolo delle velocità per un rigido in moto composto.

Possiamo ripetere per il moto rigido piano quanto abbiamo già visto al §7 del Cap.5, dicendo che quando un membro (B) ha possibilità di moto rispetto ad un altro membro (A) a sua volta pure in moto, si dice che il **moto assoluto** di cui (B) è dotato è un **moto composto**: risultante cioè, in base al principio della sovrapposizione degli effetti, dalla composizione del moto che (B) ha rispetto ad (A), e del moto stesso di (A).
Sotto questo aspetto chiameremo il primo **moto relativo di (B) rispetto ad (A)**, ed il secondo **moto di trascinamento di (B) da parte di (A)**.
Il **moto relativo** si configura, quindi, come quel moto che (B) avrebbe se (A) fosse ipoteticamente mantenuto fisso, e nel quale, evidentemente, variano le distanze fra i punti dei due membri; il **moto di trascinamento** si configura invece come il moto che (B) avrebbe qualora fosse reso ipoteticamente solidale al membro (A); in tale ipotesi, esso non potrà essere che il moto stesso di (A).

Tale circostanza può essere schematizzata come in fig.7, dove il membro rigido (A), in movimento, ha in sé una guida prismatica entro cui può muoversi il rigido (B) in modo indipendente dal moto di (A).
E' evidente la possibilità di distinguere il moto relativo di (B) rispetto ad (A): il moto di (B) entro la guida di (A); ed il moto di trascinamento di (B) da parte di (A): quello di (A) e di (B) rigidamente connessi.

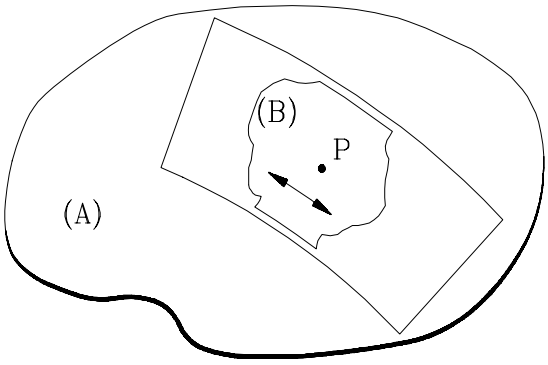


Figura 7

Il calcolo della velocità che ha un generico punto P nel moto assoluto di (B), quando questo è un moto composto, si esegue prendendo separatamente in esame i due moti componenti (moto relativo e moto di trascinamento), applicando opportunamente, nell'ambito di ciascuno di essi, le proprietà sul moto dei sistemi rigidi; la composizione dei due moti si otterrà dalla **legge di composizione delle velocità nel moto composto**:

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} \qquad \textbf{(71)}$$

la quale dice che , in un moto composto, la velocità di un punto P, nel

moto assoluto del membro rigido (B) cui appartiene, è uguale alla somma della velocità che ha P nel moto relativo [di (B) rispetto ad (A)] e della velocità che ha P nel moto di trascinamento [di (B) da parte di (A)].

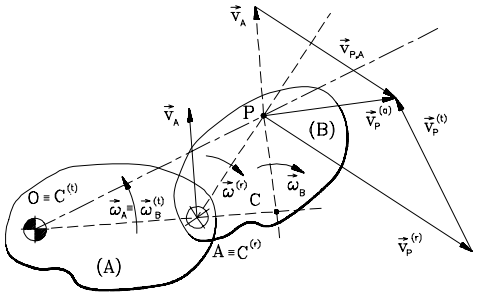


Figura 8

Conviene appena sottolineare che, proprio per quanto prima detto, per ciascuno dei moti componenti (relativo e di trascinamento), come pure per il moto risultante (assoluto) esiste-rà comunque il corrispondente centro della rotazione sia esso istantaneo o permanente; e questo potrà essere trovato applicando opportunamente, nell'ambito di ciascun moto, i criteri già visti per il moto del corpo rigido.

Una relazione analoga alla (71) lega anche le velocità angolari che competono a (B) nel moto composto.

Per ricavarla consideriamo (fig.8) un rigido (A) che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_A$ intorno ad un punto fisso O, e che, in A è collegato mediante una coppia rotoidale ad un secondo membro rigido (B) la cui velocità angolare, nel moto assoluto sia $\vec{\omega}_B$.

Cerchiamo intanto quale sia la velocità di un punto P di (B) nel suo moto assoluto.

Poiché i punti A e P appartengono allo stesso membro rigido (B), la velocità di P, nel moto assoluto di (B), può essere ricavata, per la (70) dalla velocità di A, scrivendo:

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_B \wedge (P - A)$$

dove per la velocità di A possiamo sostituire:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_A \wedge (A - O)$$

Sarà quindi:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_A \wedge (A - O) + \vec{\omega}_B \wedge (P - A) \qquad \textbf{(72)}$$

Sulla normale alla $\vec{v}_P^{(a)}$, si noti, dovrà trovarsi C, il centro delle velocità nel moto assoluto di (B).

D'altra parte, poiché il moto di (B) è un moto composto, possiamo anche considerare che il suo moto assoluto dovrà risultare dalla composizione del moto relativo di (B) rispetto ad (A), in cui (B) ruota intorno al punto A con una certa velocità angolare $\vec{\omega}_{B,A}^{(r)}$, e del moto di trascinamento di (B) da parte di (A) in cui (B), solidale ad (A), ruota in-

torno al punto O con la stessa velocità angolare del membro rigido (A), $\vec{\omega}_B^{(t)} = \vec{\omega}_A$.
I vettori da legare nella (71) dovranno allora essere:

$$\vec{v}_P^{(r)} = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A)$$
$$\vec{v}_P^{(t)} = \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - O) = \vec{\omega}_A \wedge (P - O)$$

e quindi questa diventa:

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - O) \qquad \textbf{(73)}$$

Ora, poiché i vettori ottenuti con la (72) e con la (73) non possono che essere identici, uguagliando le due espressioni abbiamo:

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{\omega}_A \wedge (A - O) + \vec{\omega}_B \wedge (P - A) = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - O)$$

ovvero:

$$\vec{\omega}_B \wedge (P - A) = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - O) - \vec{\omega}_A \wedge (A - O)$$

dove però è, come visto, $\vec{\omega}_B^{(t)} = \vec{\omega}_A$; allora, sostituendo:

$$\vec{\omega}_B \wedge (P - A) = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - O - A + O)$$

ossia, poiché è proprio $\vec{\omega}_B^{(a)} = \vec{\omega}_B$:

$$\vec{\omega}_B^{(a)} \wedge (P - A) = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_B^{(t)} \wedge (P - A)$$

e cioè:

$$\vec{\omega}_B^{(a)} = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} + \vec{\omega}_B^{(t)} \qquad \textbf{(74)}$$

Abbiamo trovato in definitiva il **teorema di Aronhold-Kennedy** che in forma semplificata si scrive:

$$\vec{\omega}^{(a)} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)} \qquad \textbf{(75)}$$

relazione analoga alla (71) e che lega fra loro le velocità angolari nel moto composto.

Il teorema di Aronhold-Kennedy è estremamente utile nella risoluzione della cinematica dei sistemi rigidi in moto piano: nel moto piano, infatti, i vettori velocità angolare sono, per definizione, tutti paralleli fra loro, perpendicolari al piano del moto e in più li possiamo pensare "applicati" nei rispettivi centri di velocità; per essi devono quindi essere valide le regole di composizione e scomposizione dei vettori applicati paralleli.
Segue allora, (74), che il punto di applicazione del vettore $\vec{\omega}_B^{(a)}$ dovrà trovarsi sulla congiungente i punti di applicazione degli altri due; in al-

tre parole il centro delle velocità nel moto assoluto di (B) dovrà trovarsi sulla congiungente il centro delle velocità nel moto relativo di (B) rispetto ad (A) e il centro del moto di trascinamento di (B) da parte di (A).
In generale: **centro del moto assoluto, relativo e di trascinamento stanno sulla medesima retta**.
Nel caso di un membro rigido (B) che appartiene ad una catena cinematica, ed è quindi collegato a due membri adiacenti, (A) e (C), è possibile, in generale, individuare due di tali rette, una considerando il collegamento di (B) con (A) e l'altra considerando il collegamento di (B) con (C); il centro delle velocità nel moto assoluto di (B)dovrà trovarsi sulla intersezione delle due rette.

Tuttavia dalla (74) discende anche una proprietà di carattere ancora più generale; tenendo conto, come già visto, che è $\vec{\omega}_B^{(t)} = \vec{\omega}_A$, essa può essere scritta anche come:

$$\vec{\omega}_B^{(a)} = \vec{\omega}_{B,A}^{(r)} + \vec{\omega}_A^{(a)}$$

da cui:

$$\vec{\omega}_{B,A}^{(r)} = \vec{\omega}_B^{(a)} - \vec{\omega}_A^{(a)} \qquad \textbf{(76)}$$

cosa che mette in evidenza come il centro del moto relativo fra due membri sta sulla congiungente i centri del loro moto assoluto. E poiché la validità della (74) non è legata al fatto che i membri siano direttamente connessi si può concludere anche che, dati due membri qualsiasi in moto, anche non fisicamente a contatto fra loro, poiché possono sempre essere individuati i rispettivi centri di rotazione nel loro moto assoluto, allora **il centro del moto relativo fra i due sarà** sempre un punto comune ai rispettivi piani mobili situato **sulla congiungente i centri del moto assoluto**.
Il teorema di Aronhold-Kennedy mostra chiaramente, quindi, come **l'atto di moto relativo è sempre dato dalla differenza di due atti di moto assoluti**; ne discende che, volendo determinare il moto relativo fra due membri (A) e (B), [per esempio di (B) rispetto ad (A)], è sufficiente sovrapporre a tutto il sistema un atto di moto eguale ed opposto a quello del membro rispetto al quale si vuole il moto relativo [(A) in tal caso].

E ancora si può riflettere sul fatto che è stato definito moto assoluto di un membro (A) il suo moto rispetto ad un riferimento fisso e che, contemporaneamente, è stato definito come meccanismo quella catena cinematica in cui uno dei membri funga da telaio (T), ossia sia fisso. Il moto assoluto di un membro mobile che faccia parte di un meccanismo è, quindi, il suo moto rispetto al telaio.
Ma se il telaio fosse a sua volta in moto in quanto il meccanismo appartiene ad una macchina anch'essa in moto non per questo risulterebbe alterato il moto di (A) rispetto a (T).

La (76) può lecitamente scriversi anche come:

$$\vec{\omega}_{B,A}^{(r)} = \vec{\omega}_{B,T}^{(r)} - \vec{\omega}_{A,T}^{(r)}$$

oppure, ancora più in generale, come:

$$\vec{\omega}_{B,A}^{(r)} = \vec{\omega}_{B,C}^{(r)} - \vec{\omega}_{A,C}^{(r)} \qquad \textbf{(77)}$$

e ciò vuol dire che **il centro del moto relativo fra due membri rigidi piani sta sulla congiungente i centri del moto relativo degli stessi rispetto ad un terzo membro** (a prescindere dalla circostanza che siano a questo direttamente connessi).

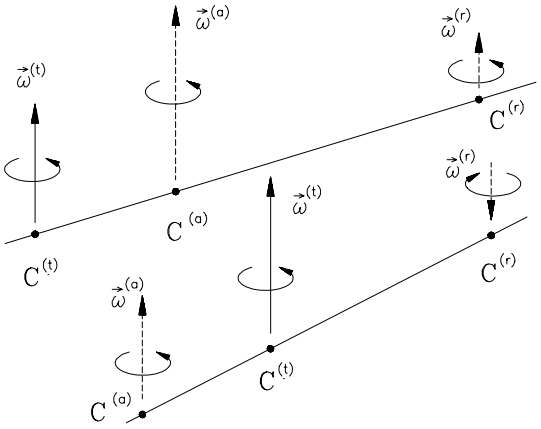


Figura 9

La stessa relazione (75), allo stesso modo, torna molto spesso utile nella determinazione del verso da assegnare alle velocità angolari incognite del moto composto quando ne sia già nota una e siano pure noti i tre centri delle rotazioni $C^{(a)}$, $C^{(r)}$, $C^{(t)}$; sarà sufficiente ricordare che se il centro $C^{(a)}$ è interno al segmento che congiunge $C^{(r)}$ e $C^{(t)}$ i vettori $\vec{\omega}^{(r)}$ ed $\vec{\omega}^{(t)}$ saranno concordi, mentre se $C^{(a)}$ è esterno alla congiungente $C^{(r)}$ e $C^{(t)}$ i vettori $\vec{\omega}^{(r)}$ ed $\vec{\omega}^{(t)}$ saranno discordi.
Una considerazione aggiuntiva occorrerà per il caso in cui è nota la rotazione corrispondente ad $\vec{\omega}^{(a)}$ ed il punto $C^{(a)}$ è esterno al segmento $C^{(r)}C^{(t)}$: il vettore somma di due vettori paralleli e discordi sta dalla parte del vettore di modulo maggiore ed ha il suo stesso verso.

Per esempio (fig.9), ammettiamo di conoscere la rotazione corrispondente al moto di trascinamento, e sia essa oraria: quella corrispondente al moto relativo sarà anch'essa oraria se $C^{(a)}$ è interno al segmento $C^{(r)}C^{(t)}$, sarà invece antioraria se $C^{(a)}$ è esterno ad esso.

Casi particolari di questa analisi sono quelli in cui uno dei centri di rotazione sia all'∞: è il caso in cui uno dei moti è una traslazione e quindi è nullo il vettore $\vec{\omega}$ caratteristico di quel moto. Le conclusioni in tal caso discendono direttamente dalla relazione (75) ponendo eguale a zero il vettore velocità angolare del moto traslatorio.

§ 5. - Applicazioni sui moti composti.

1. - Si voglia trovare, in un meccanismo a glifo oscillante, (fig.10), il centro della rotazione istantanea nel moto assoluto del corsoio (B). L'analisi dei vincoli mostra che il membro (B) ha, rispetto al glifo (A), un moto relativo, traslatorio, il cui centro è all'∞ nella direzione perpendicolare all'asse del glifo stesso; da quest'ultimo è trascinato in rotazione intorno al punto O_1. Pertanto la retta per O_1 normale all'asse del glifo dovrà contenere il centro della rotazione che si sta cercando. D'altra parte, lo stesso corsoio ha, rispetto all'asta (D) un moto relativo di rotazione intorno al punto P, ed inoltre è ancora trascinato in rotazione, intorno al punto O_2 , dal moto di (D) stesso.

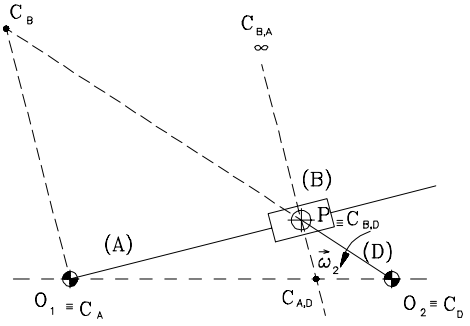


Figura 10

Quindi il centro del moto assoluto cercato, $C_{(B)}$, dovrà stare anche sulla retta congiungente i punti O_2 e P; esso sarà quindi individuato dalla intersezione di questa con la prima retta. Se poi si suppone noto il vettore $\vec{\omega}_2$, antiorario così come in figura, e si considera che è $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_B^{(t)}$, si può senz'altro affermare che, trovandosi $C_{(B)}$ all'esterno della congiungente O_2D, il vettore $\vec{\omega}_{B,D}^{(r)}$, nel moto relativo di (B) rispetto a (D), sarà discorde rispetto a $\vec{\omega}_2$ e quindi questa rotazione sarà oraria.

Per quanto concerne al vettore $\vec{\omega}_B^{(a)}$, esso dovrà essere concorde al vettore $\vec{\omega}_{B,D}^{(r)}$, e dovrà pure essere $\vec{\omega}_{B,D}^{(r)} > \vec{\omega}_2$.

Il moto del membro (A), a sua volta, sarà caratterizzato da un vettore $\vec{\omega}_1$ [$\vec{\omega}_B^{(t)}$ per il membro (B)] che dovrà essere concorde con il vettore $\vec{\omega}_B^{(a)}$ (C_{BA} è all'∞) e quindi la rotazione di (A) è pure oraria.

La stessa relazione (75) consentirebbe pure la determinazione dei moduli dei vettori velocità angolari attraverso l'applicazione delle regole generali riguardanti i vettori paralleli.

Con analogo ragionamento è possibile determinare il centro del moto relativo, $C_{(AD)}$, fra i membri (A) e (D). Esso dovrà stare sulla congiungente i punti O_1 ed O_2 che sono i rispettivi centri del moto assoluto; ma anche sulla retta per P normale all'asse del glifo sulla quale stanno sia il centro del moto relativo di (A) rispetto a (B), all'∞, sia il centro P

del moto relativo di (D) rispetto a (B).
Si applicano cioè le due relazioni:

$$\vec{\omega}_{D,A}^{(r)} = \vec{\omega}_{D}^{(a)} - \vec{\omega}_{A}^{(a)}$$

e:

$$\vec{\omega}_{D,A}^{(r)} = \vec{\omega}_{D,B}^{(r)} - \vec{\omega}_{A,B}^{(r)}$$

secondo le (76) e (77).

2. - In fig. 11, il centro $C_{(B)}$ del moto assoluto dell'asta (B) dovrà stare sulla retta per A e per O , rispettivamente centro del moto relativo di (B) rispetto ad (A), e centro del moto di trascinamento di (B) da parte di (A); dovrà stare anche sulla retta per B e per C, rispettivamente centro del moto relativo dell'asta (B) rispetto alla rotella (D), e centro del moto di trascinamento di (B) da parte di (D).

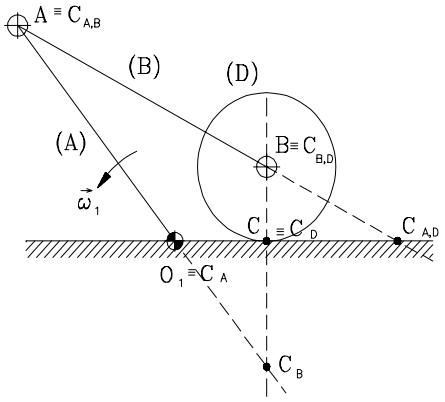


Figura 11

L'intersezione $C_{(B)}$ è il centro cercato. Inoltre, poiché questo è esterno al segmento O_1A, la rotazione relativa di (B) rispetto ad (A) sarà discorde dalla rotazione di (A) e quindi oraria, se il verso di $\vec{\omega}_1$ è quello indicato in figura, mentre sarà concorde con $\vec{\omega}_1$ la rotazione di (B) nel suo moto assoluto. Per il medesimo motivo sono discordi fra loro le rotazioni, di (D) nel suo moto assoluto, e quella di (B) nel moto relativo a (D); la rotazione di (D) sarà concorde con la rotazione di (B) nel moto assoluto e quindi antioraria come $\vec{\omega}_1$, mentre quella di (B) rispetto a (D) sarà di verso opposto e quindi oraria.
Secondo lo stesso procedimento visto nel caso precedente possiamo determinare il centro, $C_{(AD)}$, del moto relativo dell'asta (A) rispetto alla rotella (D).
Esso dovrà stare sulla retta per O_1 e C, che sono rispettivamente centri del moto assoluto del membro (A) e del membro (D); dovrà anche stare sulla retta per A e per B che sono rispettivamente i centri del moto relativo $C_{(AB)}$ e $C_{(DB)}$. Inoltre, poiché $C_{(AD)}$ risulta esterno alla congiungente $C_{(AB)}C_{(DB)}$, le corrispondenti rotazioni, $\vec{\omega}_{A,B}^{(r)}$ e $\vec{\omega}_{D,B}^{(r)}$, sono discordi e pertanto quella che si ha nel moto relativo di (A) rispetto a (D) è pure oraria.

3. - La fig.12 mostra lo schema di una camme circolare eccentrica (B), fulcrata in O_2, in contatto di rotolamento e strisciamento con un asta (A), fulcrata in O_1; è assegnata la velocità angolare della camme, con verso di rotazione antiorario. Il centro del moto relativo fra i due membri, $C_{(AB)}$, si troverà sulla congiungente i punti O_1 ed O_2 , rispettivamente centri di rotazione nel moto assoluto di (A) e di (B); dovrà stare, anche, sulla perpendicolare all'asta passante per il punto di contatto: infatti asta e camme, nel loro moto relativo, sono profili coniugati ed il centro di tale moto deve stare quindi sulla normale comune di contatto.

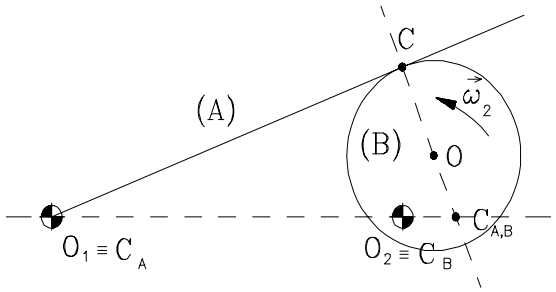


Figura 12

Inoltre, poiché O_1 risulta esterno ad $O_2C_{(AB)}$, la rotazione nel moto relativo di (A) rispetto a (B) sarà discorde da quella della camme e quindi oraria, mentre quella dell'asta, nel moto assoluto, sarà antioraria., dal momento che O_1 sta dalla parte di O_2.

§ 6. - Polare fissa e polare mobile.

Si è già visto al § 1 come per un corpo rigido qualsiasi, in moto piano, esista, per ogni istante e cioè per ogni configurazione, un suo punto, C, che si trova ad avere velocità nulla e svolge quindi la funzione di centro delle velocità di quel corpo; e si è pure visto che attraverso l'applicazione del teorema di Chasles è possibile identificarlo.

Eseguendo tale ricerca in corrispondenza ad istanti (configurazioni) diversi e immaginando di marcare in modo definitivo di diversi punti C_i trovati, avremo una serie infinita di punti che nel loro insieme costituiranno una linea: una linea (punteggiata) costituita dai **punti del rigido (o del piano mobile) che nei diversi istanti hanno avuto, hanno, o avranno velocità nulla**, che vanno via via assumendo, cioè, la funzione di centro delle velocità. Tale linea prende il nome di **polare mobile** del rigido che si sta considerando, ed è una linea, ovviamente, solidale al rigido stesso, e quindi in moto con esso.

E' anche possibile, tuttavia, marcare sul piano fisso di riferimento, negli stessi istanti e quindi per le stesse configurazioni, il punto corrispon-

dente a ciascun C_i del rigido: l'insieme di questi altri punti sul piano di riferimento, nella successione imposta dallo svolgersi del moto dà luogo ad un'altra linea (anch'essa punteggiata) che prende il nome di **polare fissa: luogo dei punti del piano fisso che sono stati, sono, o saranno coincidenti con i centri della rotazione istantanea**.
Ad ogni istante, quindi, un punto C della polare mobile troverà il suo corrispondente sulla polare fissa; e in corrispondenza ad istanti diversi sarà diversa la coppia di punti che vengono a trovarsi sovrapposti.
Per distinguerli nella loro diversa appartenenza, chiameremo **centro della rotazione istantanea** il punto C che appartiene alla **polare fissa**, pf, mentre chiameremo **centro delle velocità**, C_v il punto C che appartiene alla **polare mobile**, p_m.

Ora poiché le due linee appartengono una al piano fisso ed una al piano mobile è evidente che esiste un moto della polare mobile rispetto alla polare fissa: questo moto è un moto di puro rotolamento, ossia **le due linee rotolano l'una sull'altra senza strisciare**.
Infatti se indichiamo con C* il punto di contatto fra le due linee, questo durante il moto della p_m sulla p_f percorre quest'ultima con una velocità che sarà da definire assoluta essendo la p_f la sua traiettoria sul piano fisso. La stessa velocità deve avere C*, se lo si considera nel moto composto: il moto relativo alla p_m, ossia quello di C* che percorre la p_m, ed il moto di trascinamento da parte della p_m stessa; ma in quest'ultimo moto C* è solidale alla p_m e quindi coincide con C_v la cui velocità è nulla e quindi sarà certamente:

$$\vec{v}_{C^*}^{(a)} = \vec{v}_{C^*}^{(r)}$$

La velocità di C* è quindi la medesima se si considera il suo moto sulla polare fissa oppure sulla polare mobile: tra le due linee, quindi, non c'è strisciamento.

§ 7. - Velocità del punto di contatto fra le polari.

Sia dato un sistema rigido qualsiasi in moto piano con velocità angolare $\vec{\omega}$, e sia p_m la sua polare mobile e p_f la sua polare fissa (fig. 13); le due linee abbiano rispettivamente, all'istante considerato, raggi di curvatura R_m ed R_f, e centri di curvatura in O_m ed O_f, ed abbiano in C il loro punto di contatto.

Si vuole determinare, nel moto di rotolamento della polare mobile sulla polare fissa, la velocità del punto C, quella cioè (v.§ 6) con cui C si sposta sulle due linee.

Si stabilisca, anzitutto, un riferimento con origine in C, un versore $\vec{n}$ nella direzione della normale comune alle polari, positivo verso il centro di curvatura della polare fissa O_f ; ed un versore $\vec{\tau}$ lungo la tangente comune, orientato in modo che una rotazione di 90° nel verso positivo delle rotazioni (antiorario) lo porti a sovrapporsi ad $\vec{n}$.

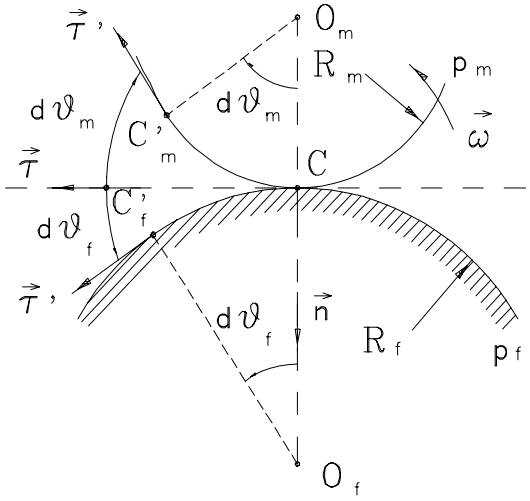


Figura 13

In tale riferimento, dopo un tempo dt, a partire dalla configurazione in cui il contatto è in C, la p_m avrà ruotato rispetto alla p_f di un angolo $d\vartheta = \omega dt$, e, conseguentemente, il punto C'_m sarà andato in contatto con il punto C'_f.
Il punto C ha allora percorso, sulla polare fissa e sulla mobile, un arco pari a:

$$d\sigma = R_f d\vartheta_f = R_m d\vartheta_m$$

se $d\vartheta_f$ e $d\vartheta_m$ sono rispettivamente gli angoli descritti dai raggi vettori O_fC ed O_mC nello spostamento infinitesimo di C lungo la p_f e la p_m.

Tenendo conto del riferimento adottato, la rotazione della polare mobile rispetto alla polare fissa sarà data da:

$$d\vartheta = d\vartheta_f - d\vartheta_m = \frac{d\sigma}{R_f} - \frac{d\sigma}{R_m} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) d\sigma$$

e cioè:

$$\omega dt = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) d\sigma$$

Ma poiché è anche $\vec{v}_C = (d\sigma/dt)\vec{\tau}$, si ricava in definitiva:

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau}$$

dove è:

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_m}$$

Nel riferimento prefissato R_f è sempre positivo, mentre R_m è positivo o negativo a seconda che il centro di curvatura O_m stia dalla stessa parte o dalla parte opposta di O_f rispetto alla tangente comune alle polari. Ne segue: se O_f ed O_m stanno da parti opposte sarà sempre $D>0$, mentre se stanno dalla stessa parte sarà, $D>0$ se $R_f<R_m$, oppure $D<0$ se $R_f>R_m$.

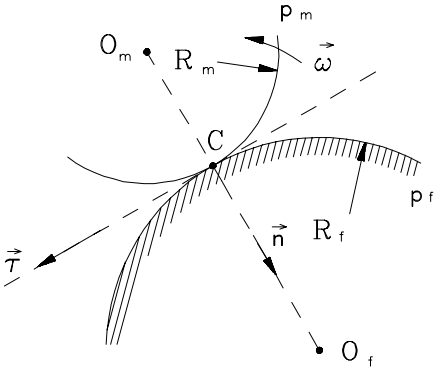


Figura 14

Le possibili situazioni particolari sono esemplificate nelle figg. da 14 a 18.

a): i centri di curvatura delle due polari (fig.14), O_f ed O_m, sono da parte opposta e pertanto è $R_f>0$ mentre è $R_m<0$. Sarà allora:

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{R_f}+\frac{1}{|R_m|}>0$$

e quindi:

$$\vec{v}_C=\omega D\vec{\tau}=\omega\frac{R_f|R_m|}{R_f+|R_m|}\vec{\tau}$$

b): i centri di curvatura delle polari sono dalla stessa parte (fig.15) ed è $R_f<R_m$. In questo caso è $R_f>0$ ed anche $R_m>0$; per il valore di D si avrà quindi:

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_m}>0$$

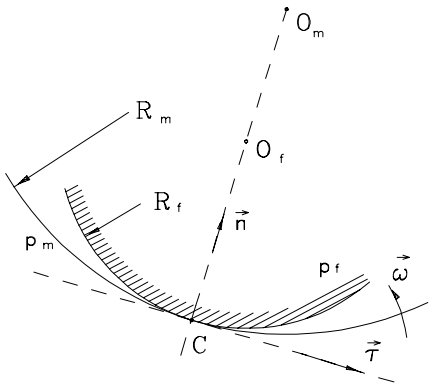


Figura 15

da cui:

$$\vec{v}_C=\omega D\vec{\tau}=\omega\frac{R_f R_m}{R_m - R_f}\vec{\tau}$$

c): i centri di curvatura delle polari (fig.16) sono dalla stessa parte ma è $R_f > R_m$. In questo caso è $R_f > 0$ ed anche $R_m > 0$; sarà quindi:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} < 0$$

e quindi:

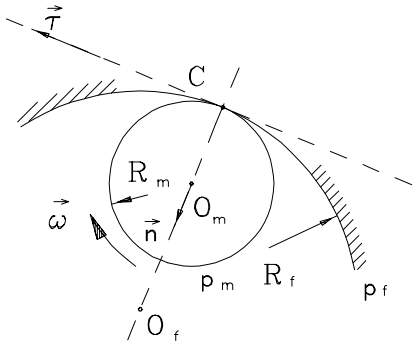


Figura 16

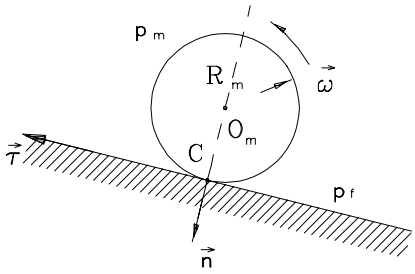


Figura 17

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau} = -\omega \frac{R_f R_m}{|R_m - R_f|} \vec{\tau}$$

d): la polare fissa è una retta (fig.17) e pertanto è $R_f = \infty$. Sarà allora:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{|R_m|} > 0$$

e quindi:

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau} = \omega R_m \vec{\tau}$$

Si può verificare con facilità che l'arbitrarietà nella scelta del versore $\vec{n}$, tipica di questo caso, non genera alcun problema ai fini del risultato.
e): la polare mobile è una retta (fig.18) e pertanto è $R_m = \infty$ ($R_f > 0$).
Sarà allora:

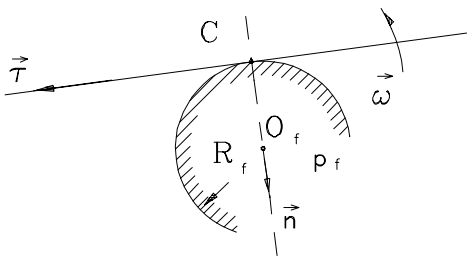


Figura 18

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} > 0$$

e poi:

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau} = \omega R_f \vec{\tau}$$

§ 8. - Formula di Eulero-Savary e profili coniugati.

Si consideri un membro rigido (A) in moto piano con velocità angolare $\vec{\omega}$, e sia P un suo punto; supponiamo, inoltre, che siano note le polari, fissa e mobile, del moto di (A) e che queste, all'istante considerato, siano a contatto nel punto C ed abbiano rispettivamente in O_f ed O_m i loro centri di curvatura.

Poiché il punto P appartiene al rigido, il suo moto, ed in particolare la sua traiettoria, è legata in modo univoco al moto stesso di (A) e dovrà essere, pertanto, possibile trovare una relazione che leghi il moto di (A) alla traiettoria di P.

Geometricamente, i raggi di curvatura delle polari del moto di (A) ed il centro di curvatura, Ω_f, della traiettoria di P devono giacere, come si è già visto, sulla medesima retta; conviene, quindi, considerare, accanto al riferimento con origine in C e versori $\vec{n}$ e $\vec{\tau}$, già introdotto nel precedente paragrafo, un altro riferimento che abbia origine in P , scegliendo un versore $\vec{\nu}$ orientato lungo la normale alla traiettoria di P e positivo nel verso che va da P verso Ω_f, ed un versore $\vec{\mu}$ lungo la tangente alla traiettoria stessa orientato in modo che una rotazione positiva di 90° lo porti a sovrapporsi a $\vec{\nu}$.

Sia inoltre φ, all'istante considerato, l'angolo che formano fra loro le due normali: la normale alla traiettoria di P rispetto alla normale comune alle polari.

La linea polare mobile è pure essa solidale al membro (A) cui P appartiene, e pertanto (fig.19), al dato istante sarà, sia:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C) = \omega \overline{PC}\, \vec{\mu} \qquad \textbf{(78)}$$

come pure:

$$\vec{v}_{O_m} = \vec{\omega} \wedge (O_m - C) = \omega \overline{O_m C}\, \vec{\tau} \qquad \textbf{(79)}$$

Durante il moto di (A), mentre la normale alla traiettoria di P, ruota con una data velocità angolare $\vec{\omega}'$ e con centro di rotazione nel punto Ω_f, centro di curvatura di detta traiettoria, il punto C che deve sempre sia

trovarsi sulla $P\Omega_f$ sia sulle polari che sta percorrendo, varierà la sua distanza da P; possiamo quindi considerare C come un punto mobile di questa retta $P\Omega_f$.
La sua velocità assoluta, ossia quella con cui percorre le polari, può essere considerata, pertanto, come risultante dalla somma di una componente nel moto di trascinamento da parte della retta $P\Omega_f$, e di una componente nel moto relativo che ha luogo lungo la retta stessa.

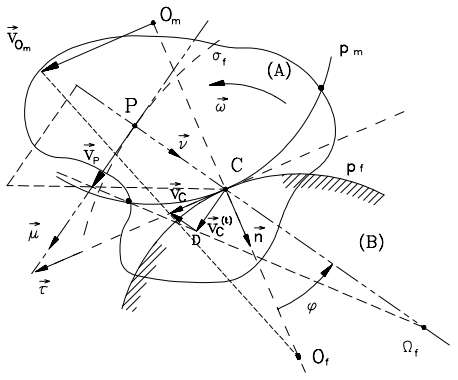


Figura 19

Questo componente di velocità nel moto di trascinamento sarà:

$$\vec{v}_C^{(t)} = \vec{\omega}' \wedge (C - \Omega_f) = \omega' \overline{C\Omega_f}\, \vec{\mu} \qquad \textbf{(80)}$$

Ma anche P appartiene alla retta $P\Omega_f$, e quindi potremo pure scrivere:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}' \wedge (P - \Omega_f) = \omega' \overline{P\Omega_f}\, \vec{\mu} \qquad \textbf{(81)}$$

Le (80) e (81) mostrano che queste due velocità sono proporzionali alla distanza dei punti P e C dal centro Ω_f e pertanto si potrà scrivere:

$$v_C^{(t)} : \overline{C\Omega_f} = v_P : \overline{P\Omega_f}$$

ossia:

$$v_C^{(t)} = \frac{\overline{C\Omega_f}}{\overline{P\Omega_f}}\, v_P \qquad \textbf{(82)}$$

Tenendo conto poi dell'angolo φ che la normale alla traiettoria di P forma con la normale comune alle polari, e si tiene conto che, come si è già trovato, è anche $\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau}$, si può pure scrivere:

$$v_C \vec{\mu} = v_C \cos\varphi \vec{\mu} = \omega D \cos\varphi \vec{\mu} \qquad \textbf{(83)}$$

Eguagliando la (82) e la (83) si ha:

$$\frac{\overline{C\Omega_f}}{\overline{P\Omega_f}}\, v_P = \omega D \cos\varphi$$

la quale, sostituendo a v_P il valore che si ricava dalla (78), diventa:

$$\frac{\overline{C\Omega_f}}{\overline{P\Omega_f}}\, \omega \overline{PC} = \omega D \cos\varphi$$

e si ha quindi:

$$\frac{\overline{C\Omega_f}}{\overline{P\Omega_f}}\ \overline{PC} = D\cos\varphi \qquad \textbf{(84)}$$

D'altra parte, è anche:

$$\overline{P\Omega_f} = \overline{C\Omega_f} + \overline{PC}$$

e quindi la (84) diventa:

$$\frac{\overline{C\Omega_f} + \overline{PC}}{\overline{C\Omega_f}\ \overline{PC}} = \frac{1}{D\cos\varphi} = \frac{1}{\overline{C\Omega_f}} - \frac{1}{\overline{CP}}$$

In definitiva:

$$\frac{1}{D} = \left(\frac{1}{\overline{C\Omega_f}} - \frac{1}{\overline{CP}}\right)\cos\varphi \qquad \textbf{(85)}$$

dove, si ricordi, le distanze CP e $C\Omega_f$ vanno prese con il loro segno.
La (85), ora ricavata, è la **formula di Eulero-Savary**: essa mette in relazione i raggi di curvatura delle polari di un rigido in moto piano (v.§7) con le distanze dal centro della rotazione istantanea, C, di un punto appartenente allo stesso rigido e del centro di curvatura della sua traiettoria.
Considerato, ora, che, ad un dato istante, ad un punto mobile di (A) corrisponde una sola normale alla sua traiettoria, (e quindi un solo valore di φ) si ha che in ogni istante il prodotto $D\cos\varphi$ è costante e la (85) definisce quindi sulla normale alla traiettoria del punto una corrispondenza proiettiva fra i diversi punti P di essa ed i corrispondenti centri di curvatura, Ω_f , delle loro traiettorie; proiettività di cui il punto C è il punto unito. E infatti, risulta anche che scambiando R_m con R_f, ed il punto P con Ω_f, ossia se si considera il moto inverso di (A) in cui le polari si scambiano le loro funzioni, la (85) rimane inalterata ed il punto P diventa centro di curvatura della traiettoria di Ω_f. Per tale motivo P ed Ω_f si dicono punti coniugati.

In modo del tutto analogo si può procedere se, invece di considerare un punto del rigido e la sua traiettoria, si vuole considerare un profilo mobile σ_m, solidale al rigido (A), del quale Ω_m sia il centro di curvatura, e che sia coniugato ad un profilo fisso σ_f che ha centro di curvatura in Ω_f.
Sarà sufficiente considerare, al posto della velocità del punto P, la velocità del punto Ω_m di σ_m, per trovare:

$$\frac{1}{D} = \left(\frac{1}{\overline{C\Omega_f}} - \frac{1}{\overline{C\Omega_m}} \right) \cos\varphi \qquad \textbf{(85')}$$

strettamente analoga alla (85), e che conferma ancora una volta come il punto e la sua traiettoria costituiscono una particolare coppia di profili coniugati.

CAPITOLO VIII

CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI PIANI

(2 - LE ACCELERAZIONI)

SOMMARIO

1- Distribuzione delle accelerazioni nei sistemi rigidi piani
2 - Applicazioni grafiche
3 - Il centro delle accelerazioni
4 - Accelerazione del centro delle velocità
5 - Circonferenza dei flessi e di stazionarietà
6 - Punto di flesso della normale alla traiettoria di un punto
7 - Circonferenza dei regressi
8 - Esempio di determinazione del centro delle accelerazioni
9 - Le accelerazioni nei moti composti. Teorema di Coriolis

§ 1. - Distribuzione delle accelerazioni nei sistemi rigidi piani.

Consideriamo un sistema rigido (A) in moto piano ed un suo punto P (fig.1).
Per effetto del moto di (A) il punto P descriverà un data traiettoria di centro Ω, percorrendola con una data velocità che, ad un determinato istante, sarà:

$$\vec{v}_P = v_P \vec{\tau}$$

dove $\vec{\tau}$ è il versore tangente in P alla traiettoria stessa nell'istante conside-

rato.
Se in tale istante la traiettoria di P presenta raggio di curvatura ρ, l'accelerazione di P sarà data da:

$$\vec{a}_P = \dot{v}_P\vec{\tau} + v_P\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}_P\vec{\tau} + \frac{v_P^2}{\rho}\vec{n} \qquad \textbf{(86)}$$

con il versore $\vec{n}$ rivolto verso il centro di curvatura della traiettoria di P.
La (86) ricalca, ovviamente, quanto già visto nel §3 del Cap.V, e mostra ancora che l'accelerazione di un punto risulta definita, in generale, da un vettore ottenuto con la somma di:
- un **componente tangenziale** (tangente alla traiettoria):

$$\left[\vec{a}_P\right]_t = \dot{v}_P\vec{\tau}$$

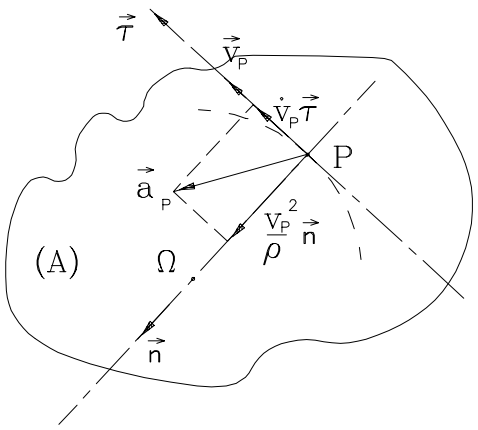


Figura 1

- un componente normale (alla traiettoria):

$$\left[\vec{a}_P\right]_n = \frac{v_P^2}{\rho}\vec{n}$$

orientato sempre verso il centro di curvatura della traiettoria del punto considerato.
Se un rigido (A) si muove di moto piano intorno ad un punto fisso O (fig.2) con velocità angolare $\vec{\omega}$ ed accelerazione angolare $\dot{\vec{\omega}}$, l'accelerazione di un suo punto P può essere espressa in funzione di tali vettori che sono le caratteristiche cinematiche del rigido nel suo complesso; in questo caso particolare, infatti, tutti i punti di (A) descrivono traiettorie che sono circonferenze concentriche (ρ=cost) intorno al centro fisso O.

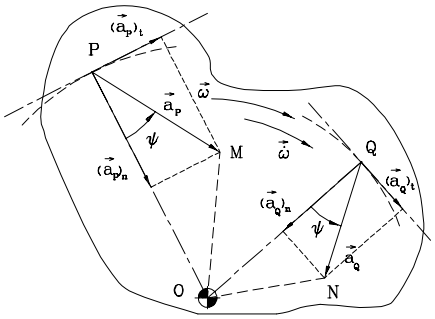


Figura 2

Considerato il generico punto P di (A), la sua velocità sarà data da:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

Derivando rispetto al tempo questa espressione, avremo la accelerazione del punto P nella forma:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$$

ossia, in definitiva:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) - \omega^2 (P-O)$$

Si possono allora distinguere le singole espressioni del:
- componente tangenziale:

$$[\vec{a}_P]_t = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O)$$

di direzione normale a (P-O), e quindi tangente alla traiettoria di P; e del
- componente normale:

$$[\vec{a}_P]_n = -\omega^2 (P-O)$$

orientato come la congiungente OP ed il verso (come indica la presenza del segno negativo) rivolto verso il centro di curvatura della traiettoria.

Ora, poiché è OP =ρ= r, si può anche scrivere:

$$\vec{a}_P = \omega r \vec{\tau} - \omega^2 r \vec{n}$$

il cui modulo è:

$$a_P = \sqrt{[a_P]_t^2 + [a_P]_n^2} = r\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

Vediamo allora che il **modulo** del vettore accelerazione di un generico punto di (A) risulta **proporzionale alla distanza** di questo dal centro (fisso) di rotazione del rigido, secondo una costante di proporzionalità che dipende esclusivamente dalla caratteristiche cinematiche, $\vec{\omega}$ ed $\dot{\vec{\omega}}$, del suo moto. L'espressione sotto radice è quindi un invariante per tutti i punti del rigido.

Inoltre, il rapporto fra il componente tangenziale ed il componente normale esprime la tangente dell'angolo formato dal vettore accelerazione, $\vec{a}_P$, con la congiungente PO; e quindi si può scrivere:

$$\tan\psi = \frac{[a_P]_t}{[a_P]_n} = \frac{r\omega}{r\omega^2} = \frac{\omega}{\omega^2}$$

e tale rapporto è evidentemente indipendente dalla distanza di P da O. Anche questo rapporto è quindi un invariante per **i vettori accelerazione** di tutti i punti del rigido. Essi vettori **formano tutti il medesimo angolo** rispetto alla congiungente il punto con il centro di curvatura della traiettoria.

Ripetendo le medesime considerazioni per un altro punto Q dello

stesso sistema rigido (fig.2), si desume allora che i triangoli OPM ed OQN, e gli analoghi che si possono costruire per altri punti di (A), sono tutti fra loro simili: infatti si ha comunque ψ=cost ed inoltre sarà sempre valida una relazione del tipo:

$$a_P : OP = a_Q : OQ$$

Ciò permette, noto il vettore accelerazione di un punto qualsiasi del rigido, di costruire il vettore accelerazione di un altro punto dello stesso sistema rigido.

Conviene qui notare che la distinzione dei due componenti di accelerazione, normale e tangenziale, ha senso in questo caso solo e in quanto si tratta di un rigido in moto intorno ad un punto fisso: la distanza OP dal punto al centro del moto è anche il raggio di curvatura della traiettoria del punto stesso (costante nell'intorno della configurazione istantanea).

Con riferimento al medesimo caso, scriviamo, adesso le accelerazioni di due punti generici, P e Q.

Avremo:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) - \omega^2 (P-O)$$

e

$$\vec{a}_Q = \dot{\vec{\omega}} \wedge (Q-O) - \omega^2 (Q-O)$$

Se facciamo la differenza fra queste due accelerazioni abbiamo:

$$\vec{a}_P - \vec{a}_Q = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-Q) - \omega^2 (P-Q)$$

Troviamo, a secondo membro, ancora due componenti di accelerazione, tangenziale il primo, normale il secondo, che insieme rappresentano l'accelerazione che avrebbe il punto P se il punto Q fosse un punto fisso. Tale accelerazione si può indicare sinteticamente come l'accelerazione di P rispetto a Q, scrivendo:

$$\vec{a}_{PQ} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-Q) - \omega^2 (P-Q)$$

da cui:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{a}_{PQ} \qquad \textbf{(87)}$$

Si è giunti, in definitiva, alla espressione del **teorema di Rivals**, relazione formalmente analoga a quella già vista nel § 1 Cap.VII per le velocità, e che rappresenta il **legame fra le accelerazioni di due punti dello stesso sistema rigido**; permette quindi, nota l'una, di trovare l'accelerazione di un secondo punto del rigido.

Il teorema di Rivals, anche se qui è stato ricavato per il caso particolare di un rigido in moto intorno ad un punto fisso, ha tuttavia validità affatto ge-

nerale, in quanto, a formare i componenti di $\vec{a}_{PQ}$ concorrono solamente le caratteristiche cinematiche, $\vec{\omega}$ ed $\dot{\omega}$, che riguardano il rigido nel suo insieme e tali componenti non dipendono quindi dalle traiettorie dei punti presi in considerazione.

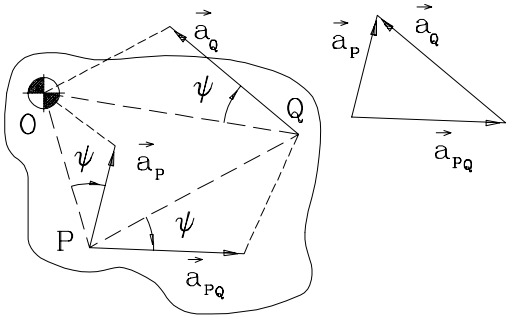


Figura 3

Ora, poiché $\vec{a}_{PQ}$ dipende dalla stessa $\vec{\omega}$ e dalla stessa $\dot{\omega}$ da cui dipendono $\vec{a}_P$ e $\vec{a}_Q$, (fig.3), l'angolo formato da questo con la congiungente PQ sarà ancora ψ ed il suo modulo sarà ancora proporzionale alla distanza PQ.

Ne segue che, essendo i tre vettori $\vec{a}_P$, $\vec{a}_Q$ e $\vec{a}_{PQ}$, tutti ruotati dello stesso angolo ψ rispetto alle congiungenti i rispettivi punti con il centro fisso O, ed avendo moduli proporzionali alle rispettive distanze dallo stesso O, il triangolo OPQ ed il triangolo delle accelerazioni sono simili.

§ 2. - Applicazioni grafiche.

a). - La forma particolare che assume l'espressione del componente normale della accelerazione di un punto in moto lungo la sua traiettoria rende agevole servirsi di alcune semplici costruzioni geometriche per calcolarne il modulo. Infatti, se v è il modulo della velocità di un punto e ρ è il raggio di curvatura della sua traiettoria, il componente normale della accelerazione è, come si è già visto:

$$\left[\vec{a}_P\right]_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ed allora, purché si utilizzino le medesime scale di rappresentazione per le diverse grandezze, si può, secondo convenienza,

1. - tracciare, (fig.4, a), una semicirconferenza il cui diametro sia AB=ρ ed intersecarla poi in D con un arco di raggio pari a v di centro A; la perpendicolare condotta per il punto D ad AB stacca su questo il segmento AE che è proprio il modulo di $\left[\vec{a}_P\right]_n$ cercato.

In effetti AB risulta l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADB, e pertanto sarà:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\ \overline{AE}$$

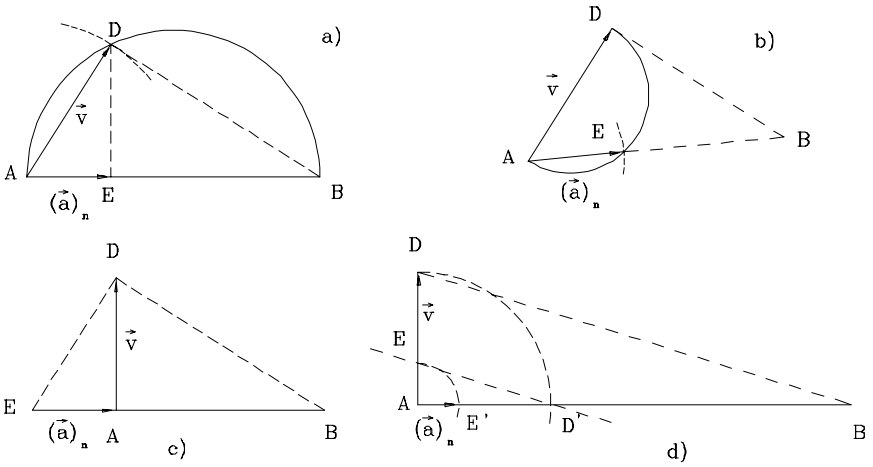


Figura 4

e quindi:

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}} = \frac{v^2}{\rho} = \overline{AE} = \left[a_P\right]_n$$

Qualora si avesse ρ<v, (fig.4, b), si traccia prima una semicirconferenza di diametro AD=v e la si taglia in E con un arco di raggio ρ avente centro in A; la perpendicolare condotta da D ad AD si incontrerà in B con la retta AE dando così luogo al triangolo rettangolo ABD su cui sarà, questa volta, AE=ρ e AB=$[a_P]_n$.

2. - costruire il triangolo rettangolo ABD (fig.4, c) di cui siano AD=v ed AB=ρ i cateti; la perpendicolare per D all'ipotenusa BD incontra in E il prolungamento di AB dando luogo di nuovo al triangolo rettangolo EBD di cui AD è l'altezza relativa all'ipotenusa; è quindi:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\ \overline{AE}$$

ossia ancora:

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}} = \frac{v^2}{\rho} = \overline{AE} = \left[a_P\right]_n$$

3. - noto il vettore $\vec{v}_A$ di A e la normale AB alla sua traiettoria con

centro in B (fig.4, d), ruotare di 90° su AB il segmento AD, rappresentativo del modulo di $\vec{v}_A$, per trovare il punto D': si traccia quindi la parallela a BD per D' ottenendo i due triangoli simili ABD ed AD'E.
Pertanto:

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{A'D}$$

Ma poiché è AD=AD' ed AB=ρ sarà ancora:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\ \overline{AE}$$

e quindi:

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}} = \frac{v^2}{\rho} = \overline{AE} = \left[a_P\right]_n$$

b). - E' abbastanza frequente il caso in cui, dati due punti A e B di uno stesso sistema rigido, si conosca, per esempio, di A, la sua velocità, $\vec{v}_A$, e la sua accelerazione, $\vec{a}_A$, mentre del secondo punto, B, si conosce la traiettoria (fig.5) il cui centro di curvatura sia il punto fisso O_1; con tali dati, si vuole conoscere l'accelerazione del secondo punto, B.
La risoluzione di un problema di questo tipo richiede, anzitutto, altre informazioni sulla distribuzione delle velocità. Si troverà quindi il centro della rotazione istantanea, C, intersecando la normale alla velocità $\vec{v}_A$ con il prolungamento di O_1B. Potremo quindi scrivere:

$$v_A : \overline{AB} = v_B : \overline{BC}$$

che consente di ricavare il modulo della velocità di B come:

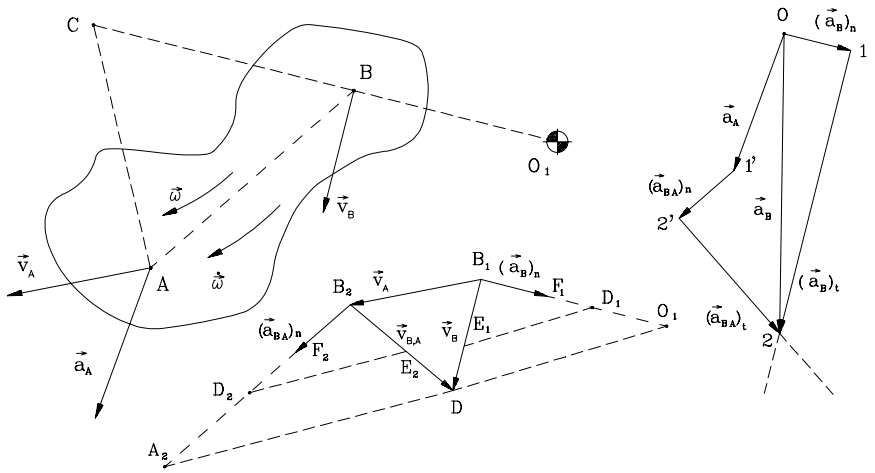


Figura 5

$$v_B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} v_A$$

la cui direzione dovrà essere perpendicolare ad O_1B ed il verso coerente con quello della velocità di A: devono cioè essere rispettate le relazioni:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C) \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C)$$

Per quanto concerne le accelerazioni dei punti A e B, il legame fra la $\vec{a}_B$ e la $\vec{a}_A$ è dato dal teorema di Rivals, ossia:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A)$$

che conviene, adesso, scrivere nella forma:

$$\left[\vec{a}_B\right]_t + \left[\vec{a}_B\right]_n = \vec{a}_A + \left[\vec{a}_{BA}\right]_t + \left[\vec{a}_{BA}\right]_n \qquad \textbf{(88)}$$

Esaminando i vari termini di questa relazione, riferita al caso in esame, si può osservare che il primo vettore a secondo membro, $\vec{a}_A$, è noto; che i componenti $\left[\vec{a}_B\right]_n$ ed $\left[\vec{a}_{BA}\right]_n$possono essere calcolati, mentre dei componenti $\left[\vec{a}_B\right]_t$ed $\left[\vec{a}_{BA}\right]_t$si conoscono solamente le direzioni, rispettivamente normale alla direzione BO_1, il primo, e normale ad AB, il secondo.

Per il calcolo del componente $\left[\vec{a}_{BA}\right]_n$ si può procedere per due diverse vie:

1- trovare dapprima il valore del modulo di $\vec{\omega}$, velocità angolare del rigido, dal rapporto $\omega = v_A/AC$, e calcolare quindi:

$$\left[\vec{a}_{BA}\right]_n = -\omega^2 (B - A)$$

oppure:

- avendo già trovato il vettore $\vec{v}_B$, calcolare il componente $\left[\vec{a}_B\right]_n$ per mezzo della costruzione di fig.4,d , che in tal caso porta a scrivere:

$$\left[\vec{a}_B\right]_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{v_B^2}{\overline{BO_1}}$$

Inoltre dovrà pure essere:

$$\left[\vec{a}_{BA}\right]_n = \frac{v_{BA}^2}{\overline{AB}}$$

che potrà ottenersi con la medesima costruzione grafica dopo aver ricavato, come mostra la fig.5, il vettore differenza:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Giunti a questo punto, i componenti $\left[\vec{a}_B\right]_n$ ed $\left[\vec{a}_{BA}\right]_n$ sono noti e si può procedere alla costruzione del poligono delle accelerazioni.
In fig.5 sono stati riportati, in 01' il vettore $\vec{a}_A$, in 1'2' il componente $\left[\vec{a}_{BA}\right]_n$, ed in 01 il componente $\left[\vec{a}_B\right]_n$; sono state poi tracciate, a partire dall'estremo 2', una retta avente la direzione del componente incognito $\left[\vec{a}_{BA}\right]_t$, ed, a partire dall'estremo 1, una retta avente la direzione del componente incognito $\left[\vec{a}_B\right]_t$; l'intersezione, 2, di queste due rette fissa univocamente i moduli ed i versi dei componenti tangenziali delle accelerazioni: devono essere tali da soddisfare la relazione di Rivals, (88). Il vettore risultante in 02 è proprio $\vec{a}_B$, il vettore cercato. Dalla lettura del poligono delle accelerazioni si ha, infatti:

$$\vec{a}_B = \left[\vec{a}_B\right]_n + \left[\vec{a}_B\right]_t = \vec{a}_A + \left[\vec{a}_{BA}\right]_n + \left[\vec{a}_{BA}\right]_t$$

In tal modo il problema che ci si era proposto è risolto.

§ 3. - Il centro delle accelerazioni.

Dato un sistema rigido (A) cui appartengano i punti A e B, e note, di questi, le accelerazioni $\vec{a}_A$ ed $\vec{a}_B$, ci si pone il problema di individuare, se esiste, un punto dello stesso sistema rigido (A), o comunque del suo piano mobile, che, nell'istante considerato, abbia accelerazione nulla.
Per il teorema di Rivals, la differenza fra le accelerazioni dei due punti è il vettore:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

ed il suo modulo è:

$$a_{BA} = \overline{AB}\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

mentre l'angolo ψ da esso formato con la direzione della congiungente AB è dato da:

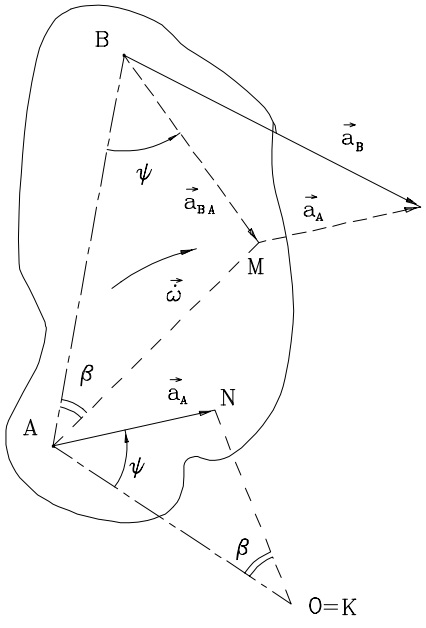


Figura 6

$$\tan\psi = \frac{\omega}{\omega^2} \qquad \textbf{(89)}$$

Riportando in B, (fig.6), il vettore $\vec{a}_{BA}$, resta definito il triangolo ABM in cui è ∠BAM=ψ.
Possiamo costruire quindi, sul vettore $\vec{a}_A$, il triangolo AON simile al triangolo ABM e tale che l'angolo ∠AON=ψ sia equiverso con l'angolo ∠BAM.
Poiché i due triangoli AON ed ABM sono simili per costruzione dovrà essere:

$$a_{BA} : \overline{AB} = a_A : \overline{AO}$$

e quindi:

$$a_A = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} a_{BA} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} AB\sqrt{\omega^2+\omega^4} = a_{AO}$$

Inoltre, poiché il vettore $\vec{a}_A$ forma con la congiungente AO proprio l'angolo ψ espresso dalla (89) la precedente uguaglianza deve valere anche per:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO} \qquad \textbf{(90)}$$

Vediamo però, a questo punto, che l'accelerazione del punto A, se espressa per mezzo del teorema di Rivals con riferimento al punto O del rigido, sarebbe da scrivere come:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}$$

e se confrontiamo quest'ultima con la (90) dobbiamo concludere che deve essere quindi:

$$\vec{a}_O = 0$$

Il punto O è quindi il punto che, all'istante considerato, **ha accelerazione nulla**; tale punto, che generalmente viene indicato con K, prende il nome di **centro delle accelerazioni**.

Ai fini della valutazione delle accelerazioni dei punti di uno stesso sistema rigido piano esso può essere considerato come un punto fisso e pertanto, per un generico punto P di (A), si potrà

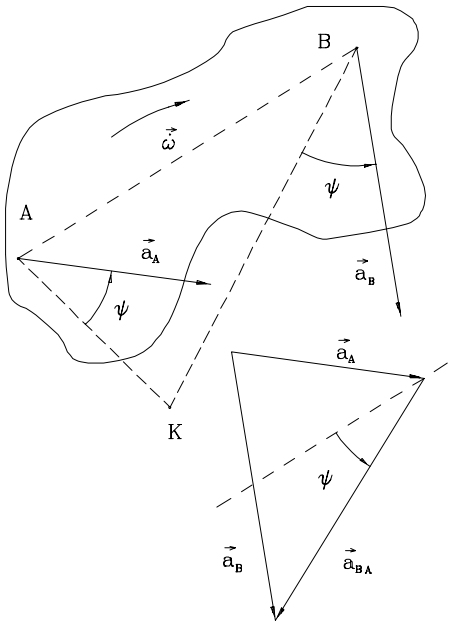


Figura 7

scrivere:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-K) - \omega^2 (P-K)$$

con:

$$a_P = \overline{PK}\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

I vettori accelerazione dei diversi punti del rigido formeranno lo stesso angolo ψ con la congiungente ciascun punto con il centro K. Segue da ciò che è facile individuare la posizione del centro delle accelerazioni (fig.7): è sufficiente tracciare, per due punti qualsiasi di cui siano note le accelerazioni, due rette ruotate dello stesso angolo ψ rispetto alla direzione dei vettori; il punto K dovrà trovarsi nella loro intersezione.

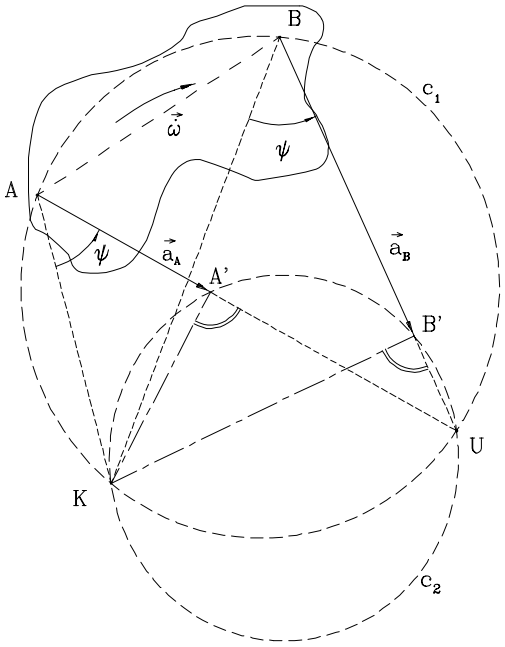


Figura 8

Ciò corrisponde, come mostra la fig.8, al tracciamento di due circonferenze: l'una, c_1, passante per il punto di intersezione, U, delle rette su cui giacciono i vettori accelerazione, $\vec{a}_A$ ed $\vec{a}_B$, e per l'origine degli stessi; la seconda, c_2, passante ancora per il punto U e per i secondi estremi degli stessi vettori. La seconda intersezione, K, delle due circonferenze è proprio il centro delle accelerazioni; ed infatti gli angoli $\angle$AKU e $\angle$BKU poiché vedono lo stesso arco KU di c_1 sono eguali e pari proprio a ψ.
Inoltre sono uguali gli angoli $\angle$A'KU e $\angle$B'KU perché vedono lo stesso arco KU di c_2; sono uguali, di conseguenza, anche gli angoli $\angle$A'KA e $\angle$B'KB.
Ne segue che sono simili i triangoli KAA' e KBB' e quindi deve essere:

$$\overline{AK} : \overline{BK} = \overline{A'A} : \overline{B'B}$$

come pure:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{B'B}}$$

Ma ciò equivale a stabilire la proporzionalità fra i moduli:

$$\frac{\overline{AK}}{a_A} = \frac{\overline{BK}}{a_B}$$

che insieme alla eguaglianza degli angoli ψ, di cui si è già visto sopra, ci conferma che il punto K trovato in questo modo è proprio il centro delle accelerazioni del rigido cui i punti A e B appartengono.

§ 4. - Accelerazione del centro delle velocità.

Si è già trovato al §7 del Cap.VII che la velocità del centro della rotazione istantanea, nel moto di rotolamento della polare mobile sulla polare fissa, può essere espressa nella forma:

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del rigido e D è dato da:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

con R_f ed R_m i raggi di curvatura delle polari. Si è trovato anche (§ 6) che è nulla la velocità del centro delle velocità, C_v, ossia del punto del rigido che, nell'istante considerato, coincide con C.

Poiché, per tale punto, la condizione di velocità nulla è una condizione istantanea esso dovrà essere soggetto ad una accelerazione, e di questa si vuole trovare l'espressione.

Con il teorema di Rivals scriviamo il legame fra l'accelerazione di un generico punto P del rigido e quella del suo centro delle velocità.

Sarà:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{C_v} + \vec{\omega} \wedge \left(P - C_v\right) - \omega^2 \left(P - C_v\right) \qquad \textbf{(91)}$$

D'altra parte, poiché la velocità del punto P è espressa da:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

la stessa accelerazione può essere ottenuta da quest'ultima relazione, derivandola rispetto al tempo.

Si ottiene:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-C) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_P - \vec{v}_C\right) = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-C) - \omega^2 (P-C) - \vec{\omega} \wedge \vec{v}_C$$

dove la differenza $\left(\vec{v}_P - \vec{v}_C\right)$ è il termine che tiene conto del moto relativo fra i punti P e C dovuto allo spostamento di C sulle polari.
Sarà pertanto proprio:

$$\vec{v}_C = \omega D \vec{\tau}$$

ed:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \omega \vec{k} \wedge \omega D \vec{\tau} = \omega^2 D \vec{n}$$

e quindi la accelerazione del punto P si può scrivere come:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-C) - \omega^2 (P-C) - \omega^2 D \vec{n} \qquad \textbf{(92)}$$

Dal confronto della (91) con la (92), e tenendo conto che, geometricamente C≡C_v , si può dedurre che è proprio:

$$\vec{a}_{C_v} = -\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = -\omega^2 D \vec{n}$$

Se ne conclude che **l'accelerazione del centro delle velocità** è un vettore perpendicolare alla direzione della velocità di C e quindi orientato secondo la normale comune alle polari, e **rivolto sempre verso il centro di curvatura della polare mobile**. Infatti il caso in cui D risulta negativo, corrisponde a quello in cui il centro di curvatura della polare mobile sta dalla stessa parte di quello della polare fissa (cfr. §7 Cap. VII).
D'altra parte, che il vettore debba avere tale direzione e verso trova rispondenza (fig. 9) nel fatto che il punto C_v è pur sempre un punto del rigido ed il suo moto è legato, quindi, al rotolamento della polare mobile sulla polare fissa; la sua traiettoria, nell'intorno della configurazione in cui esso assume la funzione di centro delle velocità, presenterà una cuspide la cui tangente in C_v ha la direzione della normale comune alle polari.

Dal punto di vista cinematico, inoltre, l'accelerazione dovrà essere tale da annullare la velocità che il punto possedeva in un istante precedente il contatto in C, e tale anche da restituirgli una velocità diversa da zero nell'istante successivo a quel contatto.
Appare chiaro, in conclusione, che, allorquando il punto di cui si voglia esprimere l'accelerazione appartiene ad un rigido il cui moto non avviene intorno ad un punto fis-

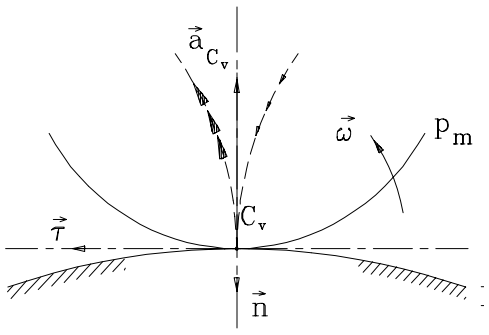


Figura 9

so, si può fare riferimento al centro C_v, come nel caso del calcolo delle velocità, ma occorre prestare attenzione, in questo caso, al fatto che il punto C_v è un punto mobile e mettere in conto la sua accelerazione.

§ 5. - Circonferenza dei flessi e di stazionarietà.

Sia dato un sistema rigido, in moto con velocità angolare $\vec{\omega}$ ed accelerazione angolare $\dot{\vec{\omega}}$, di cui sia noto il centro delle velocità C_v e la normale comune alle polari, $\vec{n}$; sia P un suo punto generico (fig.10).
Esprimendo l'accelerazione di P con il teorema di Rivals scriveremo:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{C_v} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C_v)\,\omega^2 (P - C_v)$$

La congiungente PC_v, che è anche la normale alla traiettoria di P nell'istante considerato, forma con la normale comune alle polari un angolo φ: su di essa indichiamo con $\vec{v}$ un versore orientato verso il centro di curvatura della traiettoria del punto, cosicché $\vec{v}$ coincida con $\vec{n}$ quando $\varphi=0$; indichiamo pure con $\vec{\mu}$ un versore lungo la tangente alla stessa, positivo nel verso per il quale ruotando in senso antiorario di 90° si sovrappone a $\vec{v}$.
Nel riferimento con origine in P e di versori $\vec{\mu}$ e $\vec{v}$, i componenti della accelerazione di C_v sono:

$$\left(\vec{a}_{C_v} \times \vec{v}\right)\vec{v} = -D\omega^2 \cos\varphi\ \vec{v} \quad \left(\vec{a}_{C_v} \times \vec{\mu}\right)\vec{\mu} = -D\omega^2 \operatorname{sen}\varphi\ \vec{\mu}$$

ed i componenti della accelerazione di P rispetto a C_v sono:

$$\left(\vec{a}_{PC_v} \times \vec{v}\right)\vec{v} = -\omega^2 \left(P - C_v\right) \times \vec{v} = -\omega^2\, \overline{C_v P}\vec{v}$$
$$\left(\vec{a}_{PC_v} \times \vec{\mu}\right)\vec{\mu} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \left(P - C_v\right) \times\ \vec{\mu} = -\omega \overline{C_v P}\vec{\mu}$$

essendo C_vP il segmento orientato (<0 in figura) che rappresenta la distanza di P da C_v.
L'accelerazione di P può, quindi, essere scritta come:

$$\vec{a}_P = -D\omega^2 \cos\varphi\ \vec{v} - D\omega^2 \operatorname{sen}\varphi\ \ \vec{\mu} - \omega^2\, \overline{C_v P}\vec{v} - \omega \overline{C_v P}\vec{\mu}$$

oppure, raggruppando secondo i versori:

$$\vec{a}_P = -\omega\left(\overline{C_v P} + D\frac{\omega^2}{\omega}\operatorname{sen}\varphi\right)\vec{\mu} - \omega^2\left(\overline{C_v P} + D\cos\varphi\right)\ \vec{v} \qquad \textbf{(93)}$$

I termini a secondo membro di questa espressione sono, evidentemente, nell'ordine, il componente tangenziale ed il componente normale della accelerazione di P.
Ora, poiché P è un generico punto del rigido, è lecito porci il quesito se fra i diversi punti appartenenti al rigido stesso ve ne siano alcuni che, all'istante considerato, presentano il componente normale della accelerazione nullo. Per esistere tale circostanza dovrà essere soddisfatta la condizione:

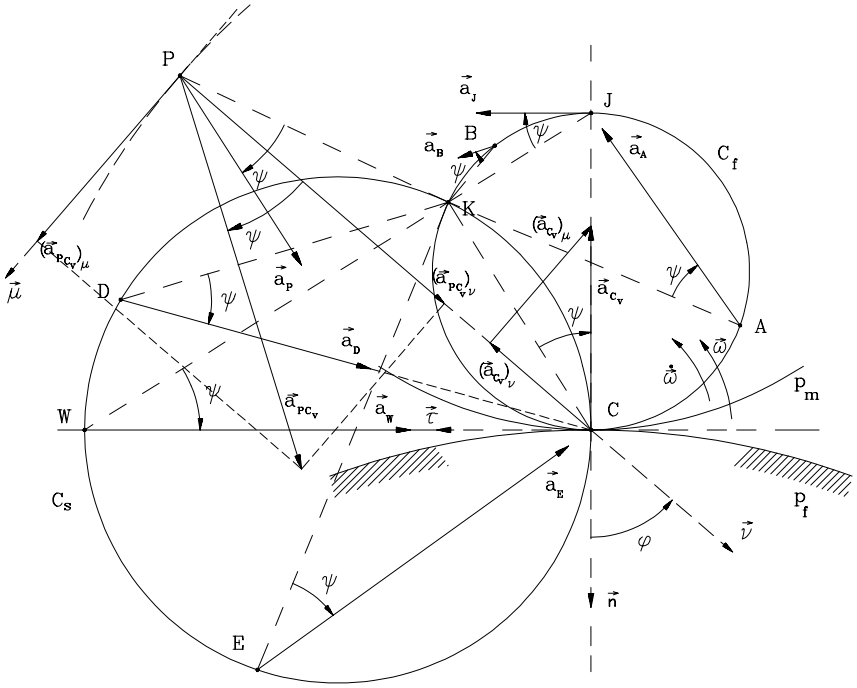


Figura 10

$$\omega^2\left(\overline{C_v P}+D\cos\varphi\right)\vec{\nu}=0$$

Per tali punti dovrà, cioè, essere:

$$\overline{C_v P}=-D\cos\varphi$$

Al variare di P, e quindi al variare dell'angolo φ, questa relazione rappresenta, in coordinate polari, i punti di una circonferenza il cui diametro è D: tale diametro, corrispondente al valore φ=0, sta, evidentemente, sulla normale comune alle polari e dalla stessa parte in cui si trova il centro di curvatura della polare mobile.

La circonferenza così trovata prende il nome di **circonferenza**

dei flessi e definisce il **luogo dei punti del rigido che all'istante considerato hanno accelerazione normale nulla**.
Poiché la caratteristica di avere accelerazione normale nulla può competere solo ai punti la cui traiettoria, al dato istante, presenta raggio di curvatura $\rho=\infty$, è evidente che a questa circonferenza apparterranno quei punti la cui traiettoria presenti, in quell'istante, almeno un flesso (da cui la denominazione): la loro accelerazione, di conseguenza avrà **direzione** coincidente con la tangente alla traiettoria e quindi perpendicolare alla PC_v ($\equiv$ con la normale alla traiettoria). Ne segue che, poiché tali punti stanno tutti sulla circonferenza di cui C_v è l'estremo di un diametro, le direzioni delle loro accelerazioni passeranno tutte per l'altro estremo di quel diametro: per tale motivo il secondo estremo, J, del diametro passante per C_v prende il nome di **polo dei flessi**.
In particolare, l'accelerazione di J risulterà perpendicolare a tale diametro ed il suo valore sarà:

$$\vec{a}_J = D\omega\vec{\tau}$$

come si può ricavare dalla (93) ponendo $\varphi=0$ e $C_v P = -D$; inoltre la sua velocità sarà eguale a quella con cui C si sposta sulle polari, dovendo essere:

$$\vec{v}_J = \vec{\omega} \wedge \left(J - C_v\right) = D\omega\vec{\tau}$$

Ragionando in modo del tutto analogo si possono cercare anche gli eventuali punti dello stesso rigido che, all'istante considerato, hanno nullo il componente tangenziale dell'accelerazione, ossia che stanno descrivendo la loro traiettoria con moto circolare uniforme.
Saranno quelli per i quali risulterà soddisfatta la condizione:

$$\omega\left(\overline{C_v P} + D\frac{\omega^2}{\omega}\operatorname{sen}\varphi\right)\vec{u} = 0$$

ossia per i quali è:

$$\overline{C_v P} = -D\frac{\omega^2}{\omega}\operatorname{sen}\varphi = D\frac{\omega^2}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$$

Anche questa relazione rappresenta, al variare di P e quindi di φ, il diagramma polare di una circonferenza il cui diametro vale $D\omega^2/\omega$; rispetto al diametro della circonferenza dei flessi, questo, quando è D>0, risulta ruotato di $\pi/2$, nel senso positivo se è $\omega > 0$, nel senso negativo se è $\omega < 0$: in ogni caso il diametro di tale circonferenza risulterà disposto lungo la tangente comune alle polari.

Questa seconda circonferenza prende il nome di **circonferenza di stazionarietà** e definisce quindi il **luogo dei punti del rigido la cui**

accelerazione è solamente normale; i corrispondenti vettori accelerazione avranno la direzione della normale alla traiettoria ossia quella della congiungente PC_v.

Salvo i casi in cui una delle due sia degenere, la circonferenza dei flessi, c_f, e la circonferenza di stazionarietà, c_s, hanno in comune, oltre al punto C_v, un secondo punto, il quale, per il fatto di appartenere contemporaneamente ad entrambe le circonferenze, deve soddisfare alla doppia condizione di avere nullo sia il componente normale che il componente tangenziale dell'accelerazione: sarà quindi necessariamente un punto privo di accelerazione, e pertanto è proprio il punto K, **centro delle accelerazioni**.

Così come si è già visto al §3, il modulo del vettore accelerazione di un qualsiasi punto del rigido sarà dato da:

$$a_P = PK\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

e la sua direzione formerà sempre l'angolo ψ con la congiungente PK, tale che sia:

$$\tan\psi = \frac{\omega}{\omega^2}$$

Si può verificare che ciò vale anche, sia per i punti che appartengono alla circonferenza dei flessi che, infatti, proiettano i punti J e K sotto il medesimo angolo ψ, sia per i punti della circonferenza di stazionarietà che proiettano sotto lo stesso angolo i punti K e C_v.

Infine (fig.10), poiché le direzioni della $\vec{a}_J$ e quella della $\vec{a}_W$ sono fra loro parallele, la retta congiungente detti punti passa per K, e la retta per K e C_v risulta perpendicolare alla JW.

Una particolare attenzione merita ancora il punto C_v: esso pure appartiene contemporaneamente alla c_f ed alla c_s, ma di esso non può dirsi che abbia accelerazione nulla; anzi se ne è già trovato il valore.

Tale apparente contraddizione può essere spiegata in modo sintetico: l'appartenenza di un punto alla c_f si può esprimere vettorialmente con la relazione:

$$\vec{v}_P \wedge \vec{a}_P = 0$$

che definisce il parallelismo fra velocità ed accelerazione del punto stesso, mentre l'appartenenza alla c_s si può esprimere definendo la perpendicolarità fra questi due vettori, ossia con la relazione:

$$\vec{v}_P \times \vec{a}_P = 0$$

Ora, poiché la velocità del punto K è:

$$\vec{v}_K = \vec{\omega} \wedge \left(K - C_v\right)$$

le due precedenti condizioni, applicate al punto K possono essere soddisfatte solo se è $\vec{a}_K = 0$, ($\vec{a}_K$ non potrebbe essere contemporaneamente parallela e perpendicolare alla $\vec{v}_K$), mentre le stesse due condizioni risultano soddisfatte comunque per il punto C_v, essendo $\vec{v}_{C_v} = 0$, anche con $\vec{a}_{C_v} \neq 0$.

Si può notare inoltre che la $\vec{a}_{C_v}$, in quanto C_v appartiene alla circonferenza dei flessi, è correttamente rivolta verso il polo dei flessi e, in quanto C_v appartiene alla circonferenza di stazionarietà ha la direzione limite che compete alla accelerazione del punto che vada a coincidere con C_v.

§ 6. - Punto di flesso della normale alla traiettoria di un punto.

Nel precedente paragrafo si è visto che il componente normale della accelerazione di un generico punto P di un rigido in moto piano può esprimersi come:

$$\left[\vec{a}_P\right]_n = -\omega^2\left(\overline{C_v P} + D\cos\varphi\right)\ \vec{v}$$

che (fig.11) può scriversi pure come:

$$\left[\vec{a}_P\right]_n = \omega^2\left(\overline{PC_v} - D\cos\varphi\right)\ \vec{v} = \omega^2\,\overline{PF}\,\vec{v}$$

avendo posto:

$$\overline{PF} = \overline{PC_v} - D\cos\varphi$$

Vediamo allora che il punto F individua il punto di intersezione della normale alla traiettoria di P con la circonferenza dei flessi (fig.11). Esso prende il nome di **punto di flesso della normale** (alla traiettoria del punto).

D'altra parte, il punto P, per effetto del moto del rigido cui appartiene, descriverà, con

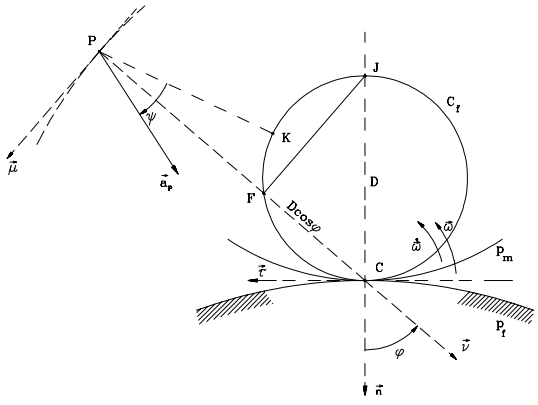


Figura 11

la velocità $\vec{v}_P$, una traiettoria che, all'istante considerato, avrà raggio di curvatura ρ; il componente normale della accelerazione potrà essere quindi scritto anche come:

$$\left[\vec{a}_P\right]_n = \frac{v_P^2}{\rho}\vec{v} = \omega^2 \frac{\overline{PC_v}^2}{\rho}\vec{v}$$

Eguagliando, possiamo quindi scrivere:

$$\overline{PF} = \frac{\overline{PC_v}^2}{\rho}$$

oppure anche:

$$\overline{PC_v}^2 = \overline{PF}\,\overline{PO}$$

se O è il centro di curvatura della traiettoria di P.

Restano quindi legate, lungo la normale alla traiettoria di un punto, le distanze che da questo hanno il **centro di curvatura, il centro delle velocità ed il punto di flesso della normale**.

Si vede che, poiché il primo membro dell'ultima relazione non può essere negativo, **il punto F ed il punto O devono trovarsi dalla stessa parte rispetto al punto P**. Ne discende immediatamente che, se il punto P è esterno alla circonferenza dei flessi il centro di curvatura della sua traiettoria starà, rispetto a P, dalla stessa parte di C_v, mentre se P è interno il centro O starà dalla parte opposta.

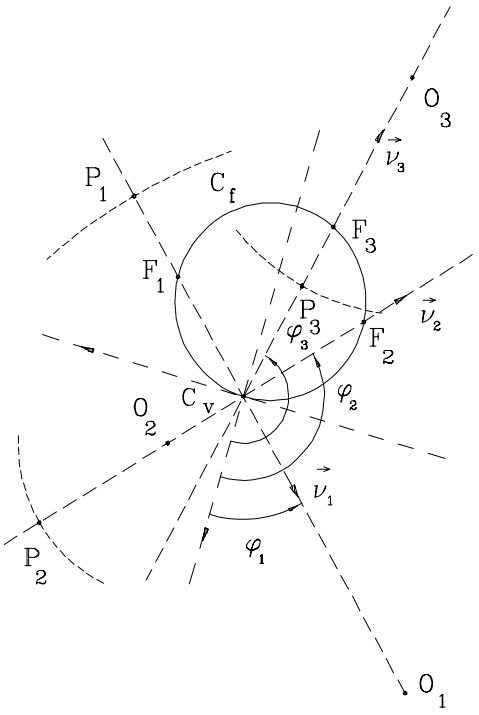


Figura 12

Se il punto P sta sulla circonferenza dei flessi si ha PF=0 ed allora, non potendo essere PC_v^2=0, si dovrà avere di contro PO=ρ=∞, e ciò conferma quanto precedentemente detto circa la caratteristica dei punti della c_f.

L'interpretazione grafica della relazione, che permette di trovare il punto F, può essere fatta con una delle costruzioni mostrate nella fig.4 del §2. Essendo nota, generalmente, la lunghezza del segmento PC_v, se è nota la traiettoria del punto e quindi il centro di curvatura corrispondente si può trovare il punto F; se, viceversa, è nota la circonferenza dei flessi e quindi il punto F si può ricavare il raggio di curvatura della traiettoria del punto. Nella prima di queste due circostanze la relazione torna quindi utile per individuare, quando occorra, un punto della circonferenza dei flessi.

§ 7. - Circonferenza dei regressi.

Riprendiamo la formula di Eulero-Savary nella forma già vista al § 8 del Cap.VII:

$$\frac{1}{D} = \left(\frac{1}{C\Omega_f} - \frac{1}{C\Omega_m} \right) \cos\varphi \qquad \textbf{(85')}$$

e supponiamo che sia noto il diametro, D, della circonferenza dei flessi. La (85'), si è già visto, ne stabilisce un legame fra i raggi di curvatura di due profili coniugati, uno fisso, l'altro solidale al piano mobile.

Un caso particolare di profilo mobile è rappresentato da una retta il cui profilo coniugato (fisso) sarà una curva del piano, inviluppo delle diverse posizioni da essa assunte durante il moto.
Attraverso la formula di Eulero-Savary possiamo cercare, per un dato istante, dove si trovi il centro di curvatura di tale profilo.

Nella (85'), la quantità $C\Omega_m$ rappresenta la distanza da C del centro di curvatura del generico profilo coniugato mobile il quale, nel nostro caso, è una retta: sarà quindi $\rho=\infty$ e di conseguenza anche $C\Omega_m=\infty$.
La (85') si riduce pertanto a:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{C\Omega_f} \cos\varphi$$

ossia a:

$$C\Omega_f = D\cos\varphi$$

dove φ, si ricordi, indica l'angolo formato dalla normale comune ai profili coniugati (in questo caso la normale alla retta passante per C) con la normale comune alle polari.
Ora, poiché $C\Omega_f$ è un segmento orientato con origine in C, questa rela-

zione rappresenta, al variare di φ, una circonferenza che, come quella dei flessi (§5) ha ancora diametro D ma è disposta simmetricamente ad essa rispetto alla tangente comune alle polari (fig.13).
Questa circonferenza prende il nome di **circonferenza dei regressi**, e definisce appunto il **luogo dei punti che sono centri di curvatura dei profili fissi inviluppati da rette appartenenti al piano mobile**.
In altre parole, tutte le volte che è possibile individuare una **retta solidale ad un rigido**, il profilo da questa inviluppato durante il moto del rigido stesso ha il suo centro di curvatura sulla circonferenza dei regressi.
Ciò vale anche se la retta, durante il suo moto, passa sempre per uno stesso punto: il profilo inviluppato ha raggio di curvatura nullo ed il punto stesso è un punto della c_r, circonferenza dei regressi.
L'individuazione di tali particolari centri di curvatura risulta spesso utile in quanto, data la simmetria della c_f e della c_r, il simmetrico rispetto a C di un punto della circonferenza dei regressi è sicuramente un punto che appartiene alla circonferenza dei flessi: la sua distanza da C è, infatti:

$$D\cos\varphi = CF$$

In modo del tutto analogo si può cercare il centro di curvatura di un profilo che, durante il suo moto, risulti sempre tangente ad una retta del piano fisso. Nella formula di Eulero-Savary avremo da porre, questa volta, $C\Omega_f=\infty$ e troveremo:

$$C\Omega_m = -D\cos\varphi$$

da cui si può dedurre che, in questi casi, il centro di curvatura Ω_m sta sulla circonferenza dei flessi e coincide con il punto di flesso della normale.

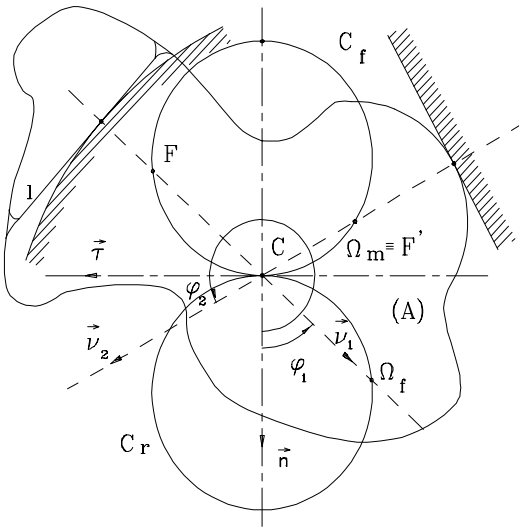


Figura 13

Questo non è un risultato nuovo ma solo una estensione della proprietà della c_f: nel § 5 si è detto soltanto che i suoi punti avevano nell'intorno di quella configurazione una traiettoria rettilinea, ma si era prima detto, anche, (§ 3 Cap.VII) che il punto e la sua traiettoria, la retta ed il suo inviluppo, non sono che particolari casi di profili coniugati.

§ 8. - Esempio di determinazione del centro delle accelerazioni.

Sia dato un sistema rigido in moto piano a cui appartengono i punti A e B, dei quali siano noti, ad un dato istante, i centri di curvatura A_0 e B_0 delle rispettive traiettorie; sia pure nota l'accelerazione di uno di essi, per es. la $\vec{a}_A$.
Si vuole trovare la posizione del centro delle accelerazioni, K (fig.14).
Il primo passo sta nella ricerca della circonferenza dei flessi, c_f, e del polo dei flessi, J.
Le rette congiungenti A con A_0 e B con B_0 sono le normali alle traiettorie dei punti A e B: sulla loro intersezione (teorema di Chasles) starà il centro di rotazione istantanea, C. Sulle stesse rette, proprio in quanto normali alle traiettorie dei rispettivi punti devono trovarsi i corrispondenti punti di flesso delle normali, F_A ed F_B che, come già visto, sono punti della circonferenza dei flessi.
Sarà:

$$\overline{AF_A} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AA_0}} \qquad \overline{BF_B} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BB_0}}$$

F_A ed F_B, così trovati, insieme al punto C definiscono quindi la circonferenza dei flessi di cui è immediato trovare il punto J, polo dei flessi: poiché i segmenti CF_A e CF_B sono corde della medesima circonferenza, le perpendicolari a queste per F_A e per F_B si dovranno incontrare nel secondo estremo del suo diametro passante per C e quindi proprio nel polo dei flessi J. Il segmento JC, diametro della circonferenza dei flessi, ha la direzione della normale comune alle polari che quindi risulta pure definita così come risulta di conseguenza definita anche la tangente ad esse passante per C.
Il diametro della circonferenza dei flessi, D, moltiplicato per ω^2, è il modulo della accelerazione di C_v, vettore con origine in C e rivolto verso il polo dei flessi J.

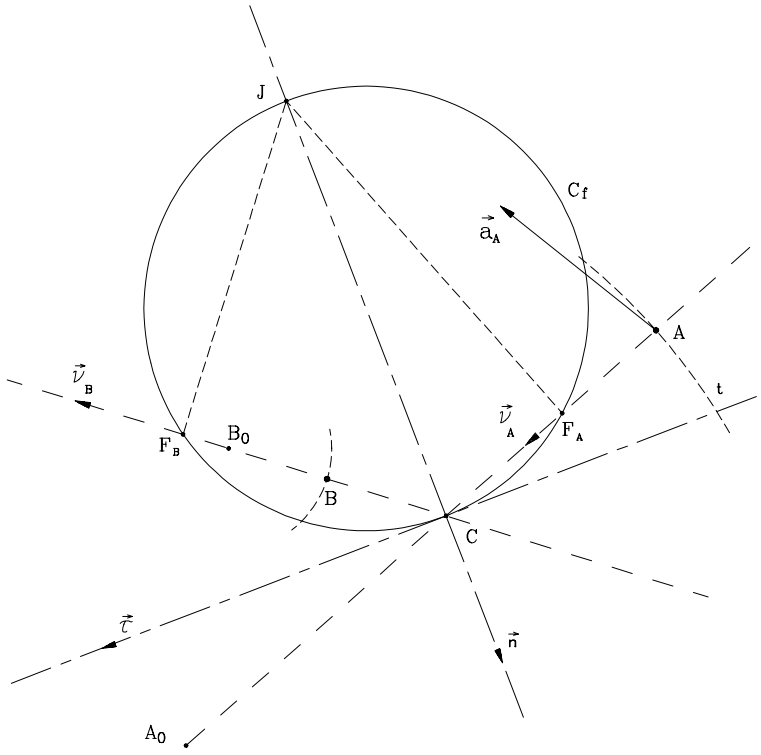


Figura 14

Il passo successivo, fig.15, è la ricerca del centro delle accelerazioni, K, ricerca per la quale si può utilizzare la costruzione descritta al §3 con i vettori $\vec{a}_A$ ed $\vec{a}_{C_v}$; il primo è noto in quanto assegnato, il secondo ottenuto come si è appena visto.

Rispetto alla costruzione descritta al §3, tuttavia, qui non occorre tracciare entrambe le circonferenze; sappiamo infatti che il punto K deve stare sulla circonferenza dei flessi che già è stata tracciata, e quindi basterà solamente una delle due: conviene quella per il punto U e per i punti A e C_v.

La retta d'azione del vettore $\vec{a}_A$, infatti, incontra la retta d'azione del vettore $\vec{a}_{C_v}$, cioè la normale comune alle polari, JC, nel punto U; la circonferenza passante per A, per U e per C taglia la c_f proprio nel punto K.

Si può verificare, infatti, che poiché sulla JC sta il vettore $\vec{a}_{C_v}$, l'angolo JCK è proprio l'angolo ψ ($\tan\psi = /\omega^2$) ed è lo stesso angolo sotto cui viene visto, sia da C che da A, l'arco KU della circonferenza per i punti A,U,C,K. Inoltre, una circonferenza per U e per gli estremi M ed N di $\vec{a}_A$ e di $\vec{a}_{C_v}$ passerebbe ancora per il punto K, mostrando la similitudine

dei triangoli KMA e KNC: ossia la proporzionalità dei moduli di $\vec{a}_A$ e di $\vec{a}_{C_v}$ alle rispettive distanze KA e KC.

Si può infine costruire, noto il punto K, la circonferenza di stazionarietà, c_s, che dovrà passare per C_v e per K, ed inoltre avere il centro sulla tangente comune alle polari: la retta JK incontra in T la tangente comune alle polari e, come si è già visto, questo è il secondo estremo del suo diametro.

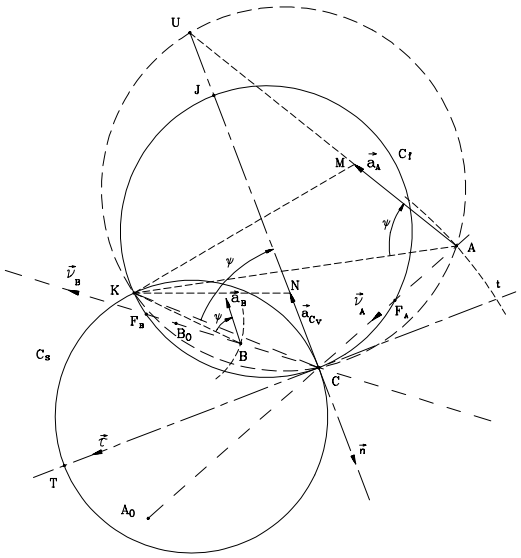


Figura 15

La costruzione della circonferenza dei regressi, c_r , è ovvia.

§ 9. - Le accelerazioni nei moti composti. Teorema di Coriolis.

Quando per un membro rigido in moto piano è possibile individuare l'esistenza di un moto composto, le accelerazioni dei suoi punti possono essere calcolate tenendo conto dei moti componenti: il moto relativo ed il moto di trascinamento.
Tuttavia, come si è visto al §7 del Cap. V, diversamente da quanto accade nel caso delle velocità, occorre qui tener conto dell'effetto combinato dei due moti componenti e pertanto, oltre ai vettori **accelerazione nel moto relativo**, ed **accelerazione nel moto di trascinamento**, compare anche il terzo vettore, **accelerazione di Coriolis**.
Ripetiamo, pertanto, che l'espressione completa della accelerazione assoluta di un generico punto P appartenente a un membro rigido in moto composto è quella data dal **teorema di Coriolis**:

$$\vec{a}_P^{(a)} = \vec{a}_P^{(r)} + \vec{a}_P^{(t)} + \vec{a}_P^{(co)}$$

dove:
- il vettore $\vec{a}_P^{(r)}$ è l'accelerazione che il punto P avrebbe se il rigido cui appartiene fosse dotato del solo moto relativo;

- il vettore $\vec{a}_P^{(t)}$ è l'accelerazione che il punto P avrebbe se il rigido cui appartiene fosse dotato del solo moto di trascinamento;
- il vettore $\vec{a}_P^{(co)}$ è il componente di Coriolis.

Per quanto riguarda quest'ultimo, si era già ricavato (67 §7 Cap. V) che è:

$$\vec{a}_P^{(co)} = 2\left(\xi \frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta \frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta \frac{d\vec{\nu}}{dt}\right)$$

Questa, se si tiene conto delle formule di Poisson (57 §7 Cap. V), e che la terna $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$ è solidale al rigido trascinante, si può scrivere:

$$\vec{a}_P^{(co)} = 2\left[\xi\left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\lambda}\right) + \eta\left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\mu}\right) + \zeta\left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{\nu}\right)\right]$$

ossia anche:

$$\vec{a}_P^{(co)} = 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \left(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}\right) = 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}_P^{(r)}$$

L'accelerazione di Coriolis risulta nulla quando è $\vec{\omega}^{(t)} = 0$ (il moto di trascinamento è un moto traslatorio), oppure quando, nell'istante considerato, è $\vec{v}_P^{(r)} = 0$, oppure, infine, quando il vettore $\vec{\omega}^{(t)}$ed il vettore $\vec{v}_P^{(r)}$ sono paralleli, circostanza quest'ultima che non può ricorrere nell'ambito dei moti piani, in cui le velocità dei punti sono sempre parallele al piano del moto ed i vettori velocità angolare sono tutti a questo perpendicolari.

CAPITOLO IX

I MECCANISMI PIANI

- PROBLEMI DIRETTI - RISOLUZIONE GRAFICA -

Sommario

1 - Il quadrilatero articolato piano
2 - Il manovellismo di spinta
3 - La guida di Fairbairn
4 - Il meccanismo a corsoio oscillante
5 - Guida di Fairbairn modificata del I tipo
6 - Guida di Fairbairn modificata del II tipo
7 - Guida di Fairbairn modificata del III tipo
8 - Meccanismi con contatti di puro rotolamento
9 - Meccanismi con contatti di strisciamento

Come è stato già precedentemente detto, i problemi che si presentano nella cinematica applicata possono essere suddivisi in due distinte categorie: i problemi diretti (o di analisi), ed i problemi inversi (o di sintesi).

Prendono il nome di **problemi diretti** quelli in cui il **meccanismo** da risolvere è già **assegnato**: è da ritenere nota la sua geometria (numero e dimensioni dei membri, tipo dei vincoli), è assegnata l'equazione oraria di uno qualsiasi (o più di uno se i suoi gradi di libertà sono più d'uno) dei suoi membri; si vuole **trovare la legge del moto** di tutti gli altri membri.

In generale l'equazione oraria di uno dei membri viene assegnata attraverso la sua velocità angolare, $\vec{\omega}$, e la sua accelerazione angolare,

$\dot{\omega}$; trovare la legge del moto significa calcolare le conseguenti velocità ed accelerazioni angolari, e, in particolare, quando sia stato fissato uno dei membri come elemento motore (ingresso) ed un altro come cedente (uscita), il rapporto di trasmissione $\tau=\omega_c/\omega_m$.

Prendono il nome di **problemi inversi**, viceversa, quelli in cui il meccanismo non è noto, ma, **assegnata una particolare legge del moto relativo**, si vuole **trovare** la coppia di **profili coniugati** che possono realizzarla, e cioè la forma che devono avere due membri a contatto per poter ottenere quel particolare moto.

Per quanto riguarda il comportamento dei membri di un meccanismo durante il loro moto, la nomenclatura corrente assegna generalmente il nome di **manovella** ad un membro cui la geometria complessiva del sistema consente una rotazione completa intorno ad un centro fisso, mentre definisce **bilanciere** un membro cui è consentita solamente una oscillazione fra due posizioni estreme; definisce poi **biella** un membro di collegamento fra due altri membri.

§ 1.- Il quadrilatero articolato piano.

Il quadrilatero articolato piano (fig.1) è un meccanismo che deriva da una catena cinematica composta da quattro aste collegate fra loro da coppie rotoidali, ad assi tutti paralleli, in modo che fra i membri sia consentito un moto relativo di tipo rotatorio.

Due delle coppie rotoidali, O_1, O_2, sono fisse e pertanto l'asta che le collega costituisce il telaio del meccanismo.

La scelta dell'asta cui si assegna la funzione di telaio dà luogo, ovviamente, a quattro meccanismi distinti le cui aste, tuttavia, hanno un comportamento generalmente diverso da caso a caso in relazione ai rapporti fra le loro dimensioni.

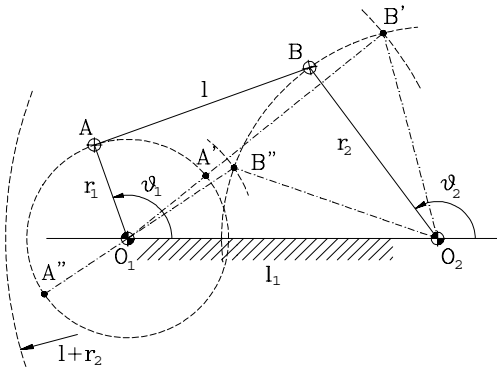


Figura 1

Una previsione sulla funzione delle singole aste può essere fatta in base alla regola di **Grashof**, la quale dice che:

*Un quadrilatero articolato piano può essere a **doppia manovella oppure a manovella e bilanciere** soltanto se la somma delle lunghezze dell'asta più corta e di quella più lunga sia minore della somma delle altre due.*

Diversamente si tratterà sempre di un quadrilatero a ***doppio bilanciere****. Inoltre, riguardo alla prima evenienza, se l'asta più corta funge da telaio si avrà un quadrilatero a doppia manovella, mentre si avrà un quadrilatero a manovella e bilanciere se funge da telaio una delle aste adiacenti alla più corta. Se, infine, l'asta più corta è la biella si avrà ancora un quadrilatero a doppio bilanciere.*

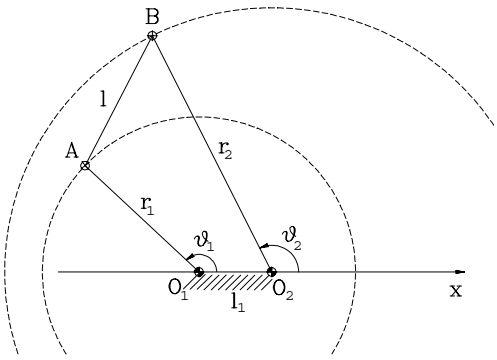


Figura 2

Tali casi sono rappresentati nelle figg.1, 2, 3, nelle quali sono state messe in evidenza gli archi di traiettoria possibili per gli estremi delle aste r_1 ed r_2, nonché le configurazioni di arresto e inversione di moto dei bilancieri.

Per un qualsiasi quadrilatero la verifica può essere fatta rapidamente in modo grafico considerando le possibili intersezioni fra la traiettoria teorica dell'estremo dell'asta r_1 (ed r_2) con le circonferenze di centro O_2 (O_1) e raggi rispettivamente $l+r_2$ ($l+r_1$) ed $l-r_2$ ($l-r_1$).

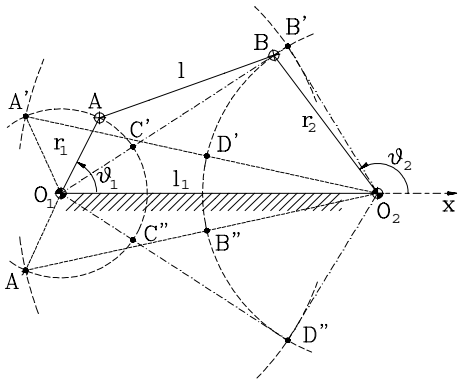


Figura 3

Consideriamo ora il quadrilatero articolato di fig.4 ed ipotizziamo che l'asta O_1A si muova con velocità angolare $\vec{\omega}_1$ costante e proponiamoci di trovare velocità ed accelerazioni angolari delle altre aste mobili. Il dato assegnato è sufficiente per la risoluzione del problema in quanto il meccanismo ha un solo grado di libertà: infatti esso ha tre membri mobili e 4 coppie rotoidali (inferiori) (v. Cap.VI §9).

La conoscenza di $\vec{\omega}_1$ consente immediatamente di ricavare **la velocità del punto A, estremo dell'asta O_1A** che ruota vincolata al punto fisso O_1; questo, pertanto, è il centro del moto dell'asta ed anche il centro di curvatura della traiettoria di A. Dovrà essere pertanto:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1 \right) \qquad \textbf{(94)}$$

Questo vettore risulta completamente noto poiché sono noti sia $\vec{\omega}_1$ che (A-O_1), e lo stesso vettore, ovviamente, **rappresenta la velocità di A come estremo dell'asta AB**.

Si può ora ricavare la velocità del punto B di AB: trattandosi del moto di un rigido di cui già si conosce la velocità di un punto, si può applicare la formula fondamentale dei moti rigidi, scrivendo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \qquad \textbf{(95)}$$

Qui è noto soltanto il primo addendo del secondo membro, mentre del secondo membro, che rappresenta la velocità di B rispetto ad A, si conosce solamente la direzione, perpendicolare ad AB, imposta dal prodotto vettoriale. Per quando riguarda il primo membro si può osservare che il vettore $\vec{v}_B$ deve necessariamente essere perpendicolare alla direzione di O_2B in quando il punto B, appartenendo anche a quest'asta, ha certamente una traiettoria circolare di centro O_2.

La (95) presenta quindi un vettore noto ed altri due vettori noti solo in direzione ed è pertanto risolubile graficamente costruendo il *triangolo delle velocità* come riportato nella stessa fig.4. Ricavati così i due vettori incogniti si può ottenere il vettore $\vec{\omega}$, velocità angolare della biella AB, dalla $\vec{v}_{BA}$ ed il vettore $\vec{\omega}_2$, velocità angolare del bilanciere O_2B, dal vettore $\vec{v}_B$.

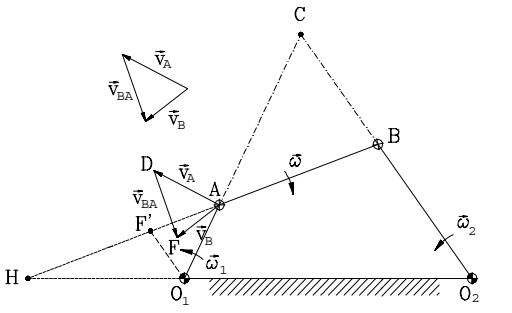


Figura 4

Al medesimo risultato si poteva giungere anche per altra via: prendendo in considerazione il centro della rotazione istantanea della biella, C, trovato come intersezione delle rette prolungamento della manovella e del bilanciere. Poiché i punti A e B appartengono entrambi alla biella le loro velocità dovranno essere proporzionali, in modulo, alle distanze AC e BC, direzione perpendicolare ai corrispondenti segmenti, e versi congruenti. Noto quindi il vettore $\vec{v}_A$ è immediato ricavare $\vec{v}_B$ con una costruzione di proporzionalità. La differenza fra questi due vettori darà poi la $\vec{v}_{BA}$ da cui ricavare poi la velocità angolare, $\vec{\omega}$, della biella.

Il rapporto $\tau=\omega_2/\omega_1$ fra le velocità angolari del bilanciere e dell'asta di ingresso, O_1A, è il rapporto di trasmissione del meccanismo nella configurazione esaminata.

Tale valore può anche essere ricavato immediatamente seguendo il seguente procedimento (fig.4).

Si prolunghi la biella AB fino ad intersecare in H il telaio O_1O_2 e si conduca da O_1 la parallela all'asta O_2B fino ad intersecare in F' tale prolungamento. Restano così individuati i triangoli $O_1F'H$ ed O_2BH che sono simili per costruzione. Possiamo quindi scrivere:

$$O_1F' : O_2B = O_1H : O_2H$$

e quindi:

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{O_1F'}{O_2B} \qquad \textbf{(96)}$$

Ma, contemporaneamente, il triangolo AO_1F' risulta pure simile al triangolo delle velocità ADF in quanto i suoi lati sono rispettivamente perpendicolari alle direzioni dei vettori velocità e quindi proporzionali ai loro moduli. Quindi è anche:

$$\frac{O_1F'}{O_1A} = \frac{AF}{AD} = \frac{\omega_2 O_2B}{\omega_1 O_1A}$$

da cui:

$$\frac{O_1F'}{O_2B} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad \textbf{(97)}$$

Confrontando la (96) con la (97) vediamo allora che è:

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau \qquad \textbf{(98)}$$

Ciò significa che le velocità angolari dei due bracci O_1A ed O_2B sono inversamente proporzionali alla distanza del punto H dalle corrispondenti cerniere.

La conoscenza del punto H, come si vede dalla (98) consente la valutazione immediata del rapporto di trasmissione del meccanismo.

Esso rappresenta, d'altra parte, il centro della rotazione istantanea nel moto relativo dei due bracci.

Infatti esso sta sulla congiungente i centri del loro moto assoluto - i punti O_1 ed O_2 - e sulla congiungente i centri del moto relativo dei due bracci rispetto alla biella - i punti A e B. Tenendo conto del teorema di Aronhold-Kennedy ed interpretando O_1H ed O_2H come segmenti orientati, la sua posizione indica, pertanto, se le due rotazioni sono concordi o discordi. Se esso cade all'interno del segmento O_1O_2 (O_1H ed O_2H sono discordi) le due rotazioni sono discordi ($\tau<0$), mentre se cade all'esterno le due rotazioni sono concordi ($\tau>0$). Infine sempre dalla (98) discende che la velocità angolare maggiore compete al braccio la cui cerniera fissa risulta più vicina al punto H.

Il calcolo delle accelerazioni, nell'ipotesi fatta di ω_1 costante procederà partendo dal calcolo dell'accelerazione del punto A, (fig.5), considerato appartenente all'asta O_1A; l'accelerazione di tale punto, noto il centro di curvatura della sua traiettoria e la velocità angolare dell'asta cui appartiene, sarà data solamente da:

$$\bar{a}_A = -\omega_1^2 (A - O_1) \qquad \textbf{(99)}$$

in quanto, per l'ipotesi iniziale di ω_1=cost e quindi manca il componente tangenziale.
Tale vettore è, quindi, completamente determinato. Per il punto B della biella, applicando il teorema di Rivals, si scriverà:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_B + \dot{\bar{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) \qquad \textbf{(100)}$$

Dei tre termini a secondo membro della seconda eguaglianza è noto il primo vettore, calcolato con la (99); è noto il terzo, in quanto è ormai nota la ω; non è completamente noto il secondo, di cui si conosce solo la direzione indicata dal prodotto vettore che gli impone essere perpendicolare ad AB.

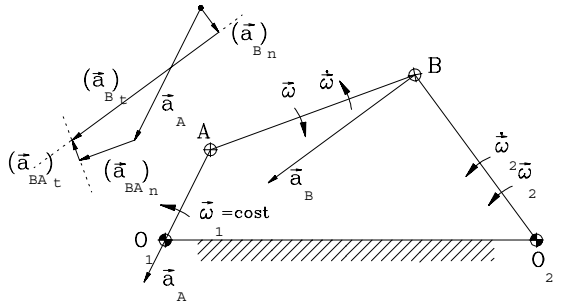


Figura 5

Inoltre, il punto B, oltre ad essere l'estremo della biella, è anche l'estremo del bilanciere O_2B, il vettore a primo membro deve essere il medesimo per entrambi; come estremo del bilanciere si conosce il centro di curvatura della sua traiettoria e la velocità angolare ω_2 (già calcolata) del membro cui appartiene. Dovrà quindi anche essere:

$$\bar{a}_B = \dot{\bar{\omega}}_2 \wedge \left(B - O_2\right) - \omega_2^2 \left(B - O_2\right) \qquad \textbf{(101)}$$

in cui, per gli stessi motivi visti per la (100), è nota solo la direzione del componente tangenziale dell'accelerazione, mentre ne è completamente noto il componente normale.
Uguagliando la (100) e la (101), quindi, si ottiene un'unica relazione vettoriale in cui figurano tutti vettori noti ad eccezione di due noti solo in direzione.
E' possibile quindi la soluzione grafica per mezzo della costruzione del *poligono delle accelerazioni* indicata in fig.5; sono indicate in tratteggio le due direzioni di chiusura del poligono. I versi dei vettori incogniti si ricavano seguendo la sequenza delle due somme vettoriali (100)

e (101).
Dallo stesso poligono si possono leggere, nella scala utilizzata per la costruzione, i moduli di $\left[\vec{a}_{BA}\right]_t$ e di $\left[\vec{a}_B\right]_t$e da questi ricavare l'accelerazione angolare della biella:

$$\omega = \frac{\left[a_{BA}\right]_t}{AB}$$

e l'accelerazione angolare del bilanciere:

$$\omega_2 = \frac{\left[a_B\right]_t}{BO_2}$$

i cui versi devono essere coerenti con i corrispondenti vettori pensati applicati in B.

Utilizzando il teorema di Rivals sarà poi possibile calcolare l'accelerazione di un qualsiasi altro punto che sia solidale alla biella.

§ 2.- Il manovellismo di spinta.

Se, partendo da un qualsiasi schema di quadrilatero articolato piano, si immagina di far crescere la lunghezza del bilanciere, si comprende come la curvatura della traiettoria del punto B, estremo della biella, diventi via via sempre minore fino ad annullarsi quando la lunghezza di questa asta sia diventata infinita. La traiettoria di B sarà dunque diventata rettilinea; l'accoppiamento fra l'estremo B della biella ed il telaio che può consentire il realizzarsi di tale traiettoria è l'accoppiamento prismatico.

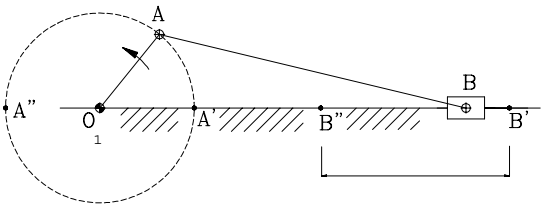


Figura 6

Il precedente meccanismo si è trasformato in un manovellismo di spinta (fig.6), meccanismo classico (pompe e motori alternativi) utilizzato tutte le volte che si voglia trasformare un moto rotatorio in un moto traslatorio alterno e viceversa.
L'asta O_1A sarà ora certamente una manovella e, nel suo moto, per il tramite della biella AB, farà spostare il corsoio in B lungo la guida (il telaio). La coppia rotoidale in A, a seconda se la si considera appartenente alla manovella o alla biella, prende il nome di **bottone di**

manovella o testa di biella; mentre la coppia rotoidale in B prende il nome di **piede di biella**. Quando il punto A descrivendo la sua traiettoria si troverà in A', la biella si dispone sul prolungamento della manovella e il piede di biella B si troverà nel suo **punto morto esterno** (p.m.e.) B' ; quando il punto A si troverà in A" biella e manovella saranno sovrapposte e il piede di biella sarà nel **punto morto interno** (p.m.i.) B". Il segmento B'B" rappresenta la **corsa** del piede di biella.

Si possono avere inoltre due soluzioni costruttive: quella che, come in fig.6, prende il nome di **manovellismo centrato** in cui la cerniera fissa O_1 ha il suo centro sull'asse della coppia prismatica; quella, in cui la cerniera fissa O_1 ha il suo centro ad una certa distanza da tale asse, e che prende il nome di **manovellismo non centrato** o disassato.

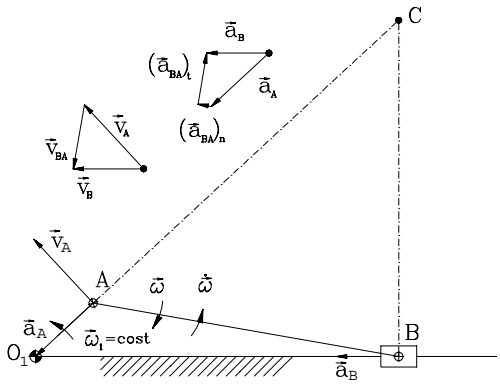


Figura 7

L'analisi cinematica del manovellismo, sia esso centrato o non centrato, si esegue con criterio del tutto analogo a quello visto nel caso del quadrilatero articolato.

Il procedimento è mostrato in fig.7, nella ipotesi che la manovella abbia una velocità angolare ω_1=cost.

La velocità del bottone di manovella, A, risulta completamente definita dovendo essere:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1\right) \tag{102}$$

mentre per la velocità del piede di biella, B, si potrà ancora scrivere:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \tag{103}$$

relazione in cui, di nuovo, dalla (102) è noto il primo vettore a secondo membro, mentre degli altri due sono note le direzioni. E' possibile, pertanto la costruzione del triangolo delle velocità come in fig. 7, e calcolare poi la velocità angolare della biella, ω.

Anche il problema della determinazione delle accelerazioni, così come visto per il quadrilatero, prende l'avvio dal bottone di manovella, A; essendo ω_1=cost, l'accelerazione di tale punto è nota e vale:

$$\vec{a}_A = -\omega_1^2 (A - O_1) \tag{104}$$

Essendo nullo il componente tangenziale, questo sarà un vettore orienta-

to lungo la direzione della manovella e verso che guarda il centro di curvatura della traiettoria di A.
L'accelerazione del punto B, piede di biella, in virtù del teorema di Rivals, si scriverà ancora come:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) - \omega^2 (B - A) \qquad \textbf{(105)}$$

in cui è nota la $\vec{a}_A$, ed il componente normale della $\vec{a}_{BA}$; del componente tangenziale di quest'ultima si conosce la direzione, perpendicolare alla direzione della biella.
Anche del vettore a primo membro si conosce la direzione: poiché il piede di biella, B, appartiene anche alla coppia prismatica che gli impone una traiettoria rettilinea lungo l'asse del telaio; questa, quindi deve essere la direzione dell'accelerazione di B. Il relativo poligono delle accelerazioni è riportato, in fig. 7; dal modulo di $\left[\vec{a}_{BA}\right]_t$ si potrà ricavare il valore di ω, accelerazione angolare della biella, allo stesso modo che nel quadrilatero articolato.

Si osservi, ancora in fig.7, come il vettore $\vec{a}_B$ risulti rivolto verso il punto medio della corsa del piede di biella; questa circostanza è tipica di tutti i punti in moto alterno, e non dipende dal verso assunto, al dato istante, dal vettore velocità.
Si consideri, infatti, che, ai punti morti, il vettore velocità del piede si annulla; nelle configurazioni corrispondenti ad un istante prima e un istante dopo quella di punto morto, invece, le velocità sono diverse da zero e di verso opposto: il vettore $\vec{a}_B$, pertanto, dovrà avere verso tale da indicare una volta una velocità in diminuzione ed una volta in aumento .

§ 3.- La guida di Fairbairn.

Se in un manovellismo di spinta si assegna la funzione di telaio alla manovella O_1A e funzione di manovella all'asta che costituisce la biella, lasciando il precedente telaio libero di muoversi, il meccanismo si trasforma in un altro meccanismo, del tipo cosiddetto "a glifo".
Tale denominazione è assegnata ad un'asta vincolata ad un estremo ad una coppia rotoidale fissa e su cui scorre un corsoio (coppia prismatica).

Se il rapporto fra la lunghezza della manovella e quella del telaio è minore di uno si ha un meccanismo a glifo oscillante (fig. 8) o guida di Fairbairn; se, invece tale rapporto è maggiore di uno si ha un meccanismo a glifo rotante (fig.9).

L'interesse della guida di Fairbairn, e quindi la sua importanza, è rappresentato dalla sua capacità di trasformare il moto rotatorio della

manovella in un moto oscillante del glifo: per lungo tempo, in passato, è stato l'elemento di comando di macchine utensili (per es. stozzatrici) laddove, inoltre, era richiesta una differente velocità di spostamento della tavola di lavoro: come si vedrà più avanti, al glifo, competono due differenti velocità angolari nella corsa di andata e in quella di ritorno. L'estremità P del glifo, in utilizzi di tal genere, è collegata alla tavola per il tramite di un ulteriore corsoio il cui asse del moto è perpendicolare a quello del moto della tavola stessa.

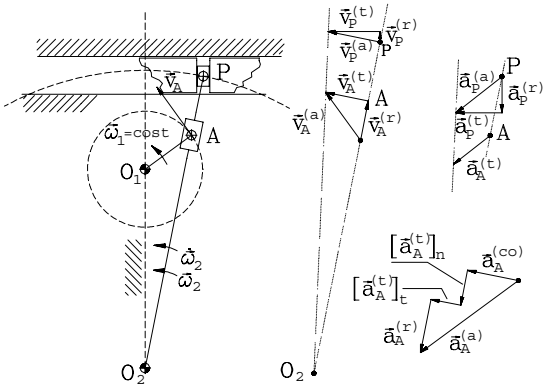


Figura 8

Per la risoluzione del problema cinematico facciamo anche qui l'ipotesi che la manovella si muova con velocità angolare ω_1= cost e con il verso di figura; questo dato consente di trovare, con la (102), la velocità del punto A, estremo della manovella.
Questo punto è anche punto del corsoio cui la manovella è collegata per il tramite della coppia rotoidale e pertanto la velocità di A, estremo della manovella, non può che essere la medesima che compete al punto A come punto del corsoio nel suo moto assoluto.

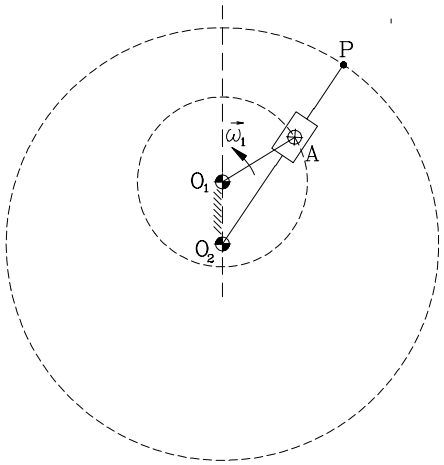


Figura 9

Ma il moto assoluto del corsoio, a sua volta, in quanto esso è vincolato al glifo che è un membro mobile, dovrà pure risultare dal moto composto: il moto relativo, traslatorio lungo l'asse del glifo, consentito dall'accoppiamento prismatico, e il moto di trascinamento da parte del glifo stesso, rotatorio intorno alla cerniera fissa O_2.
Per il punto A, allora, visto come punto del corsoio, deve essere valida la legge di composizione delle velocità per i moti composti e deve quindi essere:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)} \qquad \textbf{(106)}$$

In questa relazione il vettore a primo membro è completamente noto perché coincide con quello già calcolato con la (102), mentre dei due vettori a secondo membro sono note le direzioni: quella dell'asse del glifo per il primo, quella perpendicolare al glifo per il secondo.
E', allora, immediata la costruzione del triangolo delle velocità e la deduzione dei moduli e dei versi per i vettori velocità nel moto relativo e nel moto di trascinamento. Dal modulo di quest'ultimo si ricava, rapportandolo alla distanza O_1A, il valore istantaneo della velocità angolare del glifo, $\vec{\omega}_2$, e, dal suo verso, il verso di $\vec{\omega}_2$. Tenendo poi conto del significato di "moto di trascinamento", si può anche trovare, con una semplice costruzione di proporzionalità, la velocità assoluta del punto P, estremo del glifo (fig.8); quest'ultima dovrà pure essere pari alla somma della velocità del corsoio in P nel moto relativo alla tavola, e della velocità nel moto di trascinamento da parte della tavola stessa: di entrambe sono note le direzioni.

Per quanto riguarda il calcolo delle accelerazioni, la (104) consente di calcolare l'accelerazione del punto A, estremo della manovella, eguale alla accelerazione di A nel moto assoluto del corsoio. Per quanto detto prima sul moto del corsoio, a questo dovrà applicarsi il teorema di Coriolis e dovrà quindi essere:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \vec{a}_A^{(r)} + \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)} \qquad \textbf{(107)}$$

L'analisi dei tre vettori a secondo membro ci dice che: l'accelerazione di Coriolis è completamente nota in quanto dipende dalla velocità angolare nel moto di trascinamento, $\vec{\omega}_2$, e dalla $\vec{v}_A^{(r)}$; nel moto di trascinamento, la traiettoria di A è circolare di centro O_2 e quindi la corrispondente accelerazione avrà sia il componente normale che quello tangenziale e di questi è noto completamente il primo:

$$\left[\vec{a}_A^{(t)}\right]_n = -\omega_2^2\left(A - O_2\right)$$

di cui tutti i termini sono ormai noti, mentre del secondo:

$$\left[\vec{a}_A^{(t)}\right]_t = \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge \left(A - O_2\right)$$

si conosce la direzione; si conosce pure la direzione del vettore accelerazione di A nel moto relativo, traslatorio lungo il glifo. E' perciò possibile la costruzione del poligono delle accelerazioni da cui ricavare modulo e verso di $\dot{\vec{\omega}}_2$.
Con procedimento analogo a quello seguito per la velocità si può ricavare, ora, la accelerazione di P, e poi quella della tavola.

Analizziamo, adesso, come variano velocità ed accelerazione

angolare del glifo durante una rotazione completa della manovella di cui, in fig.10 è evidenziata la traiettoria dell'estremo A, traiettoria circolare di centro O_1 e raggio O_1A.

Su questa traiettoria sono evidenziati quattro punti particolari indicati con A', A", B', B" corrispondenti, i primi due, alle configurazioni in cui l'asse del glifo è tangente ad essa e quindi perpendicolare alla manovella, gli altri due alle configurazioni in cui manovella e glifo sono sovrapposti.

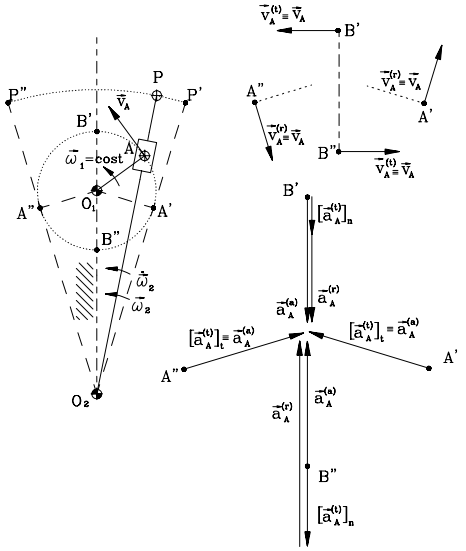


Figura 10

Ripetendo il procedimento seguito per il calcolo delle velocità per le configurazioni in cui il punto A si trova in A' o in A", si osserva che, in entrambi questi casi, la direzione della $\vec{v}_A^{(r)}$ coincide con quella della $\vec{v}_A^{(a)}$ e quindi la $\vec{v}_A^{(t)}$ risulta nulla e nulla la $\vec{\omega}_2$: come del resto è logico trattandosi delle configurazioni in cui il glifo è giunto agli estremi della sua oscillazione. In tali punti la velocità di A nel moto relativo risulta pertanto uguale a quella del moto assoluto.

Quando il punto A si trova, invece, in B' o in B" si ha la coincidenza della direzione della $\vec{v}_A^{(t)}$ con quella della $\vec{v}_A^{(a)}$ ed è di conseguenza nulla la $\vec{v}_A^{(r)}$, mentre risulta $\vec{v}_A^{(t)}=\vec{v}_A^{(a)}$. Si noti anche che il punto B' ha da O_2 una distanza maggiore di quella di B" e quindi il calcolo di $\vec{\omega}_2$ porta a trovare in corrispondenza di B' un valore minore di quello che si trova in B". Si troveranno anche versi discordi in quanto sono opposti i versi delle $\vec{v}_A^{(a)}$ nelle due configurazioni. Questo risultato mostra, come, precedentemente affermato, che il moto del glifo ha, nella corsa di andata, velocità angolare diversa da quella del moto di ritorno.

Nella stessa fig. 10, per gli stessi quattro punti, è mostrato come si dispongono i vettori accelerazione del punto A, ed i corrispondenti componenti del moto composto, sempre nell'ipotesi che la manovella si muova con velocità angolare costante.

§ 4. - Il meccanismo a corsoio oscillante.

Risulta ancora da una modifica del manovellismo di spinta, allorquando si assegna alla biella la funzione di telaio. In questo caso il corsoio risulta vincolato ad una cerniera fissa attorno al cui centro sarà costretto ad oscillare nel modo impostogli dall'asta AP; questa ultima collegata ad esso dalla coppia prismatica (fig. 11).

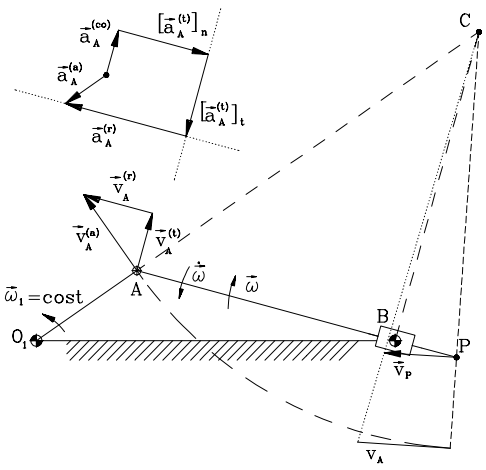


Figura 11

Il procedimento per il calcolo delle velocità, sempre nella ipotesi che la manovella si muova con velocità angolare $\vec{\omega}_1$=cost, ha inizio ancora con la determinazione della velocità dello estremo A di questa, per il quale deve sempre essere:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1 \right) \tag{108}$$

vettore completamente noto. Considerando poi A come estremo dell'asta AP, ed osservando che questa ha un moto composto, relativo rispetto al corsoio, e di trascinamento da parte dello stesso, dovrà di nuovo essere:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)} \tag{109}$$

per la quale valgono le medesime condizioni viste nel caso precedente, e che portano alla determinazione della velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta AP. Si osservi che questa velocità angolare è anche la velocità angolare del corsoio dal momento che il moto relativo tra asta e corsoio è solamente traslatorio (cfr. teorema di Kennedy).

Nella stessa fig.11 è mostrato un modo per ottenere anche la velocità del punto P, estremo dell'asta AP: si può ricavare dapprima la posizione del punto C, centro della rotazione istantanea dell'asta AP, il quale deve trovarsi sul prolungamento della manovella (teorema di Chasles) e sulla perpendicolare all'asta AP passante per la cerniera B (teorema di Kennedy); l'intersezione delle due rette individua il punto C; allora, considerando che deve anche essere:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C)$$

ma anche:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

si può costruire sull'allineamento CP la proporzionalità fra questi vettori ottenendo immediatamente il vettore incognito.
Le accelerazioni si ottengono, come nel caso precedente, applicando la (104) e la (107). Anche qui, oltre ai vettori completamente noti, si conoscono le direzioni dell'accelerazione di A nel moto relativo dell'asta rispetto al corsoio, e del componente tangenziale nel suo moto di trascinamento: da quest'ultimo si ricava l'accelerazione angolare dell'asta AP e dello stesso corsoio.

§ 5. - Guida di Fairbairn modificata del I tipo.

Si è visto (§ 3) che l'estremo P del glifo della guida di Fairbairn compie una traiettoria circolare per effetto del vincolo in O_2 e che, per ottenere un moto traslatorio della tavola, questa doveva essere collegata al glifo, in P, per mezzo di un secondo corsoio.
Lo stesso moto traslatorio della tavola, si può ottenere senza utilizzare il

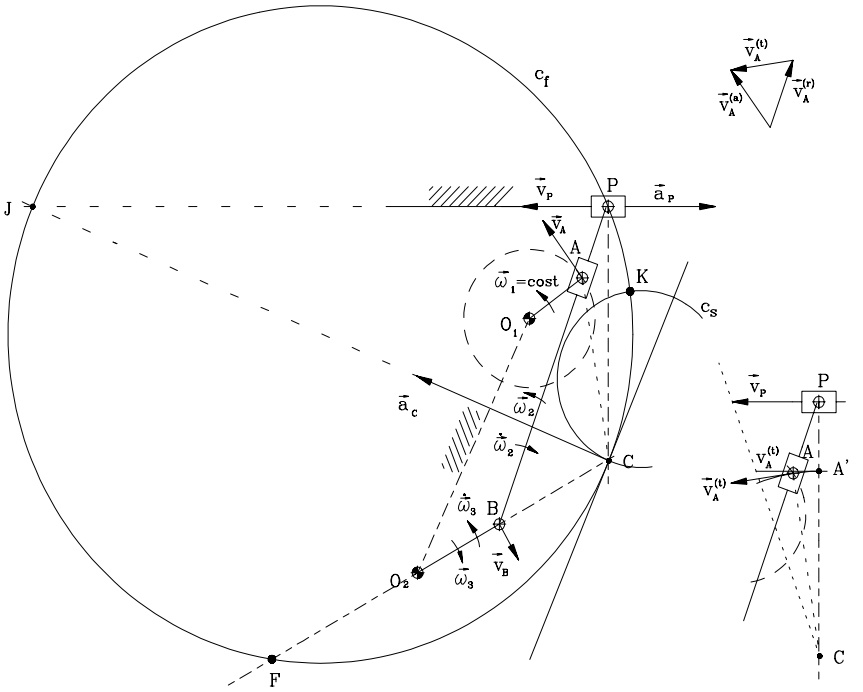


Figura 12

secondo corsoio, in P, e quindi collegando il glifo alla tavola solamente con una coppia rotoidale, interponendo fra la cerniera fissa O_2 e l'estremo del glifo, una bielletta secondaria. Il meccanismo assume allora l'aspetto di fig. 12, e prende il nome di guida di Fairbairn modificata del I tipo.
Esso risulta, nel complesso, costituito da 5 membri mobili e 7 coppie inferiori (5 rotoidali e due prismatiche) e quindi ha un solo grado di libertà. Assegnata, pertanto, la velocità angolare, $\vec{\omega}_1$, della manovella O_1A il problema cinematico deve essere risolubile.
Per il punto A visto come estremo della manovella sarà:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1 \right) \tag{108}$$

mentre, visto come punto appartenente al corsoio, è soggetto al moto di quest'ultimo, che risulta composto da un moto relativo lungo l'asse del glifo e dal moto di trascinamento da parte del glifo stesso. Sarà quindi da scrivere ancora:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)} \tag{109}$$

ma con la differenza, questa volta, che la direzione che deve avere il vettore $\vec{v}_A^{(t)}$ non è immediatamente nota in quanto il glifo non è vincolato ad un punto fisso. All'istante considerato esso ruoterà, infatti, intorno al suo centro delle velocità: questo punto, C, lo si trova sulla intersezione del prolungamento della direzione della bielletta e della perpendicolare alla guida fissa passante per il centro del corsoio in P. La direzione istantanea della $\vec{v}_A^{(t)}$sarà quella della perpendicolare alla congiungente AC. Si può ora costruire il triangolo delle velocità inerente alla (15) e da questo ricavare modulo e verso della velocità angolare, $\vec{\omega}_2$, del glifo. Noto, adesso, $\vec{\omega}_2$, è immediato il calcolo della velocità dei punti B e P che appartengono al medesimo membro rigido (il glifo). In particolare, per il punto B, si scriverà:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge (B - C) \tag{110}$$

e questo vettore dovrà essere lo stesso che si deve ottenere scrivendo:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_3 \wedge \left(B - O_2 \right) \tag{111}$$

ossia considerando B come estremo della bielletta. Nota allora la (110), dalla (111) si può ricavare modulo e verso di $\vec{\omega}_3$.
Per il calcolo della $\vec{v}_P$, la cui direzione è obbligata dal moto traslatorio del corrispondente corsoio, sarà sufficiente, come è mostrato nella stessa fig.12, ribaltare la $\vec{v}_A^{(t)}$, che è la velocità assoluta del corrispondente punto del glifo, in A' sullo allineamento PC e costruire la proporzionali-

tà che consente di ricavare il vettore cercato. D'altra parte, essendo ormai nota la $\vec{v}_A^{(t)}$, come pure la $\vec{v}_B$, ci si poteva pure servire della formula fondamentale dei moti rigidi utilizzando come centro del moto il punto A oppure il punto B.

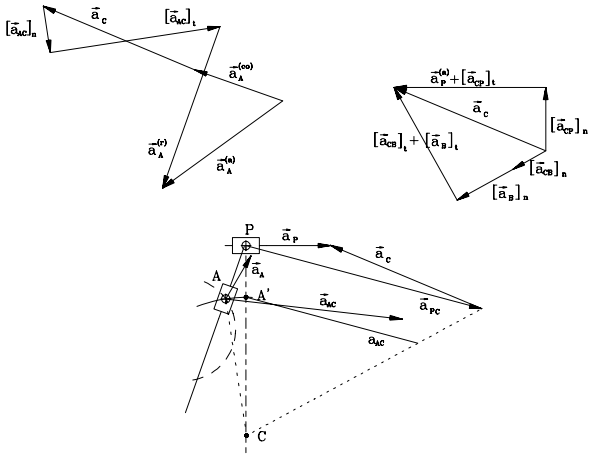


Figura 13

Per quanto riguarda il calcolo delle accelerazioni (fig.13), si osserva subito che, nota la velocità angolare della manovella, ed avendola supposta costante, l'accelerazione del punto A visto come estremo di questa, si riduce al solo componente normale:

$$\vec{a}_A = -\omega_1^2 \left(A - O_1 \right)$$

Si è già osservato, poi, che il moto del corsoio risulta da un moto composto, per cui , se consideriamo di nuovo il punto A appartenente ad esso, dovrà essere:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \vec{a}_A^{(r)} + \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)} \qquad \textbf{(112)}$$

in cui il vettore a primo membro è noto, e, a secondo membro, è noto il componente di Coriolis, che dipende da $\vec{\omega}_2$ e dalla $\vec{v}_A^{(r)}$; è nota anche la direzione della $\vec{a}_A^{(r)}$, mentre per ciò che riguarda al vettore $\vec{a}_A^{(t)}$, occorre considerare che del punto A, come punto del glifo, non conosciamo quale sia il centro di curvatura della sua traiettoria: sappiamo però che il glifo, nell'istante corrispondente alla configurazione attuale, ha il punto C come centro delle velocità, e che tale punto può lecitamente essere considerato anch'esso appartenente al glifo stesso. Si può pertanto, applicando il teorema di Rivals, scrivere:

$$\vec{a}_A^{(t)} = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (A - C) - \omega_2^2 (A - C) \qquad \textbf{(113)}$$

Nell'insieme la (112) e la (113) presentano, allora, tre vettori completamente noti, due noti soltanto in direzione, ed inoltre il vettore $\vec{a}_C$ il quale, per poter chiudere il poligono delle accelerazioni e risolvere il pro-

blema, deve necessariamente essere definito in modo completo.
La determinazione del vettore $\vec{a}_C$ può essere effettuata in due modi, entrambi illustrati in fig.13.

Il primo sfrutta la circostanza, peraltro generale, di trovare il punto C (centro delle velocità) allineato con un punto del rigido ed il rispettivo centro di curvatura della traiettoria. Nel caso del glifo che stiamo esaminando, questo allineamento si ha sulla retta per CBO_2 e sulla retta per CP∞; inoltre, come già sottolineato, i punti C, B, e P appartengono al medesimo rigido e quindi fra le loro accelerazioni vale il legame fissato dal teorema di Rivals.
Sarà lecito quindi scrivere che, per la accelerazione del punto C, deve contemporaneamente essere:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_P + \vec{a}_{CP} = \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C-P) - \omega_2^2 (C-P) \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C-B) - \omega_2^2 (C-B)\end{aligned} \qquad \textbf{(114)}$$

Se al posto di $\vec{a}_P$ e di $\vec{a}_B$ sostituiamo le accelerazioni di tali punti considerati appartenenti rispettivamente al corsoio in P ed all'estremo della bielletta la (114) si scriverà:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C-P) - \omega_2^2 (C-P) \\ \vec{a}_C &= \dot{\vec{\omega}}_3 \wedge \left(B-O_2\right) - \omega_3^2 \left(B-O_2\right) + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C-B) - \omega_2^2 (C-B)\end{aligned} \qquad \textbf{(115)}$$

Eguagliando queste due relazioni, i cui primi membri sono incogniti, si ha un'unica equazione vettoriale in cui sono completamente noti: $\left[\vec{a}_{CP}\right]_n$, $\left[\vec{a}_B\right]_n$, $\left[\vec{a}_{CB}\right]_n$; sono, invece, noti solamente in direzione: $\vec{a}_P$, $\left[\vec{a}_{CP}\right]_t$, $\left[\vec{a}_B\right]_t$,$\left[\vec{a}_{CB}\right]_t$.
Si può, però, osservare che di questi ultimi componenti i primi due hanno la medesima direzione, quella della perpendicolare alla CP, gli altri due hanno anch'essi una direzione comune, quella della perpendicolare alla BC. Ai fini della chiusura del poligono delle accelerazioni inerente alle (115) è, quindi, sufficiente la conoscenza di queste due direzioni comuni; il vettore $\vec{a}_C$ si ha come risultante di ciascuna delle due relazioni, così come mostra la fig.13 (in alto a destra).

Un secondo modo per determinare il vettore $\vec{a}_C$ è quello di dedurlo dalla circonferenza dei flessi del glifo, ricordando che deve essere:

$$\vec{a}_C = -D\omega_2^2 \vec{n}$$

essendo D, appunto, il diametro della c_f, e che il verso di $\vec{a}_C$ deve essere quello che guarda verso il polo dei flessi J.
I tre punti necessari al tracciamento della c_f sono: il punto C; il punto P che deve appartenere alla c_f in quanto il corsoio in P si muove di moto

traslatorio; il punto F, punto di flesso della normale alla traiettoria di B di cui si conosce il raggio di curvatura della traiettoria, O_2B.
Tracciata la c_f, l'intersezione con questa dell'asse della guida prismatica in P identifica il polo dei flessi, J; il segmento CJ risolve il problema.

Qualunque sia il metodo seguito, la determinazione della $\vec{a}_C$ risolve le (112) e (113) consentendo la costruzione del poligono delle accelerazioni per il punto A (fig.13 in alto a sinistra) e da questo ricavare la $\vec{a}_A^{(r)}$ e la $\left[\vec{a}_A^{(t)}\right]_t$ da cui calcolare $\dot{\vec{\omega}}_2$. Da quest'ultimo vettore si possono pure calcolare i vettori $\left[\vec{a}_{CP}\right]_t$, $\left[\vec{a}_{CB}\right]_t$, e quindi, per differenza $\vec{a}_P$, e $\left[\vec{a}_B\right]_t$; da quest'ultimo si risale ad $\dot{\vec{\omega}}_3$. Alternativamente, per il calcolo della$\vec{a}_B$ e della $\vec{a}_P$, si può anche ricorrere al teorema di Rivals legando l'accelerazione di questi punti alla $\vec{a}_A^{(t)}$ oppure direttamente alla $\vec{a}_C$. Sempre in fig.13 (in basso al centro) è riportata la costruzione di $\vec{a}_P$ secondo la relazione:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}_{PC}$$

dopo aver costruito la $\vec{a}_{PC}$ in modo che il suo modulo sia proporzionale a quello di $\vec{a}_{AC}$e che questi due vettori formino lo stesso angolo con le rispettive congiungenti PC ed AC.
Infine, sulla c_f è stato evidenziato il punto K, centro delle accelerazioni, trovato come seconda intersezione, dopo C, fra la circonferenza dei flessi e la circonferenza di stazionarietà, c_s, il cui diametro vale $D\omega_2^2/\omega_2$.

§ 6. - Guida di Fairbairn modificata del II tipo.

E' una variante dello schema precedente ottenuta sostituendo alla bielletta inferiore un corsoio, incernierato nel punto B del glifo, che costituisce coppia prismatica con una seconda guida fissa (fig.14).
La funzione di questo secondo corsoio è sempre quella di poter permettere al punto P del glifo di percorrere una traiettoria rettilinea.
Lo sviluppo dell'analisi cinematica di questo meccanismo è fatta nella solita ipotesi che la velocità angolare della manovella sia costante.
Per quanto concerne la ricerca delle velocità che competono al punto A del corsoio che si muove lungo il glifo, non c'è nulla di diverso rispetto a quanto visto nel caso precedente, salvo che, in questo caso, il punto C, centro della rotazione istantanea del glifo deve stare contemporaneamente sulle perpendicolari alle due guide fisse passanti per i punti P e B.
Il corrispondente triangolo delle velocità è costruito sullo stesso punto A.

In fig.15 sono stati costruiti i vettori $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_P$ sfruttando la proporzionalità che discende dal dover essere:

$$\vec{v}_A^{(t)} = \vec{\omega} \wedge (A - C)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{\omega} \wedge (B - C) \\ \vec{v}_P &= \vec{\omega} \wedge (P - C) \end{aligned} \qquad \textbf{(116)}$$

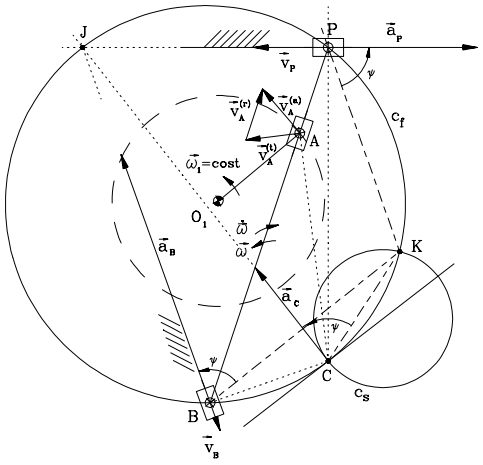


Figura 14

Il modulo della $\vec{v}_A^{(t)}$ è stato riportato sull'allineamento B'C e P'C onde poter costruire, attraverso i triangoli simili i vettori (116).

Anche l'analisi della distribuzione delle accelerazioni prende le mosse, come nel caso precedente, dal calcolo della accelerazione del punto A, estremo della manovella. Per esso dovrà ancora essere:

$$\vec{a}_A = -\omega_1^2 \left(A - O_1 \right)$$

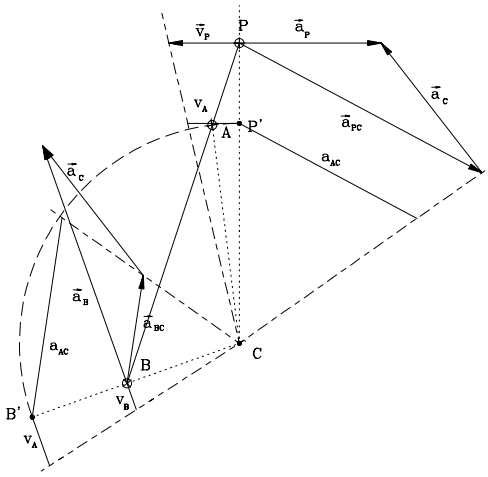


Figura 15

La stessa dovrà essere l'accelerazione che compete al punto A centro del corsoio nel suo moto composto: il moto relativo, traslatorio, lungo l'asse del glifo, e il moto di trascinamento insieme allo stesso glifo; di nuovo sarà quindi da scrivere, per il teorema di Coriolis:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \vec{a}_A^{(r)} + \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)}$$

relazione in cui per il vettore $\vec{a}_A^{(t)}$ vale di nuovo la (113). Il problema è risolubile, analogamente, solo se si riesce a calcolare preventivamente l'accelerazione del centro della rotazione istantanea, C, del glifo.

In fig.16, a destra, è riportata ancora la costruzione del vettore $\vec{a}_C$ ottenuto servendosi, come visto nel caso precedente, del teorema di Rivals: questa volta, in questo poligono delle accelerazioni, compare un vettore in meno

perché il punto B ha traiettoria rettilinea.
Risulta però più spedita, in questo caso, la ricerca di $\vec{a}_C$ attraverso la determinazione della circonferenza dei flessi c_f (fig.14). Poiché la traiettoria dei punti P e B è rettilinea essi devono appartenere appunto a detta circonferenza, e le rette che individuano la direzione delle loro accelerazioni devono intersecarsi nel polo dei flessi, J: il diametro della c_f, CJ, è pertanto immediatamente determinato e, a scala ω^2, anche il vettore cercato.

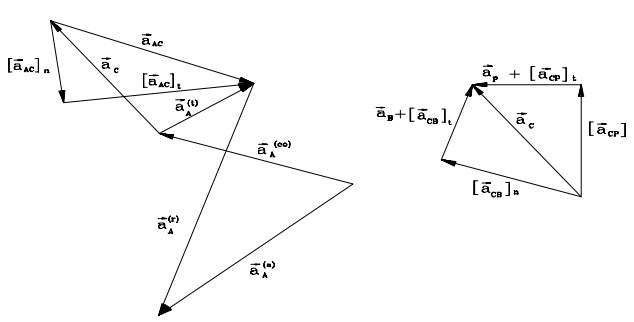


Figura 16

E' ora possibile, quindi, chiudere il poligono delle accelerazioni inerente al punto A, (fig.16 a sinistra) e determinare i due vettori incogniti $\vec{a}_A^{(r)}$ e $\left[\vec{a}_{AC}\right]_t$: da quest'ultimo si ricava $\dot{\vec{\omega}}$.
Dividendo il modulo di $\vec{a}_C$ per ω si ottiene il diametro della circonferenza di stazionarietà, c_s, la cui intersezione con la c_f individua il centro delle accelerazioni, K.
Si noti, a tal proposito che il punto K si trova sul lato destro della CJ in quanto il verso del vettore $\dot{\vec{\omega}}$ risulta discorde rispetto a quello del vettore $\vec{\omega}$.
Lo studio delle accelerazioni si completa ricavando le accelerazioni dei punti B e P, ossia dei due corsoi, o servendosi del teorema di Rivals, (fig.15) oppure sfruttando la proprietà del punto K (fig.14).

§ 7. - Guida di Fairbairn modificata del III tipo.

Una ulteriore modifica alla guida di Fairbairn, tendente sempre ad ottenere che l'estremo P del glifo possa percorrere una traiettoria rettilinea, è quella rappresentata in fig.17 in cui, in B, si ha un corsoio oscillante vincolato a telaio per mezzo di una cerniera fissa, mentre il glifo è collegato allo stesso corsoio mediante una coppia prismatica.
Per questo caso, in cui si è ancora ipotizzato che la manovella ruoti con velocità angolare costante, si rimanda ai due casi precedenti per quanto concerne all'analisi della distribuzione delle velocità come pure per quanto concerne all'analisi della distribuzione delle accelerazioni. La metodologia

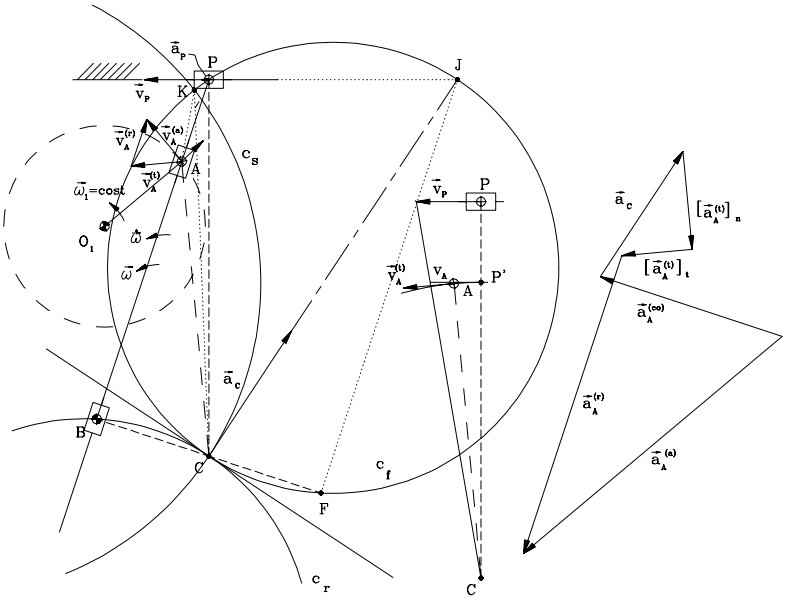


Figura 17

impiegata è la medesima: l'unica variante riguarda la determinazione della circonferenza dei flessi.
La c_f dovrà passare certamente per il punto C, per definizione, e per il punto P dal momento che la sua traiettoria è rettilinea; per l'individuazione di un terzo punto si può osservare che il glifo durante il moto, e quindi qualunque sia la sua configurazione, passerà sempre per il punto fisso B. L'asse dello stesso glifo è quindi una retta del piano mobile che nel suo moto inviluppa un profilo fisso (di raggio di curvatura nullo, in questo caso) il cui centro di curvatura è proprio il punto B. Il punto B quindi appartiene certamente alla circonferenza dei regressi, c_r, ed il suo simmetrico rispetto al punto C, ossia il punto F, appartiene alla circonferenza dei flessi. La c_f, in definitiva deve passare per C, per P e per F, e queste informazioni sono sufficienti per la soluzione del problema delle accelerazioni.

§ 8. - Meccanismi con contatti di puro rotolamento.

A) Si consideri lo schema di fig. 18 in cui un martinetto O_1A mette in movimento l'asta O_2B cui è collegato da una coppia rotoidale. All'estremità B di quest'asta, e tramite un'altra coppia rotoidale, è montata una rotella di raggio r; su quest'ultima poggia una piastra circolare, di raggio R, collegata

a telaio mediante una cerniera fissa in un suo punto O_3 diverso dal centro O.

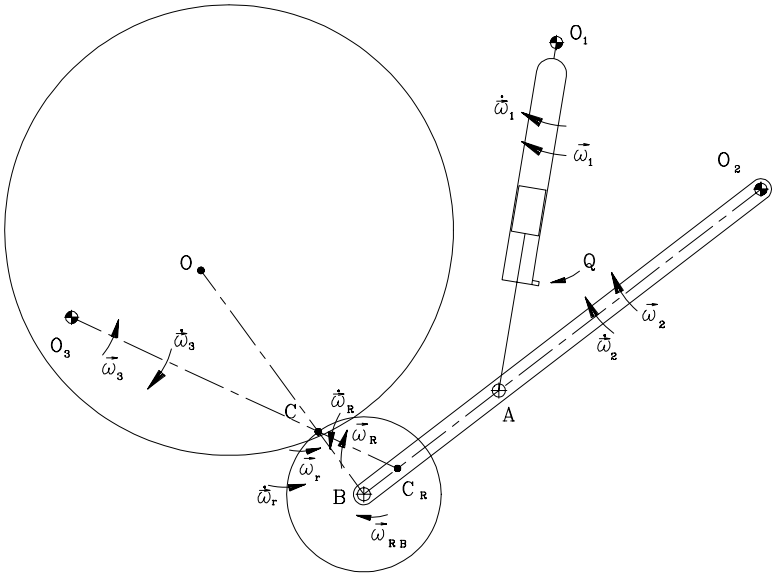


Figura 18

Il contatto fra rotella e piastra è un contatto di puro rotolamento; il pistone del martinetto viene spinto verso l'alto da una portata, Q, di fluido che si ipotizza costante.
In tali condizioni, e per la configurazione data, cerchiamo la distribuzione delle velocità e delle accelerazioni.

Cominciamo con l'osservare che la portata entrante Q impone al pistone un moto traslatorio, all'interno del cilindro del martinetto; tale moto si svolgerà con una velocità di modulo pari al rapporto Q/S, se S e l'area della sezione del cilindro, e in tale moto la stessa velocità compete al punto A estremo dello stelo del pistone. Poiché il cilindro, a sua volta, non è un membro fisso, tale velocità è la velocità di A punto del pistone nel moto relativo al cilindro, ed è nota, mentre di quella nel moto di trascinamento da parte del cilindro stesso, rotatorio intorno ad O_1, conosciamo la direzione che è quella della perpendicolare alla congiungente O_1A. Le velocità che competono al punto A in questi due moti devono comporsi per dare la $\vec{v}_A^{(a)}$ la stessa che compete al punto A come punto dell'asta O_2B. Dovrà, cioè, essere, come al solito:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)}$$

in cui, qui, è noto solamente il primo vettore a secondo membro; degli altri sono note le direzioni, dovendo essere:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{\omega}_2 \wedge \left(A - O_2\right)$$

e:

$$\vec{v}_A^{(t)} = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1\right)$$

Determinati questi vettori si possono calcolare, dai loro moduli, sia $\vec{\omega}_2$ che $\vec{\omega}_1$.

Nota la $\vec{\omega}_2$, è immediato il calcolo della velocità del punto B estremo dell'asta; per tale punto dovrà essere ancora:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \left(B - O_2\right)$$

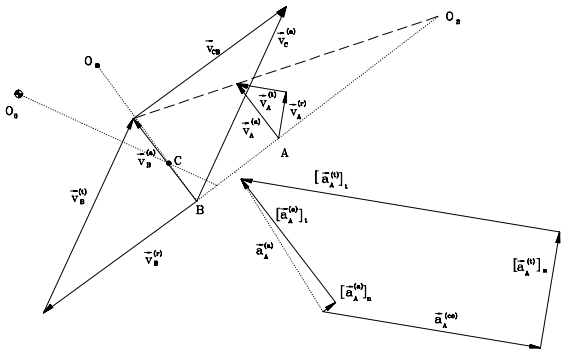


Figura 19

Può essere calcolato direttamente oppure, come in fig.19, si può costruire la proporzionalità con la $\vec{v}_A^{(a)}$.

In ogni caso questo è anche il vettore velocità (assoluta) dello stesso punto B quando lo si consideri come centro della rotella; ed allora, prendendo in considerazione proprio la rotella, e considerando il suo punto di contatto, C, con la piastra, potremo scrivere:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_R \wedge (C - B) \qquad \textbf{(117)}$$

Del secondo membro di questa equazione è noto, quindi, il primo vettore, mentre del secondo si conosce la direzione. Per quanto riguarda il primo membro, si deve osservare, che la $\vec{v}_C$, velocità assoluta di C punto della rotella, deve essere la stessa velocità che compete a C per effetto del moto composto della rotella nel suo vincolo con la piastra; per tale moto dovrà essere, di nuovo:

$$\vec{v}_C^{(a)} = \vec{v}_C^{(r)} + \vec{v}_C^{(t)}$$

I moti componenti sono: il moto relativo della rotella sulla piastra, ed il moto di trascinamento dell'insieme solidale rotella-piastra. Ma, poiché nelle ipotesi fatte la rotella rotola sulla piastra senza strisciare, la $\vec{v}_C^{(r)}$ è nulla, e quindi si ha che del vettore a primo membro della (117) si conosce la direzione, dovendo essere:

$$\vec{v}_C^{(a)} = \vec{v}_C^{(t)} = \vec{\omega}_3 \wedge \left(C - O_3\right)$$

Anche l'equazione vettoriale (117) si può allora risolvere concludendo

l'analisi delle velocità con la determinazione della $\vec{\omega}_3$, velocità angolare della piastra.
Si noti che il vettore $\vec{\omega}_R$ che compare nella (117) è la velocità angolare della rotella nel moto assoluto che avviene intorno al suo centro della rotazione istantanea C_R; questo centro dovrà stare sulla retta O_2B, essendo B il centro della rotazione della rotella nel moto relativo all'asta ed O_2 il centro del moto di trascinamento a parte della stessa; dovrà anche stare sulla congiungente O_3C, essendo C il centro del moto relativo della rotella rispetto alla piastra ed O_3 il centro del moto di trascinamento da parte della piastra. Ne discende pure la possibilità di determinare, sulla base del teorema di Aronhold-Kennedy sia la velocità angolare della rotella intorno all'asse della coppia rotoidale in B, $\vec{\omega}_{RB}$, quanto la velocità angolare della stessa rotella nel rotolamento sulla piastra, $\vec{\omega}_r$; e ciò in quanto deve essere rispettivamente:

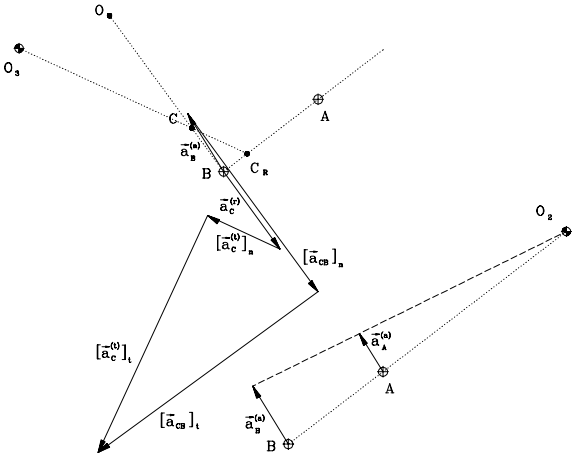


Figura 20

$$\vec{\omega}_{RB} = \vec{\omega}_R - \vec{\omega}_2 \qquad \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_R - \vec{\omega}_3$$

Per ciò che riguarda il calcolo delle accelerazioni, ripetendo il percorso logico seguito per il calcolo delle velocità, si può subito rilevare che sarà nulla l'accelerazione del punto A nel moto relativo del pistone rispetto al cilindro, e ciò in quanto è stato ipotizzato che la portata entrante nel martinetto sia costante. Pertanto la scrittura del teorema di Coriolis si riduce a:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)}$$

in cui le incognite sono la $\left[\vec{a}_A^{(a)}\right]_t$ e la $\left[\vec{a}_A^{(t)}\right]_t$ che dipendono rispettivamente da $\dot{\vec{\omega}}_2$ e da. $\dot{\vec{\omega}}_1$. Il corrispondente poligono delle accelerazioni è riportato in fig.19. Sfruttando l'allineamento del punto B con A e con O_2 è stato poi costruito (fig.20)(*) il vettore $\vec{a}_B^{(a)}$ rispettando la proporziona-

(*)In questa figura la rappresentazione dei vettori accelerazione è a scala 1/4 rispetto alla precedente.

lità dei moduli con le rispettive distanze dei punti dalla cerniera fissa.

Il passo successivo riguarda l'accelerazione del punto C, come punto appartenente alla rotella. Per il teorema di Rivals dovrà essere:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_R \wedge (C-B) - \omega_R^2 (C-B) \qquad \textbf{(118)}$$

in cui sono noti, a secondo membro, il primo ed il terzo vettore in modo completo, e la sola direzione del secondo; il vettore a primo membro, si può ricavare attraverso l'applicazione del teorema di Coriolis al moto composto della rotella nel suo vincolo con la piastra. Sarà:

$$\vec{a}_C^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(t)} + \vec{a}_C^{(co)}$$

in cui è nullo il componente dell'accelerazione complementare, in quanto, nel moto di rotolamento, la $\vec{v}_C^{(r)}$ è nulla; la precedente si riduce pertanto a:

$$\vec{a}_C^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(t)} = \vec{a}_C^{(r)} + \dot{\vec{\omega}}_3 \wedge \left(C - O_3\right) - \omega_3^2 \left(C - O_3\right) \qquad \textbf{(119)}$$

in cui è noto il componente $\left[\vec{a}_C^{(t)}\right]_n$ e la direzione del corrispondente componente tangenziale. La risoluzione dl sistema delle (118) e (119) è legata, quindi, alla determinazione completa della $\vec{a}_C^{(r)}$.

Si noti, a questo proposito, che, imposta la condizione del puro rotolamento nel contatto fra rotella e piastra, queste, nel moto relativo prefigurato, costituiscono una coppia di primitive in cui la piastra funge da polare fissa e la rotella da polare mobile. In questo moto, la accelerazione del punto di contatto, C, sarà:

$$\vec{a}_C^{(r)} = -D\omega_r^2 \vec{n} \qquad \textbf{(120)}$$

con:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$$

dal momento che i centri di curvatura delle due curve si trovano da parti opposte. Si ha un vettore che ha la direzione della congiungente i centri di curvatura dei due profili a contatto e come verso quello orientato da C verso B. La (120) sostituita nella (119) risolve quindi completamente il problema delle accelerazioni permettendo la costruzione del poligono delle accelerazioni costituito, (fig.20), da quattro vettori noti e due direzioni ed il calcolo delle accelerazioni angolari incognite.

B)

Il sistema di fig.21 è costituito da una puleggia di raggio r, vincolata a telaio, nel suo centro, con da coppia rotoidale; su di essa si avvolge una fune che si considera inestensibile ed il cui contatto, di perfet-

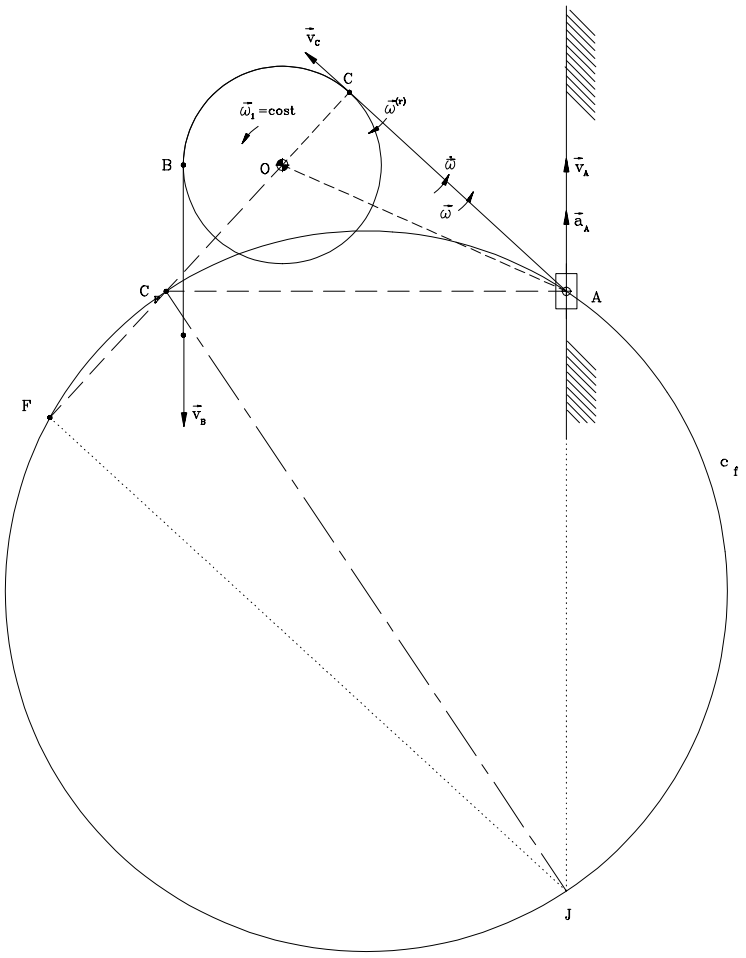


Figura 21

ta aderenza, si estende, per la configurazione considerata, fra i punti B e C; l'estremo A della fune è vincolato, per il tramite di una coppia rotoidale, ad un corsoio che può scorrere su una guida fissa. Si vogliono determinare velocità ed accelerazioni del sistema nella condizione per cui il capo libero della fune si muove, verso il basso, con velocità costante.
condizione per cui il capo libero della fune si muove, verso il basso, con velocità costante.

Si cominci subito con l'osservare che la ipotesi iniziale della inestensibilità consente di considerare il tratto AC della fune come un sistema rigido (per es. un'asta) che si appoggia sulla puleggia e che ha rispetta ad essa un moto relativo di puro rotolamento.

Ciò premesso, si può anche dire, in virtù della perfetta aderenza fra fune e puleggia, che il modulo della velocità del capo libero della fune, $\vec{v}_B$, sarà lo stesso per le velocità di tutti i punti del contatto ed in particolare per il punto C, considerato appartenente alla puleggia stessa; poiché tale modulo è costante, costante sarà pure la sua velocità angolare, $\omega_1=v_B/r$.
La determinazione della velocità del punto A può farsi in due modi: servendosi della formula fondamentale dei moti rigidi oppure considerando il tratto di fune AC nel suo moto composto.
Nel primo caso si scriverà:

$$v_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C)$$

in cui, dei tre vettori, è noto il secondo che deve essere uguale, considerato in C il contatto di puro rotolamento, alla velocità di C punto della puleggia; degli altri due si conoscono le direzioni: lungo la guida fissa, per il primo, perpendicolare ad AC, per il terzo.
Il corrispondente triangolo delle velocità è quello a tratto continuo riportato in fig.22.
Nel secondo caso, moto composto, si può considerare il moto relativo del tratto AC della fune rispetto alla puleggia - rotatorio intorno al punto C - ed il moto di trascinamento da parte della puleggia stessa - rotatorio intorno ad O - che avviene con la velocità angolare $\vec{\omega}_1$. Per il punto A dovremo allora scrivere:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)} \qquad \textbf{(121)}$$

in cui è nota:

$$\vec{v}_A^{(t)} = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1\right)$$

la direzione della $\vec{v}_A^{(a)}$, lungo l'asse della guida fissa, dovendo coincidere con la velocità di A centro del corsoio; la direzione della $\vec{v}_A^{(r)}$, perpendicolare alla congiungente AC.
I due vettori a secondo membro della (121) sono, in fig.22, riportati in tratteggio, e danno come somma di nuovo la $\vec{v}_A^{(a)}$.
Il moto assoluto del tratto di fune AC ha luogo, (fig.21), intorno al centro della rotazione istantanea C_F individuato come intersezione della perpendicolare alla guida per A, e della retta per C e per O (teorema di Aronhold-Kennedy). La corrispondente velocità angolare $\vec{\omega}$ può anche esser ricavata dalla $\vec{v}_A^{(a)}$ dividendo il suo modulo per la distanza AC_F; dividendo, invece, il modulo della $\vec{v}_A^{(r)}$ per la distanza AC si ottiene la velocità angolare, $\vec{\omega}^{(r)}$, che compete al tratto di fune nel moto relativo di rotolamento sulla puleggia. Dovrà trovarsi, in ogni caso, che sia:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}_1$$

Le medesime due vie percorse per la risoluzione del problema delle velocità si prestano anche alla trattazione del problema delle accelerazioni.

Alla prima via corrisponde il legame del teorema di Rivals fra i punti A e C della fune; sarà cioè:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C) - \omega^2 (A - C) \qquad \textbf{(122)}$$

dove però, tenendo presente il moto relativo esistente tra fune e puleggia, il legame fra le accelerazioni dei due punti C a contatto deve essere dato, per il teorema di Coriolis, da:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(t)} + \vec{a}_C^{(co)} \qquad \textbf{(123)}$$

Nella (123) è nullo il componente di accelerazione complementare, ed è noto il componente di accelerazione di trascinamento, essendo:

$$\vec{a}_C^{(t)} = -\omega_1^2 (C - O)$$

mentre per il componente di accelerazione nel moto relativo si potrà scrivere, per via del puro rotolamento fra retta e cerchio,:

$$\vec{a}_C^{(r)} = -D\omega^{(r)2}\vec{n}$$

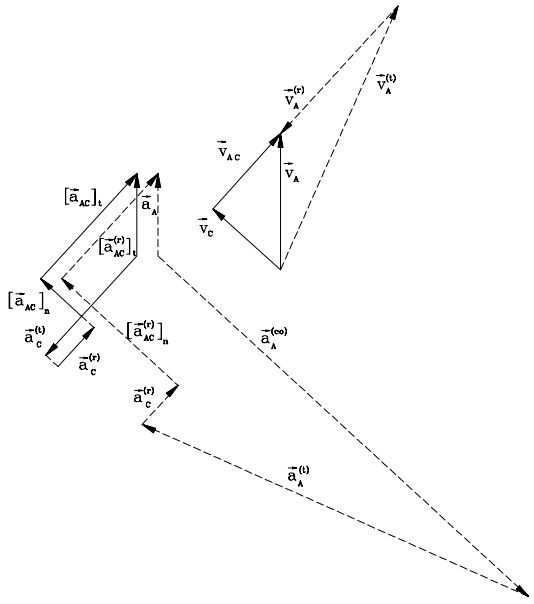


Figura 22

Per la scelta fatta sul
moto relativo questo è un vettore orientato nel verso che va da O a C.
La combinazione della (122) e della (123) dà luogo al poligono delle accelerazioni riportato, in fig.22, a tratto continuo.

Alla seconda via corrisponde l'applicazione immediata del teorema di Coriolis al punto A.
L'espressione corrispondente sarà:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{(r)} + \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)}$$

Da questa equazione si può costruire il poligono delle accelerazioni riportato in tratteggio in fig.22.
In tale equazione, infatti, la accelerazione del punto A nel moto relativo è esprimibile come:

$$\vec{a}_A^{(r)} = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}^{(r)} \wedge (A - C) - \omega^{(r)2}(A - C)$$

e ciò consente di ottenere le due incognite rappresentate dalla $\vec{a}_A^{(a)}$ e dal componente tangenziale della accelerazione nel moto relativo di A rispetto a C.
Dal confronto fra i due poligoni di accelerazione si può rilevare che risulta:

$$\left[\vec{a}_{AC}\right]_t = \left[\vec{a}_{AC}^{(r)}\right]_t$$

come deve accadere dal momento che è ω_1=cost.
E' stata pure tracciata la circonferenza dei flessi per il moto assoluto del tratto di fune: oltre che per il punto C_F, essa dovrà passare per il punto A, che percorre una traiettoria rettilinea, mentre il terzo punto, F, si trova come simmetrico del punto O rispetto a C_F: il punto O, infatti, è certamente un punto della circonferenza dei regressi essendo il centro di curvatura della circonferenza inviluppata dal tratto teso della fune nel suo moto.

C) Il sistema di fig.23 è costituito da due aste, la prima delle quali, OA, ha un estremo vincolato a telaio per il tramite di una coppia rotoidale e l'altro incernierato alla seconda asta, AB; l'estremo B di quest'ultima è vincolata con una ulteriore coppia rotoidale nel centro di un disco di raggio r vincolato poi, questo, a rotolare senza strisciare su una guida fissa.

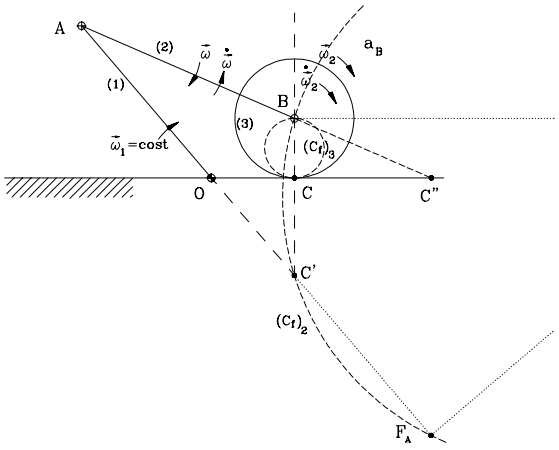


Figura 23

Ipotizzando che l'asta OA abbia velocità angolare ω_1=cost, si vogliono determinare, nella configurazione riportata, velocità ed accelerazione angolare del disco.

Osserviamo che, data la configurazione dei membri, la traiettoria del punto B sarà certamente rettilinea: ai fini del moto delle due aste sarebbe quindi indifferente se, invece che al disco, l'asta AB fosse vincolata ad un corsoio scorrevole su una guida parallela a quella già esistente. Il sistema delle due aste corrisponde perciò ad un manovellismo di spinta.

Ne segue che i procedimenti per la determinazione della velocità e della accelerazione del punto B, nonché della $\vec{\omega}$ e della $\dot{\vec{\omega}}$ dell'asta AB, sono i medesimi visti per quel meccanismo al § 2. In fig.24 sono tuttavia riportate le costruzioni del triangolo delle velocità e del poligono delle accelerazioni che risultano nel caso in esame.

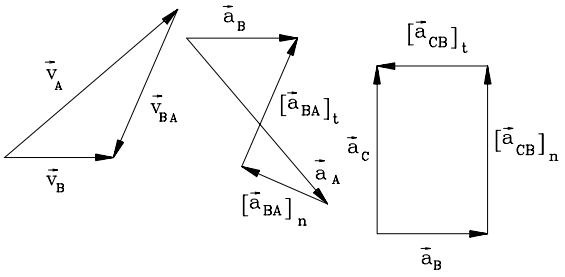


Figura 24

Resta solo da aggiungere, quindi, che per ottenere la $\vec{\omega}_2$, velocità angolare del disco, poiché il punto di contatto C è il centro della rotazione istantanea nel moto assoluto del disco, basta dividere il modulo della $\vec{v}_B$ per il suo raggio r.

Per ottenere la accelerazione angolare del disco, $\dot{\vec{\omega}}_2$, occorrerà legare, attraverso il teorema di Rivals, le accelerazioni dei punti B e C del disco. Deve, cioè, essere:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C - B) - \omega_2^2 (C - B)$$

dove, a secondo membro, sono noti il primo ed il terzo vettore e la direzione del secondo. Per quanto riguardo il vettore $\vec{a}_C$, poiché il punto C è, per il disco, il centro delle velocità, la sua direzione deve essere quella della perpendicolare alla guida: infatti, per via del moto di puro rotolamento, la congiungente BC è anche il diametro della circonferenza dei flessi che compete al disco nell'istante considerato.

In fig.23 è stata tracciata anche la circonferenza dei flessi della biella AB nel suo moto assoluto: deve passare per il punto C', centro di tale moto; certamente per il punto B, che, come è stato già osservato ha traiettoria rettilinea e deve perciò essere punto della circonferenza dei flessi; il terzo punto è stato ricavato sfruttando la conoscenza del centro di curvatura della traiettoria del punto A, ossia il punto O, e determinando quindi il suo punto di flesso della normale, F_A.

Sono indicate anche la normale per F_A al segmento $C'F_A$, e la direzione della traiettoria di B: sulla loro intersezione starà il polo dei flessi J nel

moto della biella.

§ 9. - Meccanismi con contatti di strisciamento.

A) Camma e piattello.

Una camma circolare, di raggio r e centro O, ruota, con velocità angolare ω_1=cost, incernierata eccentricamente in O_1. Su di essa poggia il piattello di una valvola cui è imposto il moto traslatorio da un accoppiamento prismatico con il telaio (fig.25).
Si vogliono, nella configurazione data, velocità ed accelerazione della valvola.

Consideriamo il moto del piattello rispetto alla coppia prismatica (assoluto) come risultante del moto relativo rispetto alla camma e del moto di trascinamento da parte della stessa camma.
Il moto relativo si svolgerà quindi con la velocità angolare $-\omega_1$=cost: il centro di questo moto relativo è il punto C' che si trova sulla intersezione della retta per O_1 perpendicolare all'asse della valvola (allineamento dei centri della rotazione istantanea della camma e della valvola) e della normale per il punto di contatto C ai due profili coniugati in moto relativo fra loro.

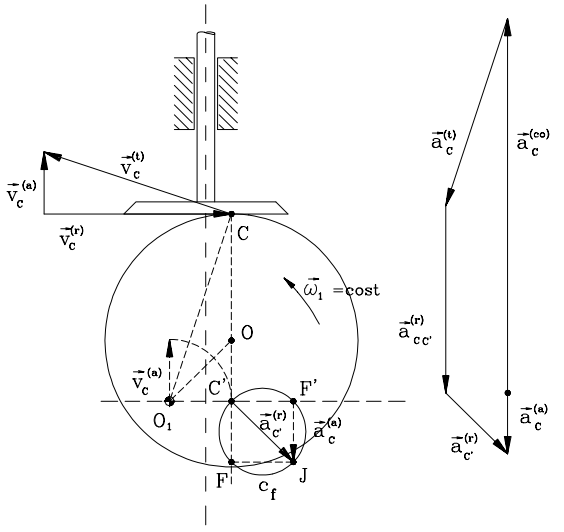


Figura 25

Con tali premesse, potremo scrivere per il punto di contatto C del piattello:

$$\vec{v}_C^{(a)} = \vec{v}_C^{(r)} + \vec{v}_C^{(t)}$$

dove è noto il vettore $\vec{v}_C^{(t)}$ e la direzione degli altri due vettori. Il corrispondente triangolo delle velocità è tracciato in fig.25 sullo stesso punto C.

Si può intanto notare che tale triangolo delle velocità è simile al triangolo O_1CC', avendo quest'ultimo i lati rispettivamente perpendicolari ai tre vettori: Se ne può concludere che il segmento O_1C' rappresenta, a scala ω_1 e ruotato di 90° nel verso della $\vec{\omega}_1$, proprio la velocità della valvola. La conferma di ciò si ha pure considerando che è:

$$\vec{v}_C^{(r)} = -\vec{\omega}_1 \wedge (C - C') \qquad \vec{v}_C^{(t)} = \vec{\omega}_1 \wedge \left(C - O_1\right)$$

e quindi è:

$$\vec{v}_C^{(a)} = \vec{\omega}_1 \wedge \left[-(C - C') + \left(C - O_1\right)\right] = \vec{\omega}_1 \wedge \left(C' - O_1\right)$$

Analogamente, per il calcolo delle accelerazioni, scriveremo che deve essere:

$$\vec{a}_C^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(t)} + \vec{a}_C^{(co)} \qquad \textbf{(124)}$$

in cui si conosce:

$$\vec{a}_C^{(t)} = -\omega_1^2 \left(C - O_1\right) \qquad \textbf{(125)}$$

in quanto possiede solo il componente normale; come pure si conosce:

$$\vec{a}_C^{(co)} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_C^{(r)} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \left[-\vec{\omega}_1 \wedge (C - C')\right] = 2\omega_1^2 (C - C') \qquad \textbf{(126)}$$

Inoltre deve essere:

$$\vec{a}_C^{(r)} = \vec{a}_{C'} + \vec{a}_{CC'} = \vec{a}_{C'} - \omega_1^2 (C - C') \qquad \textbf{(127)}$$

in cui, a secondo membro, è noto solamente il secondo vettore mentre nulla si sa del primo. Per la risoluzione della (124) occorrerà, quindi, la determinazione completa del vettore $\vec{a}_{C'}$, determinazione che può essere fatta ricorrendo alla circonferenza dei flessi nel moto relativo della valvola rispetto alla camma.

Tale circonferenza dovrà intanto passare per il punto C', centro della rotazione istantanea di questo moto; inoltre si può osservare che, sempre in tale moto, l'asse della valvola si manterrà a distanza costante dal punto O_1 e quindi inviluppera una circonferenza di centro O_1 e raggio detta distanza: il punto O_1, allora, come centro del profilo coniugato fisso inviluppato da una retta del piano mobile, è un punto della circonferenza dei regressi mentre il suo simmetrico rispetto a C', ossia F', è un punto della circonferenza dei flessi cercata; infine, e sempre nel moto relativo, la retta identificata dal profilo stesso del piattello a contatto con la camma, inviluppa il profilo della stessa camma ossia la circonferenza di centro O e raggio r: anche il punto O appartiene quindi alla circonferenza dei regressi ed il suo simmetrico, F'', appartiene alla circonferenza dei flessi.

Le normali a C'F' per F' ed a C'F'' per F'' si intersecano nel polo dei Flessi, J: il segmento C'J rappresenta a scala ω_1^2 il vettore:

$$\vec{a}_{C'} = -\omega_1^2 (C'-J) \qquad \textbf{(128)}$$

e tale risultato consente la risoluzione della (124) con la costruzione del poligono delle accelerazioni come quello in fig.25.

Se ora sostituiamo nella (124) le espressioni da (125) a (128) otteniamo:

$$\vec{a}_C = -\omega_1^2 (C'-J) - \omega_1^2 (C-C') - \omega_1^2 \left(C-O_1\right) + 2\omega_1^2 (C-C')$$

ossia:

$$\vec{a}_C = -\omega_1^2 \left[(C'-J) + \left(C'-O_1\right)\right] = \omega_1^2 \left[(J-C') + \left(O_1-C'\right)\right]$$

Componendo i due vettori a fattore otteniamo:

$$\vec{a}_C = \omega_1^2 (F''-C') = \omega_1^2 (J-F') = \omega_1^2 (C'-O)$$

dove l'uguaglianza con l'ultimo vettore discende dalla simmetria dei punti F'' ed O rispetto a C'.
Concludiamo, allora, che il vettore (C'-O) rappresenta, a scala ω_1^2, l'accelerazione della valvola.

B) Camma e punteria.

Il meccanismo appena visto assume l'aspetto di quello mostrato in fig.26, se il piattello della valvola viene sostituito da una punteria realizzando così con la camma un contatto puntiforme. Mantenendo le stes-

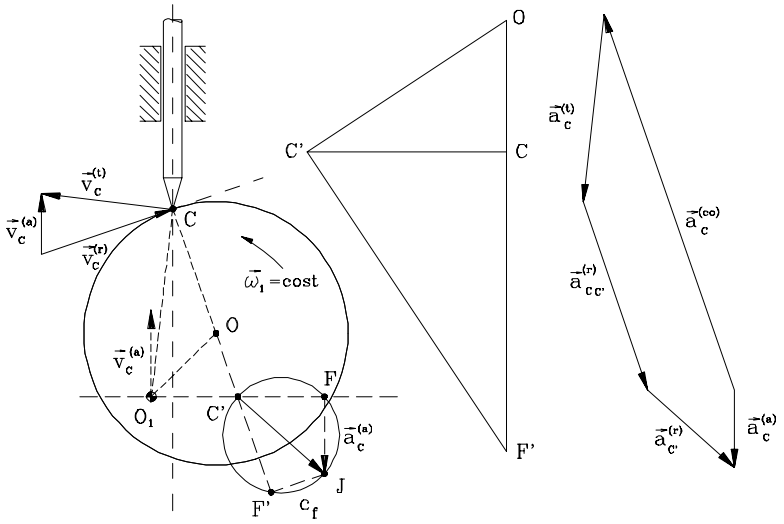


Figura 26

se ipotesi del caso precedente, la risoluzione di questo meccanismo può essere fatta seguendo il medesimo procedimento e tenendo conto di alcune differenze connesse alla diversità del contatto in C.

Occorre ricordare, per esempio, che, nel moto relativo, il punto C della punteria ed il profilo della camma sono ancora una coppia di profili coniugati (punto e sua traiettoria) e che quindi la direzione della velocità, in tale moto è sulla tangente comune. Ciò detto, la costruzione del triangolo delle velocità è immediata.

Altrettanto immediata è l'individuazione del punto C', centro della rotazione istantanea nel moto relativo, sulla intersezione della retta per O_1 perpendicolare all'asse della punteria, e sulla normale ai profili coniugati, per C e per O.

Anche qui il vettore (C'-O_1) rappresenta, a scala ω_1, il vettore velocità assoluta della punteria ruotata di 90° nel verso di $\vec{\omega}_1$ e sempre in virtù della similitudine del triangolo delle velocità con il triangolo O_1CC'.

Per il calcolo delle accelerazioni resta valida l'espressione (124), e le successive (125), (126) e (127) con i medesimi significati. Si differenzia, invece, il tracciamento della circonferenza dei flessi: questa passa ancora per C', e per il punto F, trovato come simmetrico del punto O_1 (che appartiene alla circonferenza dei regressi) centro di curvatura del profilo fisso inviluppato dall'asse della punteria nel moto relativo alla camma; il terzo punto, F', è, invece, il punto di flesso della normale della traiettoria del punto di contatto C della punteria, il quale, nel moto relativo alla camma, descrivendo il profilo della camma stessa. Di tale traiettoria è noto il raggio di curvatura OC=r ed è pure nota la distanza CC': si può quindi determinare la posizione del punto di flesso della normale con la relazione:

$$C'F = \frac{\overline{C'C}^2}{CO} \qquad \textbf{(129)}$$

Il segmento CF' può essere determinato con la costruzione del medio proporzionale indicata in fig.26, ed il punto, ricordando che i segmenti che compaiono nella (129) sono tutti segmenti orientati con origine in C, deve essere riportato correttamente dalla stessa parte di O rispetto a C.

Di nuovo conducendo le normali ai segmenti C'F e C'F' si determina il polo dei flessi J ed il diametro C'J, ossia, a scala ω_1^2, il vettore $\vec{a}_C^{(a)}$. Con ciò, è possibile la costruzione del poligono delle accelerazioni (fig.26) e la determinazione dell'accelerazione della punteria.

Lo stesso vettore $\vec{a}_C^{(a)}$ può essere letto, ma a scala ω_1^2, direttamente (fig.26) dal segmento orientato FJ, come si può verificare seguendo lo stesso procedimento illustrato per il caso precedente.

C) Eccentrico a leva.

E' un caso, simile ai precedenti, (fig.27) in cui il meccanismo è ancora costituito da un movente e da un cedente, ma il centro di rotazione istantanea di quest'ultimo, nel moto assoluto, è al finito, il punto O_2.
Di conseguenza, il centro di rotazione istantanea nel moto relativo dei due membri, C', deve stare sulla congiungente O_1O_2 ed anche sulla normale comune ai profili coniugati OC.
Ipotizziamo ancora che l'eccentrico ruoti con velocità angolare ω_1=cost e proponiamoci di trovare per il cedente $\vec{\omega}_2$ ed $\dot{\vec{\omega}}_2$.
Scegliamo di nuovo di considerare come moto relativo quella della leva rispetto all'eccentrico di modo che sia di trascinamento, per la leva, il moto dell'eccentrico ed assoluto il moto della leva intorno alla sua cerniera fissa.
In tal modo scrivendo:

$$\vec{v}_C^{(a)} = \vec{v}_C^{(r)} + \vec{v}_C^{(t)}$$

risulta noto, in questa relazione, il vettore $\vec{v}_C^{(t)}$, mentre sono note le direzioni degli altri due: quella di $\vec{v}_C^{(r)}$ lungo la tangente comune nel contatto, e quella di $\vec{v}_C^{(a)}$ perpendicolare alla congiungente O_2C. Il corrispondente triangolo delle velocità è tracciato (fig.27) sullo stesso punto di contatto C, e questo consente di ricavare il vettore $\vec{\omega}_2$ dal modulo e dal verso di $\vec{v}_C^{(a)}$.

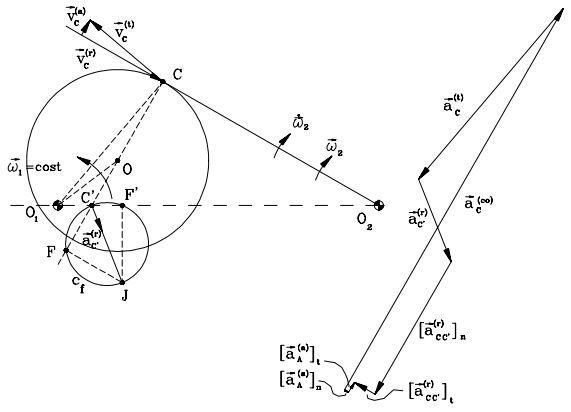


Figura 27

L'accelerazione dello stesso punto C di contatto è definita ancora dal teorema di Coriolis, scrivendo:

$$\vec{a}_C^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(t)} + \vec{a}_C^{(co)} \qquad \textbf{(130)}$$

in cui a primo membro, dato il vincolo della leva, deve prevedersi sia il componente normale che il componente tangenziale; avremo perciò:

$$\vec{a}_C^{(a)} = \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge \left(C - O_2\right) - \omega_2^2\left(C - O_2\right) \qquad \textbf{(131)}$$

di cui il secondo componente è completamente noto, il primo solo in direzione.

A secondo membro della (130) abbiamo:

$$\vec{a}_C^{(r)} = \vec{a}_{C'} + \vec{a}_{CC'} = \vec{a}_{C'} + \dot{\vec{\omega}}^{(r)} \wedge (C - C') - \omega^{(r)2}(C - C') \qquad \textbf{(132)}$$

dove, ovviamente, è $\vec{\omega}^{(r)} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ e dove il componente tangenziale è noto solo in direzione; poi:

$$\vec{a}_C^{(t)} = -\omega_1^2 \left(C - O_1 \right) \qquad \textbf{(133)}$$

e, infine:

$$\vec{a}_C^{(co)} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_C^{(r)} = 2\omega_1 \left(\omega_2 - \omega_1 \right)(C - C') \qquad \textbf{(134)}$$

Ancora una volta, deve essere completamente determinata l'accelerazione del punto C', centro della rotazione istantanea nel moto relativo dei due membri.
Volendo utilizzare ancora la circonferenza dei flessi, - nel moto relativo della leva rispetto all'eccentrico, - vediamo che essa dovrà passare senz'altro per il punto C'; gli ulteriori due punti si determinano facilmente se si immagina che, nel moto relativo, ossia pensando di applicare a tutto il sistema una velocità angolare pari a $-\vec{\omega}_1$, l'eccentrico rimane fisso mentre la leva ed il telaio sono in moto: la prima rotolando e strisciando sull'eccentrico, il secondo ruotando intorno al centro fisso O_1.
Ne segue che, in tale moto, il centro O dell'eccentrico appartiene alla circonferenza dei regressi ed il suo simmetrico, F, alla circonferenza dei flessi; il punto O_1 è il centro di curvatura dalla traiettoria di O_2 e quindi dovrà essere:

$$O_2F' = \frac{\overline{O_2C'}^2}{O_2O_1} \qquad \textbf{(135)}$$

ottenendo così il terzo punto e di conseguenza il polo dei flessi J.
Il poligono delle accelerazioni (fig.27) può essere pertanto tracciato, per ricavare poi l'accelerazione angolare della leva.

D)
Lo schema di fig.28 è costituito da una leva O_1A vincolata in O_1 ad una cerniera fissa e collegata, tramite una cerniera mobile, ad un'altra leva, AC, opportunamente sagomata, in contatto superiore con un profilo fisso: questi ultimi due membri formano, quindi, una coppia di profili coniugati i cui centri di curvatura, nel punto di contatto C, sono rispettivamente Ω_m ed Ω_f.

Supponendo che la leva O_1A abbia velocità angolare ω_1=cost, cerchiamo velocità ed accelerazione angolare della sagoma mobile.
Possiamo, intanto, dire subito che essa nel suo moto assoluto ha, nella configurazione data, il punto C' come centro della rotazione istantanea,

che deve stare sia sulla retta O_1A che sulla normale comune ai due profili coniugati, $C\Omega_f\Omega_m$.

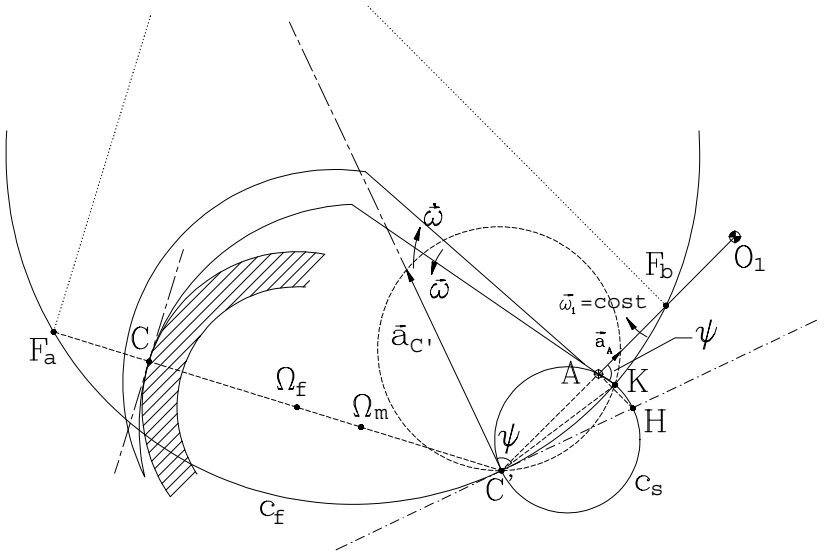


Figura 28

Inoltre, per il punto A, estremo della leva, è noto il vettore:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \left(A - O_1 \right)$$

D'altra parte per il punto di contatto C, considerato appartenente alla sagoma mobile, dovrà essere:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$$

In questa relazione è nota la $\vec{v}_A$, mentre degli altri due vettori sono note le direzioni: la $\vec{v}_C$ deve avere la direzione della tangente comune ai due profili, la $\vec{v}_{CA}$ quella della perpendicolare alla congiungente AC.
La precedente relazione è quindi risolubile e dà luogo al triangolo delle velocità riportato in fig.29. Si può così ottenere dalla $\vec{v}_{CA}$ la velocità angolare $\vec{\omega}$ della sagoma mobile, e la velocità di strisciamento fra i due profili.
Procedendo in modo analogo, avremo per la accelerazione del punto A:

$$\vec{a}_A = -\omega_1^2 \left(A - O_1 \right)$$

e per la accelerazione del punto C, della sagoma mobile:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A) - \omega^2 (C - A)$$

Qui, a secondo membro, è noto il primo ed il terzo vettore, mentre il secondo è noto in direzione.
Il vettore a primo membro, d'altra parte, considerando, come è lecito, che il punto C', essendo anche il centro delle velocità della sagoma mobile, è ad essa solidale, si può scrivere anche come:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C'} + \vec{a}_{CC'} = \vec{a}_{C'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - C') - \omega^2 (C - C')$$

In quest'ultima relazione è noto solo il componente normale di $\vec{a}_{CC'}$; del componente tangenziale si conosce solo la direzione, e deve quindi essere completamente determinata la $\vec{a}_{C'}$, determinazione cui si può giungere ancora attraverso la circonferenza dei flessi.

Riconoscendo che si conoscono i centri di curvatura della traiettoria di due punti della sagoma mobile, ossia il punto A la cui traiettoria ha centro in O_1 ed il punto Ω_m che descrive, nell'intorno della configurazione data, una traiettoria di centro Ω_f, si possono trovare i punti F_a ed F_b in modo tale che sia:

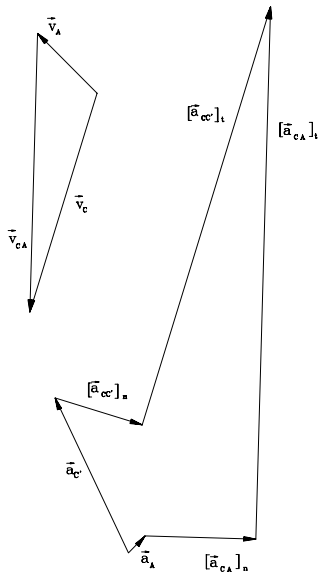


Figura 29

$$\Omega_m F_a = \frac{\overline{\Omega_m C'}^2}{\Omega_m \Omega_f} \qquad AF_b = \frac{\overline{AC'}^2}{AO_1}$$

Le normali a $C'F_a$ per F_a ed a $C'F_b$ per F_b si incontrano nel polo dei flessi J e la C'J, a scala ω^2, è la accelerazione di C'.
La determinazione della $\vec{a}_{C'}$ consente di chiudere il poligono delle accelerazioni (fig.29) e di determinare poi $\dot{\vec{\omega}}_2$.

Si può anche evitare la costruzione del poligono delle accelerazioni se, una volta tracciata la circonferenza dei flessi, si considera che la $\vec{a}_A$, già calcolata, è anche l'accelerazione di un punto della sagoma mobile che, in questo caso, ha solamente accelerazione normale; come tale deve quindi appartenere alla circonferenza di stazionarietà, c_s, il cui centro deve trovarsi sulla tangente comune alle polari (la perpen-

dicolare per C' a C'J): l'intersezione della perpendicolare alla AC' per A (fig.28) intercetta, allora, la tangente comune alle polari nel punto H che è il secondo estremo del diametro della c_s.
L'intersezione della c_s con la circonferenza dei flessi, c_f, fornisce il centro delle accelerazioni, K; trovato il quale, ed individuato l'angolo ψ, fra il vettore $\vec{a}_A$ e la congiungente AK, è immediata la costruzione del vettore $\vec{a}_C$ con il metodo dei triangoli simili.
Come corollario, in fig.28 è mostrata la circonferenza per i punti C', K, ed il secondo estremo del vettore $\vec{a}_A$ (circonferenza tratteggiata) che, con la sua intersezione con la congiungente C'J, individua il vettore $\vec{a}_{C'}$.

CAPITOLO X

RUOTE DENTATE E ROTISMI

SOMMARIO

1 - Ruote di frizione.
2 - Le ruote dentate piane ad evolvente.
3 - Le ruote piane a denti elicoidali.
4 - Le ruote coniche.
5 - Vite senza fine e ruota a denti elicoidali
6 - Rotismi ordinari.
7 - Rotismi epicicloidali.
8.- Applicazioni.

Le **ruote dentate**, siano esse piane o coniche, con qualunque tipo di dentatura siano state costruite, rappresentano, insieme alle corrispondenti ruote di frizione, la soluzione al problema della trasmissione del moto fra una coppia di assi, rispettivamente paralleli o concorrenti in un punto, e con un **rapporto di trasmissione costante**. Quando si vuole che tale rapporto di trasmissione si abbia fra assi sghembi ortogonali, il meccanismo è costituito generalmente da una vite senza fine ed una ruota dentata a dentatura elicoidale.

§ 1.- Ruote di frizione.

Consideriamo due membri (A) e (B) costituiti da due ruote di raggio r_1 ed r_2 (fig.1) vincolate rispettivamente alle coppie rotoidali O_1 ed O_2 i cui assi siano paralleli. Se nel punto di contatto C sussistono le condizioni adatte affinché nel moto relativo non vi sia strisciamento, tale moto relativo fra (A) e (B) è un moto di puro rotolamento di cui C è proprio il centro e di cui le circonferenze, traccia delle due ruote sul piano del moto, sono le primitive.

Un siffatto meccanismo costituisce una coppia di **ruote di frizione**; la trasmissione del moto è assicurata esclusivamente dalle condizioni di aderenza che debbono verificarsi nel contatto.

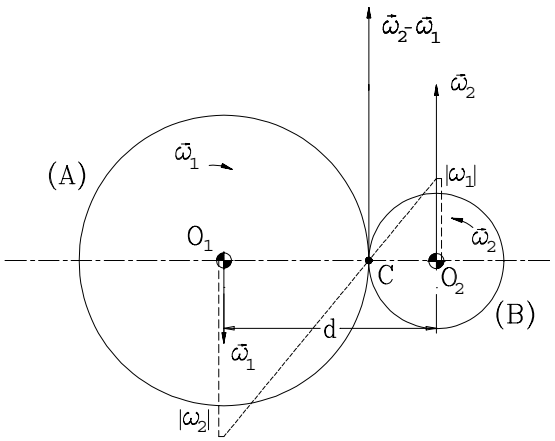


Figura 1

L'analisi cinematica mostra che, se in C il moto relativo è di puro rotolamento, le velocità di C come punto appartenente alla ruota 1 oppure alla ruota 2 devono essere le medesime; deve essere quindi:

$$(\vec{v}_C)_{(A)} = (\vec{v}_C)_{(B)} \qquad \textbf{(136)}$$

e quindi, indicando rispettivamente con $\vec{\omega}_1$ ed $\vec{\omega}_2$ le velocità angolari della ruota (A) e della ruota (B), sarà:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

Ne segue che il rapporto di trasmissione del meccanismo è:

$$\tau = \mp\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = \mp\frac{r_1}{r_2} \qquad \textbf{(137)}$$

ed è costante.

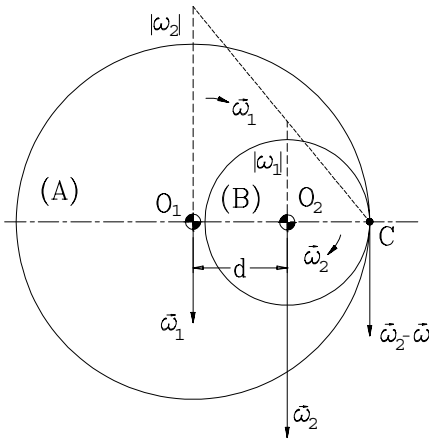


Figura 2

I versi delle velocità angolari di (A) e di (B) sono discordi se i membri (A) e (B) sono disposti come in fig.1 e quindi nella (137) vale il segno meno; sono invece concordi, e varrà quindi il segno più, quando i membri (A) e (B) sono disposti come in fig.2 che rappresenta il caso in cui una delle due ruote sia una ruota anulare, con contatto, cioè, interno.

Quando la realizzazione di un rapporto di trasmissione costante deve essere realizzato fra assi concorrenti in un punto le superfici a contatto sono quelle di due coni a sezione circolare, (A) e (B), tangenti lungo una generatrice (fig.3), i cui assi di rotazione coincidono con gli assi dei coni e formano fra loro un angolo α=cost. Indicando rispettivamente con α_1 ed α_2 le semiaperture dei due coni, si ha che la condizione di ro-

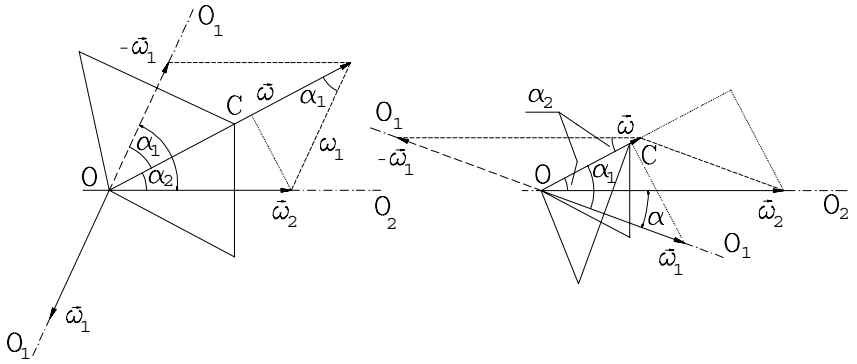


Figura 3

tolamento senza strisciamento nel moto relativo è che per tutti i punti della generatrice di contatto sia:

$$\vec{\omega}_1 \wedge (C - O) = \vec{\omega}_2 \wedge (C - O) \qquad \textbf{(138)}$$

ossia:

$$\omega_1 OC \operatorname{sen}\alpha_1 = \omega_2 OC \operatorname{sen}\alpha_2$$

Ne segue che il rapporto di trasmissione del meccanismo è:

$$\tau = \mp \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \mp \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} \qquad \textbf{(139)}$$

ed è anch'esso costante.

L'effettiva utilizzazione delle ruote di frizione come meccanismi atti a realizzare un rapporto di trasmissione costante è confinato al campo della trasmissione di piccole potenze (coppie basse e basse velocità); si comprende che la condizione di strisciamento nullo nel contatto è realizzabile solo in presenza di un adeguato carico normale sufficiente a generare la forza tangenziale d'attrito necessaria al funzionamento: tale carico normale non potrà essere troppo elevato per non generare deformazioni locali nel contatto ed elevate perdite per attrito nei perni delle coppie rotoidali.

Le deformazioni del contatto d'altra parte renderebbero falsa la condizione che le primitive del moto siano le due circonferenze, nel caso di ruote piane, o i due coni, nel caso di assi concorrenti, che assicuravano il rapporto di trasmissione costante desiderato. In generale il rapporto di trasmissione diventerebbe una funzione delle forze normali che i due membri si scambiano.

§ 2.- Le ruote dentate piane ad evolvente.

Quando sono in gioco potenze notevoli è conveniente che la trasmissione del moto sia affidata, non all'aderenza, ma all'azione mutua che si scambiano opportune superfici coniugate ricavate sulla periferia di un disco, superfici che costituiscono la sagoma dei denti di una ruota dentata (fig.4).

Tali superfici coniugate sono ottenute cinematicamente a partire da due primitive circolari di raggio r_1 ed r_2 di modo che, nel moto relativo, (come nel caso delle ruote di frizione piane) si realizzi il desiderato rapporto di trasmissione fra i due membri che sarà, quindi, ancora costante ed esprimibile con la (137).

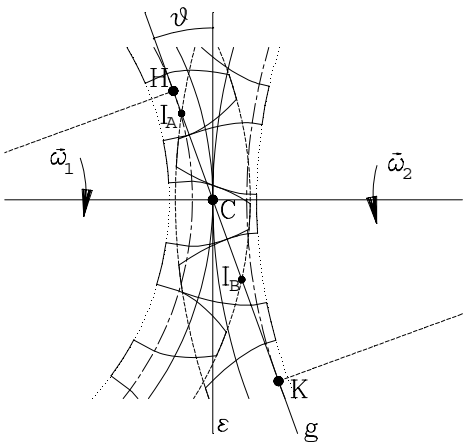


Figura 4

Il loro profilo sul piano del moto è quello di una evolvente di cerchio (traiettoria di un punto generico di una retta che rotola senza strisciare su una circonferenza) e i due tratti di evolvente che costituiscono la sagoma del dente si svolgono parte internamente e parte esternamente alla circonferenza primitiva.

Il contatto fra i profili durante il moto avviene lungo la retta g inclinata di un angolo costante ϑ rispetto alla tangente comune alle primitive, ε. La **retta g pertanto costituisce anche la normale comune ai due profili nel loro punto di contatto** e quindi anche luogo esclusivo dei punti di contatto fra i profili dei denti.

Retta g ed angolo ϑ prendono anche il nome di *retta di pressione* ed *angolo di pressione* (fig.5); in assenza di attrito, infatti, la retta g coincide con la retta di applicazione della forza mutua che si scambiano i denti in presa. Il valore dell'angolo di pressione, ormai gene-

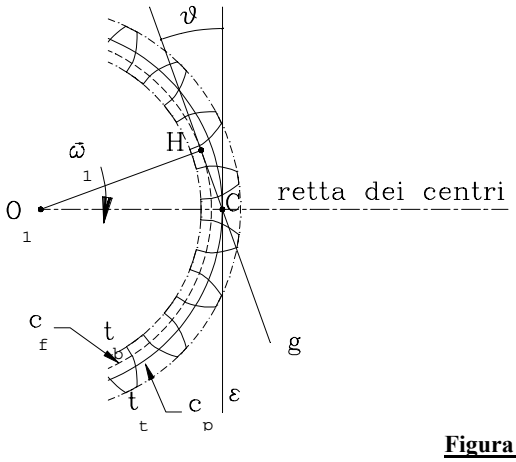


Figura 5

ralmente adottato, è ϑ=20°.

La retta g risulta anche tangente, in H e K, ad altre due circonferenze $(c_f)_1$ e $(c_f)_2$, di raggi rispettivamente $r_1\cos\theta$ ed $r_2\cos\theta$, concentriche con le corrispondenti primitive, che prendono il nome di *circonferenze fondamentali*. Sono queste le circonferenze su cui la retta g rotola senza strisciare per la generazione delle evolventi che costituiscono il profilo dei denti.

Non sarà quindi possibile avere tratti di evolvente interni alle circonferenze fondamentali.

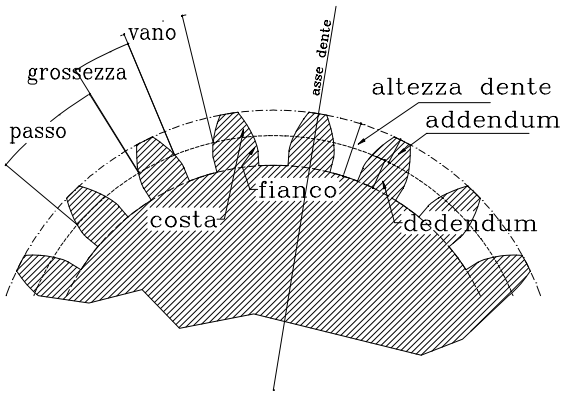


Figura 6

Per le ruote dentate vale la seguente nomenclatura:

- la congiungente i centri delle coppie rotoidali, O_1, O_2 prende il nome di *retta dei centri* (fig.5);
- la fase in cui i denti si toccano prima dell'attraversamento della retta dei centri si dice *fase di accesso*, la successiva, *fase di recesso*;
- nelle ruote esterne (fig.6) la parte del profilo del dente interna alla primitiva prende il nome di *fianco* del dente, la parte esterna prende il nome di *costa* del dente; nelle ruote anulari è il viceversa;
- *troncature* si chiamano la circonferenze ideali (fig.5) secondo le quali è delimitato il dente in altezza; la troncatura *di testa*, t_t, delimita i denti verso l'esterno, la troncatura *di base* (o interna), t_b, delimita i denti internamente alla primitiva;
- la differenza fra i raggi della troncatura di testa e della primitiva prende il nome di *addendum* (fig.6); la differenza fra i raggi della primitiva e della troncatura di base prende il nome di *dedendum*; la somma dell'addendum e del dedendum misura l'*altezza del dente*;
- la lunghezza dell'arco di primitiva compreso fra due profili omologhi (o fra due assi di simmetria del dente) successivi prende il nome di *passo* della dentatura (fig.6); la lunghezza dell'arco di primitiva compreso fra i due profili che costituiscono il dente prende il nome di *grossezza* del dente;
- la differenza fra passo e grossezza è l'ampiezza del *vano* fra due denti;

la lunghezza dell'arco di primitiva corrispondente alla rotazione durante la quale due denti sono in presa prende il nome di *arco d'azione* (fig.7); affinché i due denti successivi siano in presa prima che i precedenti si abbandonino l'arco d'azione deve essere maggiore o al limite uguale al

passo.

Affinché due ruote ingranino correttamente devono avere lo stesso passo, p, ed affinché il loro funzionamento sia invertibile i denti devono presentare profili simmetrici rispetto ad un raggio che sarà quindi l'asse del dente. Inoltre, perché le ruote possano funzionare correttamente almeno per una rotazione completa, il numero dei denti, z, deve essere intero.

Ora se p è il passo della dentatura, comune a due ruote ingrananti fra loro, le relazioni che legano il numero dei denti alla lunghezza della circonferenza primitiva di ciascuna di esse saranno:

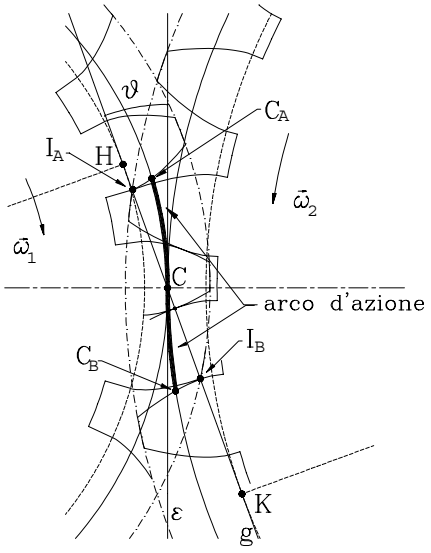


Figura 7

$$2\pi r_1 = pz_1 \qquad 2\pi r_2 = pz_2 \tag{140}$$

da cui:

$$\frac{p}{\pi} = m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} \tag{141}$$

Da questa relazione si ricava che il rapporto di trasmissione ottenibile attraverso una coppia di ruote dentate è immediatamente deducibile dal rapporto fra il numero dei denti. Infatti, confrontando con la (137), si ha:

$$\tau = \mp\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = \mp\frac{r_1}{r_2} = \mp\frac{z_1}{z_2} \tag{142}$$

Il rapporto m=p/π che compare nella (141) prende il nome di *modulo* della dentatura (o anche passo diametrale) e si comprende che se, come si è detto, due ruote ingrananti fra loro devono avere lo stesso passo, ciò equivale a dire che dovranno avere anche lo stesso modulo.

Per il modulo, che fissa, in pratica, il rapporto fra il diametro di primitiva di una ruota ed il numero dei suoi denti, si conviene di adottare generalmente numeri interi; solo per dentature piccole si adottano numeri frazionari .

I valori normalmente usati, secondo le norme di unificazione variano: di 0,1 per valori compresi fra 0,5 e 1; di 0,25 per valori compresi fra 1 e 4; di 0,5 per valori compresi fra 4 e 7; di 1 per valori compresi fra 7 e 12;

di 2 per valori compresi fra 12 e 24; di 3 per valori compresi fra 24 e 45; di 5 per valori compresi fra 45 e 75.

Il valore del modulo ha un ruolo fondamentale nel proporzionamento della ruota *(proporzionamento modulare)* e per questo viene comunemente indicato in mm: si fa l'addendum pari ad m, ed il dedendum pari a (7/6)m; l'altezza del dente risulterà pertanto pari a (13/6)m. Quando il dedendum ha un valore tale per cui il fianco del dente si estende fino all'interno della circonferenza fondamentale, il tratto del fianco compreso fra la fondamentale e la troncatura di base è radiale di modo che, nel punto di attraversamento, il profilo del fianco del dente abbia la medesima tangente.

Dalla (141) risulta che il diametro della primitiva di una ruota risulta 2r=mz, e, aggiungendo due volte l'addendum, il diametro del disco su cui intagliare i denti (diametro della circonferenza di troncatura di testa) risulta m(z+2). A parità di numero di denti, quindi, a moduli piccoli corrisponderanno ruote piccole, a moduli grandi ruote grandi.

Tuttavia, la scelta del valore da scegliere per il modulo di una dentatura ha un ulteriore risvolto: fissato i diametri delle primitive, il modulo determina il diametro delle circonferenze di troncatura di testa e di conseguenza, sulla retta g (fig.7) i punti I_A ed I_B in cui avverrà il primo contatto, in fase di accesso, (I_A), fra il fianco di un dente della ruota conduttrice e l'estremità della costa di un dente della ruota condotta, e l'ultimo contatto, in fase di recesso, (I_B), fra l'estremità della costa del dente della ruota conduttrice ed un punto del fianco del dente della ruota condotta. Si comprende allora che maggiore è il modulo scelto per la dentatura tanto più lontano dal centro C si troveranno i punti I_A ed I_B e tanto maggiore, di conseguenza la velocità di strisciamento (velocità relativa) fra i profili, e tanto maggiore, quindi, la potenza perduta nell'imbocco.

Una caratteristica delle ruote dentate con profilatura ad evolvente è quella che il loro funzionamento risulta cinematicamente esatto anche se l'interasse di progetto, d, non viene esattamente rispettato (fig.8), ovvero se, entro certi limiti, esso viene volutamente alterato.

Se, infatti, l'interasse passa dal valore d al valore d(1+α), i raggi delle primitive diventano $r_1(1+\alpha)$ ed $r_2(1+\alpha)$; i denti, tuttavia, in quanto costruiti sulla base delle fondamentali originarie, saranno ancora

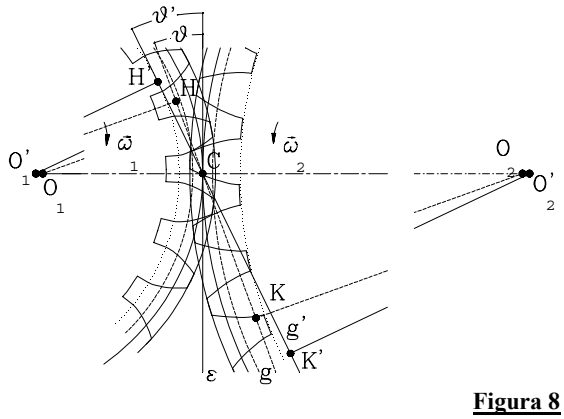


Figura 8

rie, saranno ancora profili coniugati anche se le primitive risultano ampliate. Cambia invece l'angolo di pressione in quanto la retta g, dovendosi ancora appoggiare alle fondamentali, i cui centri sono diventati O_1' ed O_2', assumerà la posizione della g' il cui angolo rispetto alla tangente comune alle primitive sarà $\vartheta' > \vartheta$.
Il rapporto di trasmissione fra due ruote il cui interasse sia stato maggiorato non cambia. Sarà infatti:

$$\tau = \frac{O'_1 C}{O'_2 C} = \frac{r_1 \cos\vartheta}{\cos\vartheta'} : \frac{r_2 \cos\vartheta}{\cos\vartheta'} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \textbf{(143)}$$

La ruota limite, ossia quella di raggio massimo, è la dentiera (o cremagliera) (fig.9). La forma del dente della dentiera è rettilineo.

Da quanto sopra detto segue che un gruppo di ruote di diverso diametro, purché costruite con lo stesso angolo di pressione θ e con lo stesso modulo, possono correttamente ingranare fra loro realizzando i rapporti di trasmissione che derivano dal rapporto fra il loro numero dei denti. Un siffatto gruppo di ruote costituisce una *serie*: la ruota più piccola prende il nome di *rocchetto*, la più grande sarà la *cremagliera*.
Tuttavia la realizzazione di una serie pone una limitazione alla scelta del valore del modulo (e di conseguenza al proporzionamento dei denti): poiché i contatti fra i profili avvengono sulla retta g e poiché, al contempo, non esiste alcun tratto di evolvente all'interno delle circonferenze fondamentali, l'estensione della costa del dente, e quindi le troncatura di testa, non possono superare i punti H e K. Pertanto fissato il diametro del rocchetto sarà (fig.9) la troncatura di testa della cremagliera, passando per H, a fissare, il valore massimo del modulo con cui possono essere realizzate le ruote della serie affinché le condizioni suddette siano rispettate.

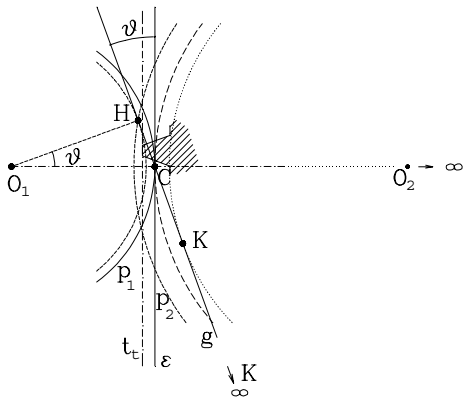


Figura 9

Sarà quindi:

$$m_{\max} = r_1 \operatorname{sen}^2 \vartheta \qquad \textbf{(144)}$$

Conseguentemente si desume il minimo numero di denti che è possibile assegnare al rocchetto, e che sarà:

$$z_{\min} = \frac{2r_1}{m_{\max}} = \frac{2r_1}{r_1 \operatorname{sen}^2 \vartheta} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} \qquad \textbf{(145)}$$

Dalla (144) e dalla (145) si osserva che, per dato ϑ, mentre il valore del modulo massimo dipende dal diametro prescelto per il rocchetto, il numero minimo di denti che gli si può assegnare dipende esclusivamente dall'angolo di pressione.
Con l'usuale valore di ϑ=20° si avrà m_{max}=0,11r_1 e quindi z_{min}=18.

La forza mutua che si scambiano i denti ha come retta d'azione la retta g, ed è costante se la coppia è costante.
Per l'equilibrio della ruota dovrà essere:

$$C_m = F_n r \cos\vartheta \qquad \textbf{(146)}$$

da cui:

$$F_n = \frac{C_m}{r \cos\vartheta} \qquad \textbf{(147)}$$

Si vede quindi che, a parità di coppia motrice e a parità di diametro di primitiva, il valore dell'angolo di pressione influenza direttamente l'entità della forza mutua che si scambiano i denti in presa: maggiore è il valore di ϑ e maggiore sarà il valore di F_n; e ciò spiega come il valore dell'angolo di pressione che si utilizza sia poco elevato.
Si faccia caso anche alla circostanza che ad un maggior valore dell'angolo di pressione, corrisponderebbe inevitabilmente un aggravio del carico sulle coppie rotoidali delle due ruote.

§ 3.- Le ruote cilindriche a denti elicoidali.

Le ruote a denti elicoidali rappresentano una variante rispetto alle ruote a denti diritti.
Si può immaginare che le ruote piane a denti diritti nascano facendo compiere alla sagoma del dente uno spostamento assiale parallelo all'asse di rotazione della ruota stessa; il dente della ruota cilindrica a denti elicoidali può essere pensato ottenuto facendo compiere alla sagoma del dente uno spostamento elicoidale: una traslazione parallela all'asse di

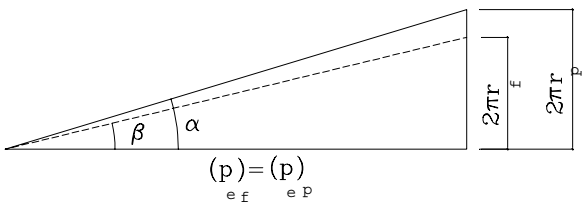


Figura 10

rotazione della ruota ed una contemporanea rotazione intorno allo stesso asse.

Tutti i punti del profilo del dente descrivono, in questo moto delle eliche appartenenti a cilindri coassiali: tra questi, il cilindro primitivo ed il cilindro fondamentale ed, ovviamente quelli corrispondenti alle troncature, di testa e di base.

Le eliche, nascendo dallo stesso moto elicoidale, avranno tutte lo stesso rapporto caratteristico (fig.10) e quindi lo stesso passo p_e; presenteranno quindi inclinazione diversa a seconda del cilindro cui appartengono. In particolare sarà sul cilindro primitivo:

$$\tan\alpha = \frac{2\pi r_p}{p_e} \qquad \textbf{(148)}$$

e sul cilindro fondamentale:

$$\tan\beta = \frac{2\pi r_f}{p_e} = \frac{2\pi r_p \cos\vartheta}{p_e} \qquad \textbf{(149)}$$

Dal confronto fra la (148) e la (149) discende la relazione esistente fra gli angoli, α e β, di inclinazione delle due eliche; ossia:

$$\tan\beta = \tan\alpha\cos\vartheta \qquad \textbf{(150)}$$

Nelle ruote con asse dente elicoidale si ottiene, proprio in virtù di tale disposizione, (fig.11), un *aumento virtuale dell'arco d'azione*: infatti, durante una rotazione della ruota pari a $\Delta\vartheta$ corrispondente alla durata del contatto fra due denti in presa, il contatto fra i denti si sposta lungo un'elica, da C_a a C_b, portandosi dalla sezione frontale alla sezione posteriore; la rotazione $\Delta\vartheta$ può pensarsi risultante dalla somma di due rotazioni distinte: una rotazione $\Delta\vartheta'$, relativa alla fase in cui il punto di contatto sulla primitiva passa dal punto C_a al punto C' e corrispondente alla fase del contatto fra una coppia di profili, misurata sulla sezione frontale, (equivalente all'arco d'azione nel caso dei denti diritti), cui occorre aggiungere la rotazione $\Delta\vartheta''$, relativa alla fase in cui il punto di contatto sulla primitiva passa dal punto C' al punto C'' e corrispondente alla fase che

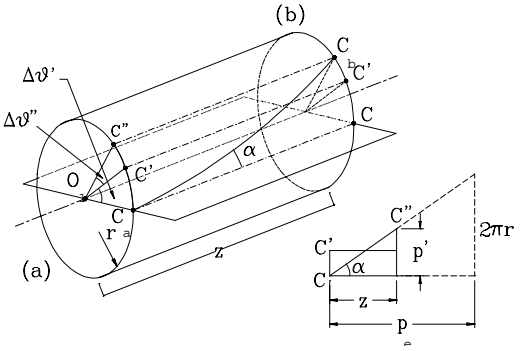


Figura 11

porta fino al termine del contatto fra i denti sulla sezione posteriore che è spostata assialmente rispetto alla prima della lunghezza z del tronco del cilindro.
La rotazione complessiva sarà quindi:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2 = \frac{C_a C'}{r} + \frac{C' C''}{r}$$

essendo:

$$C_a C'' = z \tan\alpha$$

I *vantaggi* che si ottengono con tali tipi di ruote sono: la dolcezza di movimento, e quindi una maggiore silenziosità, in quanto il contatto e il distacco fra i denti non si realizza più in modo istantaneo; una maggiore robustezza dei denti, potendo utilizzare moduli minori senza compromettere la continuità della trasmissione, ed ottenendo quindi denti di altezza minore; l'utilizzo di un modulo più piccolo fa sì che diminuiscano anche le velocità massime di strisciamento risultando i contatti più prossimi all'asse della rotazione istantanea.

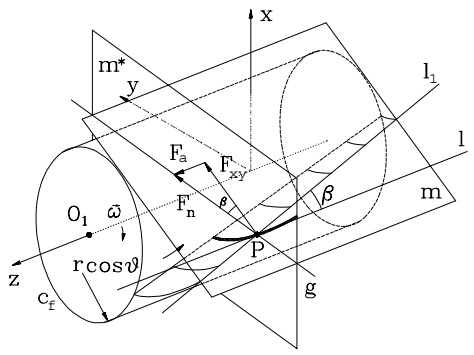


Figura 12

Affinché due ruote ingranino correttamente devono avere lo stesso passo frontale e lo stesso angolo di inclinazione dell'elica sul cilindro primitivo.

La *normale al contatto* fra i denti (fig.12) in questo caso dovrà essere una retta appartenente ad un piano m inclinato di ϑ rispetto al piano tangente ai due cilindri primitivi ed inclinata di β rispetto alla normale all'asse di rotazione (deve essere, nel contatto, normale all'elica sul cilindro fondamentale).
Pertanto, in assenza di attrito, la forza normale $\vec{F}_n$ che due denti si scambiano avrà le due componenti:

$$\begin{aligned} F_{xy} &= F_n \cos\beta \\ F_z &= F_n \operatorname{sen}\beta \end{aligned} \qquad \textbf{(151)}$$

la prima normale all'asse di rotazione, la seconda parallela ad esso; solo la prima delle due ha, quindi, momento rispetto a detto asse, e, per l'equilibrio della ruota, dovrà essere:

$$C_m = F_n \cos\beta \; r\cos\vartheta \tag{152}$$

da cui:

$$F_n = \frac{C_m}{r\cos\beta\,\cos\vartheta} \tag{153}$$

La componente lungo l'asse z, che prende il nome di *spinta assiale*, si esprimerà allora come:

$$F_z = F_a = \frac{C_m}{r\cos\vartheta}\tan\beta = \frac{C_m}{r}\tan\alpha \tag{154}$$

tenuto conto anche della (150). Confrontando la (153) con la (147) si vede che per questo tipo di ruote la forza mutua che si scambiano i denti risulta maggiore che nel caso delle ruote a denti diritti; inoltre la presenza della spinta assiale obbligherà, nel loro montaggio, ad opportuni sopporti spingenti oppure a costruire ruote con dentatura a freccia (Chevron).

§ 4.- Le ruote coniche.

Se consideriamo una coppia di ruote a denti diritti ingrananti fra loro e, idealmente, portiamo al finito, in un punto O, il punto di intersezione di tutti gli assi del moto (che prima era all'∞, trattandosi di moto piano), quella coppia di ruote diventerà una coppia di ruote coniche: tutti i piani (di cui si erano considerate le rette intersezione con il piano del moto) si intersecheranno nel punto O, tutti i cilindri (primitivo, fondamentale, troncature) diventeranno coni.

In effetti, poiché i cilindri delle ruote piane erano limitati in altezza, avremo più concretamente dei tronchi di cono.

Per quanto concerne il rapporto di trasmissione di una coppia siffatta, vale quanto detto per le corrispondenti ruote di frizione, poiché i coni primitivi attuali corrispondono a quelle.

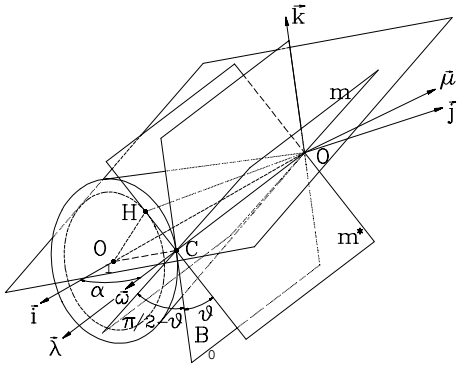


Figura 13

Cerchiamo invece le componenti della forza che si scam-

biano i denti, immaginando, (fig.13), per semplicità che il contatto avvenga in corrispondenza del punto C, punto della generatrice di contatto di uno dei coni primitivi corrispondente ad una sua sezione di raggio r_m.

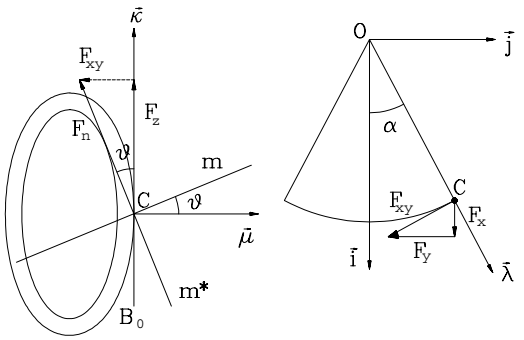


Figura 14

Ipotizziamo un riferimento con origine nel punto O, asse z perpendicolare al piano contenente gli assi del moto delle due ruote, asse x coincidente con l'asse di uno dei coni primitivi, asse y ortogonale ai primi due.
Avremo allora un piano B_0 passante per l'asse z e per la generatrice di contatto OC; un piano m^* passante per OC e tangente ai coni fondamentali, per cui sarà inclinato dell'angolo ϑ rispetto a B_0; la OC peraltro forma l'angolo α, semiapertura del cono primitivo, con l'asse y.
La normale al contatto dovrà appartenere al piano m^* e quindi la forza normale che si scambiano i denti avrà le due componenti:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{xy} &= -F_n \operatorname{sen}\vartheta \ \vec{\mu} \\ \vec{F}_z &= F_n \cos\vartheta \ \vec{k} \end{aligned} \qquad \textbf{(155)}$$

rispettivamente nel piano xy e secondo l'asse z. A sua volta la $\vec{F}_{xy}$, dovendo essere perpendicolare alla OC avrà le componenti:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= F_{xy} \operatorname{sen}\alpha \ \vec{i} = F_n \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha \ \vec{i} \\ \vec{F}_y &= F_{xy} \cos\alpha \ \vec{j} = F_n \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha \ \vec{j} \end{aligned} \qquad \textbf{(156)}$$

Delle tre componenti trovate, solamente la $\vec{F}_z$ ha momento rispetto all'asse della ruota in quanto le altre due giacciono nel piano contenente proprio quest'asse.
Per l'equilibrio della ruota dovrà allora essere:

$$C_m = F_z r_m = F_n r_m \cos\vartheta \qquad \textbf{(157)}$$

da cui possiamo ricavare:

$$F_n = \frac{C_m}{r_m \cos\vartheta} \qquad \textbf{(158)}$$

Sostituendo la (158) nella seconda delle (155) e nelle (156), le compo-

nenti, secondo i tre assi, della forza mutua che si scambiano i denti si possono scrivere come:

$$F_x = \frac{C_m}{r_m}\tan\vartheta\ \mathrm{sen}\alpha$$
$$F_y = \frac{C_m}{r_m}\tan\vartheta\ \cos\alpha \qquad \textbf{(159)}$$
$$F_z = \frac{C_m}{r_m}$$

e si può da queste rilevare, per un verso, l'influenza della geometria della ruota sull'entità delle forze che si scambiano i denti, e, d'altra parte, come tali tipi di ruote necessitino, nel montaggio, di adeguati sopporti che reagiscano, durante il funzionamento, a ciascuna delle componenti trovate.

§ 5.- Vite senza fine e ruota a denti elicoidali.

Questo meccanismo consente la realizzazione di un rapporto di trasmissione costante fra assi sghembi, generalmente fra assi sghembi ortogonali.
E' costituito dall'accoppiamento di una vite e da una ruota dentata piana a denti elicoidali.

La vite a filetto trapezoidale (fig.15), è il membro rigido la cui superficie attiva è ottenuta da un elicoide rigato chiuso a cono direttore, ossia dalla superficie generata da una retta, incidente l'asse di rotazione e formante un angolo ϑ (≈15°) con il piano normale ad esso, in moto elicoidale attorno allo stesso asse (fig16). La superficie attiva dei filetti è quella contenuta fra due cilindri di raggio r_1 ed r_2.

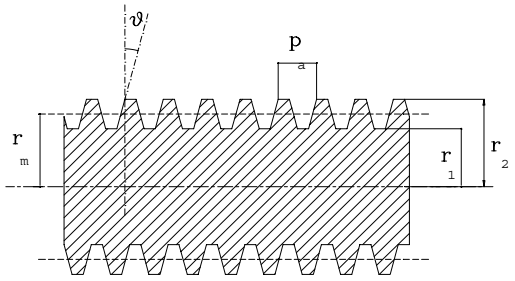


Figura 15

Indicando con α l'inclinazione dell'*elica media* in corrispondenza del raggio medio, r_m, della vite, e con p_e il suo passo, la relazione che lega tali grandezze è data da:

$$\tan\alpha = \frac{p_e}{2\pi r r_m} \qquad \textbf{(160)}$$

con:

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

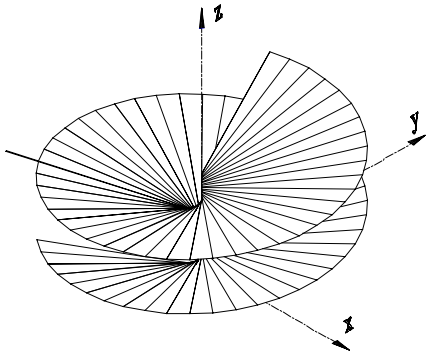


Figura 16

Si definisce ancora *passo assiale*, p_a, della vite l'ampiezza della traslazione che porta una sezione del filetto a coincidere con la successiva; questo può essere diverso dal passo dell'elica media se la vite è a più principi (2 principi in fig.17).
Sarà cioè:

$$p_e = z_1 p_a \qquad \textbf{(161)}$$

se con z_1 si indica il numero dei principi della vite.

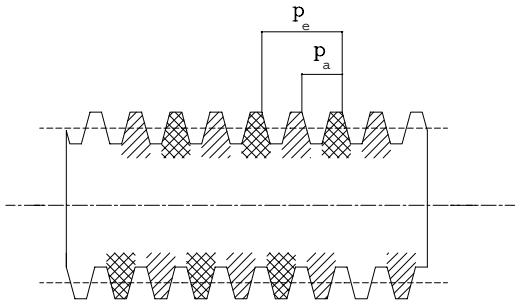


Figura 17

Il rapporto di trasmissione fra i due membri si può ricavare considerando ciò che accade nel *piano principale* ossia nel piano normale all'asse della ruota e contenente l'asse di rotazione della vite: in tale piano la vite si presenta come una cremagliera (*profilo principale*) che imbocca con una ruota piana a denti diritti. Ipotizzando, per semplicità, che il contatto fra i due membri sia in corrispondenza del punto C, in cui la primitiva della ruota, di raggio R, è tangente alla retta che dista di r_m dall'asse di rotazione della vite, si può osservare che la velocità assoluta del punto C, considerato appartenente al filetto della vite, può essere ricavata osservando che, se la vite ruota con velocità angolare ω_1, essa compirà un giro completo in un certo tempo Δt; sarà cioè:

$$2\pi = \omega_1 \Delta t \qquad \textbf{(162)}$$

Nello stesso tempo Δt, per effetto del moto elicoidale, lo stesso punto C si sarà spostato di p_e con velocità V; ossia:

$$p_e = v_C \Delta t \qquad \textbf{(163)}$$

Dalle (162) e (163) si ricava allora:

$$\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{p_e}{v_C}$$

da cui:

$$v_C = \frac{p_e}{2\pi}\omega_1 = \frac{z_1 p_a}{2\pi}\omega_1 \qquad \textbf{(164)}$$

La stessa velocità $\vec{v}_C$ deve avere il punto C appartenente alla primitiva della ruota la cui velocità angolare sarà ω_2; e deve quindi essere:

$$v_C = \omega_2 R \qquad \textbf{(165)}$$

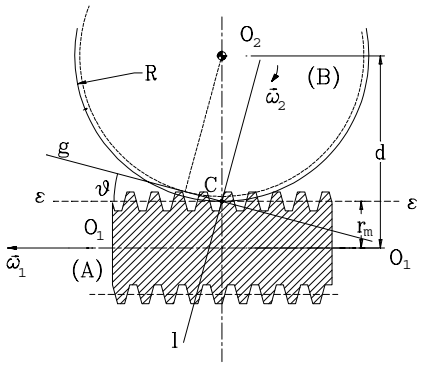


Figura 18

Inoltre, affinché vite e ruota ingranino correttamente, il passo della dentatura della ruota deve essere il medesimo del passo assiale della vite e quindi, nella (165), il valore di R deve essere tale per cui:

$$z_2 p_a = 2\pi R \qquad \textbf{(166)}$$

Sostituendo nella (165) si ha quindi:

$$v_C = \omega_2 \frac{z_2 p_a}{2\pi} \qquad \textbf{(165')}$$

da cui, eguagliandola con la (164), si può ricavare il **rapporto di trasmissione**:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \qquad \textbf{(167)}$$

Considerando che un accoppiamento del genere non è reversibile, e che l'elemento motore è la vite, si capisce che risulta possibile realizzare rapporti di trasmissione estremamente bassi: con una vite a due principi (z_1=2) ed una ruota elicoidale con 40 denti (z_2=40), dalla (167) si deduce un rapporto di trasmissione τ=1:20.

Supponendo ancora che il contatto sia in C, cerchiamo ora le componenti della *forza mutua* che i due membri si scambiano durante l'accoppiamento (fig.19).
Restando ancora nel piano principale (yz), osserviamo che dovrà esistere certamente una componente F_{yz} di direzione normale, in C, al profilo principale della vite; essendo questo inclinato dell'angolo ϑ, la relazione fra i suoi componenti lungo gli assi dovrà essere:

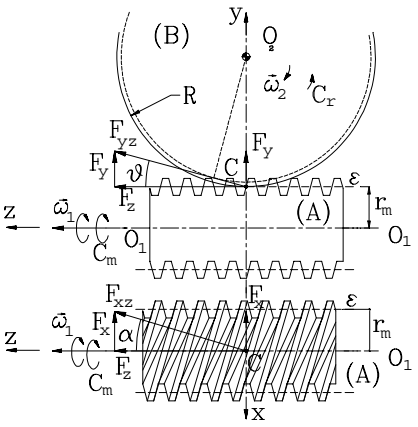


Figura 19

$$F_y = F_z \tan\vartheta \qquad \textbf{(168)}$$

Tuttavia né la F_y, né la F_z, possono avere momento rispetto all'asse di rotazione della vite, avendo rette d'azione ad esso incidenti; dovrà quindi esistere anche una componente F_x tale che sia, contemporaneamente:

$$F_x = \frac{C_m}{r_m} = F_z \tan\alpha \qquad \textbf{(169)}$$

rispettivamente per l'equilibrio della vite, e per dover essere la F_{xz} normale, nel piano (xz), all'elica media che è inclinata di α.
Da quest'ultima si ricava quindi:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{C_m}{r_m} \\ F_z &= \frac{C_m}{r_m}\frac{1}{\tan\alpha} \end{aligned} \qquad \textbf{(170)}$$

e infine, sostituendo opportunamente nella (168):

$$F_y = \frac{C_m}{r_m}\frac{\tan\vartheta}{\tan\alpha} \qquad \textbf{(171)}$$

ottenendo quindi le tre componenti della forza normale che, in assenza di attrito, il filetto della vite esercita sul dente della ruota, ed il cui modulo vale quindi:

$$F_n = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{C_m}{r_m}\sqrt{1 + \frac{\tan^2\vartheta}{\tan^2\alpha} + \frac{1}{\tan^2\alpha}}$$

ossia:

$$F_n = \frac{C_m}{r_m \tan\alpha}\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\vartheta} = F_z\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\vartheta} \quad \textbf{(172)}$$

§ 6.- Rotismi ordinari.

Prende il nome generico di *rotismo* un sistema costituito da ruote dentate che ingranano fra loro e disposte in modo tale che la rotazione di una di esse ponga in rotazione tutte le altre.

I rotismi si distinguono fondamentalmente in due categorie: i *rotismi ordinari*, quelli in cui gli assi di rotazione delle ruote siano tutti fissi, ed i *rotismi epicicloidali*, quelli in cui almeno un asse di rotazione è mobile.

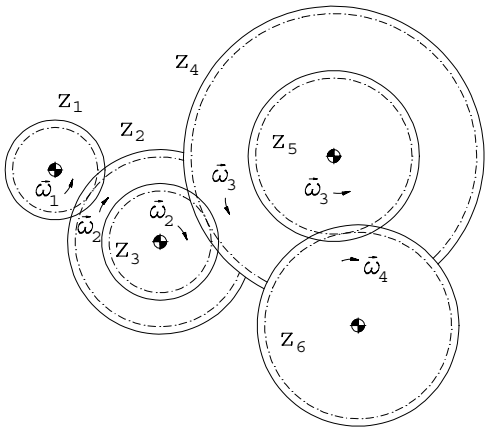


Figura 20

Nei rotismi ordinari (fig.20), tra la prima ruota (movente o conduttrice) e l'ultima ruota (cedente o condotta) sono generalmente interposti degli alberi intermedi su ciascuno dei quali sono calettate per lo più due ruote, solidali fra loro: di queste una ingrana con la ruota precedente di cui quindi sarà la cedente, l'altra con la successiva di cui sarà la movente.

Se su un asse intermedio è calettata un unica ruota che imbocca contemporaneamente con la precedente e con la successiva, questa prende il nome di intermedia oziosa (fig.21).

Gli assi delle ruote saranno fra loro tutti paralleli oppure no a seconda del tipo di ruote (piane o coniche) che sono calettate su di essi.

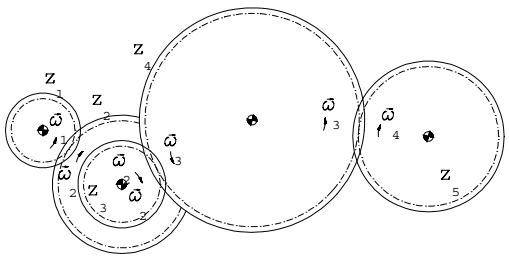


Figura 21

Consideriamo ora un rotismo ordinario costituito da n ruote dentate, disposte secondo lo schema di fig.20, ciascuna delle quali avrà z_i denti; in esso si avranno n/2 imbocchi per ciascuno dei quali è definibile un rapporto di trasmissione τ_i.
Con riferimento allo schema, avremo:

$$\tau_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}; \quad \tau_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{z_3}{z_4}; \quad \tau_3 = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{z_5}{z_6}; \qquad \textbf{(173)}$$

Il rapporto di trasmissione del rotismo nel suo complesso sarà dato dal prodotto dei rapporti di trasmissione che si hanno nei singoli imbocchi. E' infatti:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \tau_1 \tau_2 \tau_3 = \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6} \qquad \textbf{(174)}$$

Si può allora concludere che il *rapporto di trasmissione di un rotismo ordinario* è dato dal rapporto fra il prodotto del numero dei denti delle ruote conduttrici ed il prodotto del numero dei denti delle ruote condotte.

Dalla stessa (174) si può dedurre anche il *verso di rotazione* dell'ultima ruota: infatti, considerando che in ogni singolo imbocco si avrà $\tau_i < 0$ se l'imbocco è esterno oppure $\tau_i > 0$ se l'imbocco è interno, basterà contare il numero degli imbocchi esterni presenti nel rotismo e concludere che, se sono pari, il verso di rotazione dell'ultima ruota sarà concorde con quello della prima, mentre, se sono dispari, i due versi saranno discordi.

Se applichiamo la (174) al caso dello schema di fig.21, poiché la quarta ruota è contemporaneamente cedente per la terza e movente per la quinta (intermedia oziosa), avremo:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{z_1 z_3 z_4}{z_2 z_4 z_5} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_5} \qquad \textbf{(175)}$$

ossia che il rapporto di trasmissione risulta indipendente dalla presenza o meno della intermedia oziosa (da qui il nome); la sua interposizione in un rotismo ha solo lo scopo di invertire il verso di rotazione dell'ultima cedente.

Un rotismo si dice *riduttore* se per esso è $\tau < 1$; si dice *moltiplicatore* se risulta $\tau > 1$.
La sua condizione di equilibrio dinamico, in assenza di perdite, è espressa dalla relazione:

$$C_m \omega_1 = C_r \omega_n \qquad \textbf{(176)}$$

e quindi possiamo pure scrivere:

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{C_m}{C_r} \qquad \textbf{(177)}$$

Si vede allora che un rotismo riduttore è un moltiplicatore di coppia ($C_r > C_m$), mentre un rotismo moltiplicatore è un riduttore di coppia ($C_r < C_m$).

Uno dei problemi che trovano soluzione utilizzando i rotismi ordinari è quello di riuscire a realizzare più rapporti di trasmissione utilizzabili selettivamente in modo da adeguare la potenza motrice a differenti valori della coppia resistente, ossia in modo che risulti rispettata la (176); è ciò che si ottiene attraverso un *cambio di velocità*.

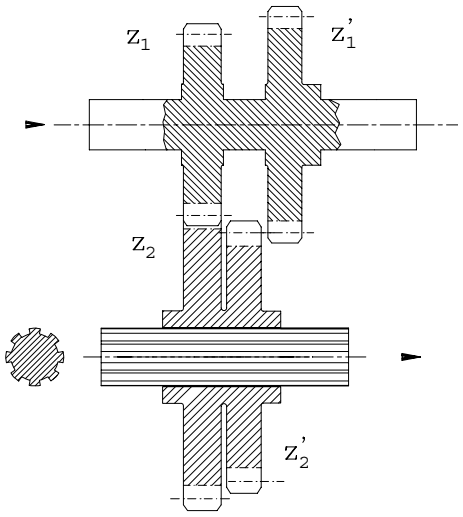


Figura 22

Possiamo definire come cambio di velocità un qualsiasi dispositivo atto a fornire alternativamente almeno due diversi rapporti di trasmissione fra un albero di ingresso ed un albero di uscita.

In generale la sua realizzazione pratica è ottenuta per mezzo di ruote dentate, quasi sempre piane, oppure con ruote di frizione, con cinghie e coni di pulegge, con cinghie e pulegge a diametro variabile (variatori continui), o anche con gruppi idraulici.

Nel campo delle ruote dentate piane la realizzazione più semplice si potrebbe avere con uno schema come quello di fig. 22 in cui le ruote z_1 e z'_1 sono calettate sull'albero motore e le ruote z_2 e z'_2 sono montate sull'albero condotto. Quest'ultimo è però un *albero scanalato* e ciò costituisce, per le ruote montate su di esso, un vincolo alla rotazione ma non alla traslazione: si comprende che spostando la coppia di ruote z_2 e z'_2 verso sinistra (come in figura) si ottiene l'imbocco fra z_1 e z_2, mentre spostandolo verso destra si ottiene l'imbocco fra z'_1 e z'_2.

Si realizzano così i due rapporti di trasmissione $\tau = z_1/z_2$ e $\tau' = z'_1/z'_2$.

Con tale disposizione, tuttavia, non può aversi la coassialità fra l'albero di ingresso e l'albero di uscita, cosa che invece è spesso auspicabile per motivi di geometria complessiva della macchina.

Quando si voglia ottenere la coassialità degli alberi si può ricorrere ad uno schema come quello di fig. 23 che rappresenta un cambio con *contralbero* (o albero secondario) ed una *coppia sempre in presa*; in tale disposizione i diversi rapporti di trasmissione vengono forniti sempre dall'imbocco fra quattro ruote di cui due, z_1 e z_2 nello schema di figura, ingranano costantemente fra loro mentre è possibile cambiare l'imbocco delle altre due.

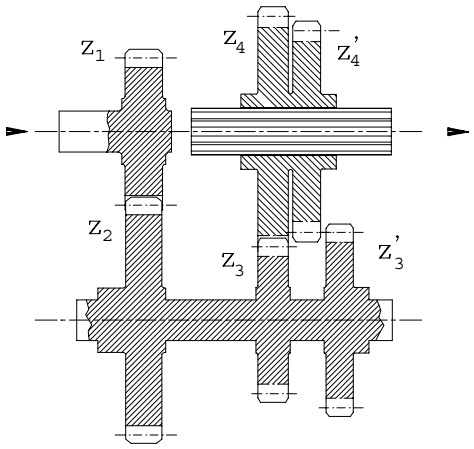


Figura 23

Nello schema, il gruppo di ruote indicate con z_4 e z'_4 può essere spostato sull'albero scanalato o verso sinistra ottenendo l'imbocco fra la z_3 e la z_4, oppure verso destra ottenendo l'imbocco fra la z'_3 e la z'_4. I rapporti di trasmissione che alternativamente si ottengono sono quindi $\tau = z_1 z_3 / z_2 z_4$ e $\tau' = z_1 z'_3 / z_2 z'_4$.

Sia lo schema di fig. 22 che quello di fig. 23, tuttavia, non soddisfano ad un'altra esigenza connessa all'utilizzo di un cambio di velocità, in particolare se questo è destinato alla trasmissione di un autoveicolo: quella di poter cambiare il rapporto di trasmissione utilizzato mentre gli alberi, movente e cedente sono in rotazione.

E' chiaro che il problema sta nel fatto che, poiché a diversi rapporti di trasmissione corrispondono velocità angolari diverse dell'albero di uscita, le velocità periferiche delle ruote montate su di esso saranno pure diverse essendo diverso il loro raggio di primitiva: sarà quindi abbastanza improbabile che, nel passaggio da un imbocco all'altro, i denti della ruota movente trovino il loro posto nei vani della cedente e ciò, inevitabilmente, dà luogo ad urti fra i denti (*grattata*) con conseguente usura,

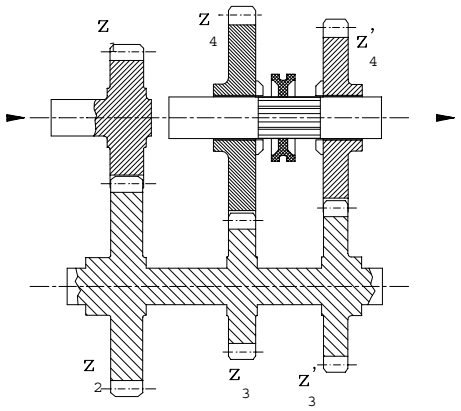


Figura 24

più o meno importante, degli stessi.
La fig. 24 mostra lo schema di funzionamento *di un cambio sincronizzato* che si prefigge appunto lo scopo di evitare tale inconveniente. In esso, si vede, le ruote che devono realizzare i diversi rapporti di trasmissione sono tutte sempre in presa: quelle che sono montate sull'albero di uscita sono però montate folli sullo stesso, di modo che esse, di per sé, non sono in grado di porlo in rotazione. D'altra parte un tratto dell'albero di uscita è realizzato come albero scanalato e su questo può scorrere l'anello del sincronizzatore il quale, spostato a destra o a sinistra realizza il collegamento fra l'albero ed una delle due ruote folli. Il collegamento fra la ruota folle e l'anello del sincronizzatore avviene per mezzo di particolari risalti, ricavati su una faccia della ruota, che trovano sulla faccia dell'anello i corrispondenti vani e che sono sagomati in modo tale che la rotazione stessa favorisca la presa. Tale tipo di collegamento ha subito ovviamente nel tempo la sua evoluzione *per cui esistono anche modi diversi per ottenere il medesimo risultato.*

§ 7.- Rotismi epicicloidali.

Come si è già detto nel § precedente, un rotismo viene detto epicicloidale quando almeno uno degli assi sia in moto durante il funzionamento.
Il membro che consente il moto di tale asse prende il nome di *portatreno* e *satelliti* vengono dette le ruote calettate su di esso.
Un siffatto meccanismo non ha più un grado di libertà, ma avrà un numero di gradi di libertà in più pari al numero degli assi mobili del sistema.
Uno dei modi più semplici in cui può essere realizzato un rotismo epicicloidale è rappresentato in fig.25 , in cui i satelliti sono quelli a cui si fa riferimento con i pedici 2 e 3; se una delle ruote che imboccano con i satelliti, è a dentatura interna (fig.26), ad essa si dà il nome di *corona*, diversamente prende il nome di *solare*.

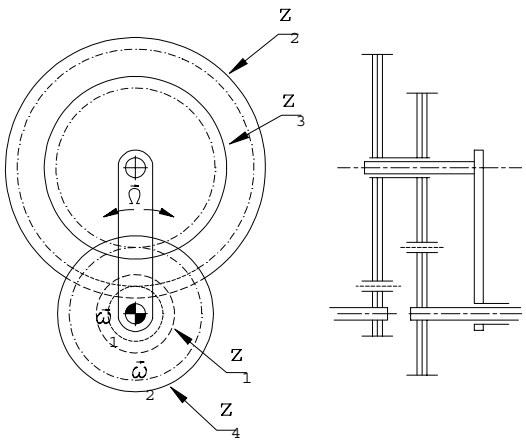


Figura 25

Le velocità angolari caratteristiche sono quella della prima ruota, ω_1, quella dell'ultima ruota, ω_2, e quella del braccio portatreno, Ω. Si comprende che tale meccanismo ha due gradi di libertà, e che pertanto potrà essere utilizzato come *sommatore* se fatto funzionare con due moventi ed un cedente, o come *differenziale* se sarà fatto funzionare con un movente e due cedenti.

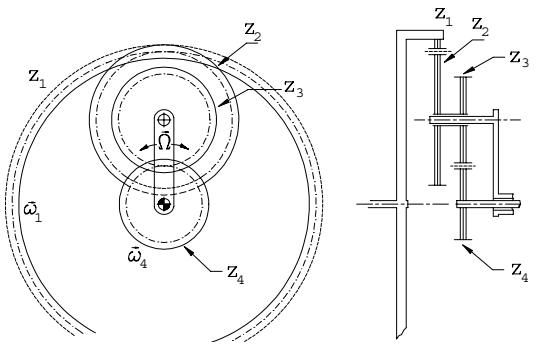


Figura 26

In ogni caso, dal punto di vista cinematico, il suo moto non potrà essere univocamente definito se non imponendo il valore di una delle tre velocità angolari, oltre a stabilire la funzione di ciascun membro (movente o cedente).

Si può ancora osservare che qualora venga imposto proprio il valore $\Omega=0$, il rotismo tornerebbe ad essere un rotismo ordinario.

Lo studio cinematico di un rotismo epicicloidale, ossia la determinazione del suo rapporto di trasmissione, diventa semplice se si pone mente al fatto che il suo modo di funzionare non può essere alterato da un cambiamento di riferimento, e quindi se la misura delle velocità in gioco viene fatta in un riferimento mobile anziché in quello fisso i moti fra le ruote che lo compongono restano inalterati.

Se si sceglie allora come nuovo riferimento proprio il braccio portatreno, le nuove velocità angolari saranno $(\omega_1-\Omega)$ per la prima ruota, $(\omega_2-\Omega)$ per l'ultima ruota, $(\Omega-\Omega)=0$ per il portatreno che risulterà fermo. Si ottiene così quello che prende il nome di *rotismo ordinario corrispondente*.

E' lecito allora scrivere:

$$k = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \pm \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \qquad \textbf{(178)}$$

Questo viene chiamato *rapporto costruttivo* (o rapporto di Willis) e consente di legare agevolmente il rapporto fra il numero dei denti delle ruote che compongono il rotismo alle velocità angolari in gioco.

E' importante notare, nella (178), la presenza del *doppio segno*: sta ad indicare che il valore di k potrà essere positivo o negativo. Il cambio di riferimento, che si ottiene, come visto, sovrapponendo a tutto il sistema una velocità eguale e contraria a quella del braccio portatreno, potrebbe avere come effetto, a seconda dei casi, una inversione del segno di una

delle ω, e di ciò deve tenersi conto con il segno da attribuire al parametro k. In altre parole, nel passaggio dal rotismo epicicloidale al rotismo ordinario corrispondente se una delle due differenze che compaiono nella (178) diventa negativa, k sarà negativo. La valutazione di tale circostanza è semplice: basterà immaginare fermo il braccio portatreno e valutare se, assegnando ad arbitrio un verso di rotazione alla prima ruota, risulta per l'ultima ruota un verso concorde o discorde con la prima; se i versi sono concordi il segno sarà positivo, sarà negativo nel caso opposto.

Definito il valore assunto da k, e noto quali siano gli alberi moventi e quali i cedenti, è possibile ricavare dalla stessa (178) l'espressione del rapporto di trasmissione che il rotismo epicicloidale realizza. Infatti sviluppando si ha:

$$\Omega = \frac{k}{k-1}\omega_1 - \frac{1}{k-1}\omega_2$$

e da questa, quindi, uno dei tre rapporti:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = k - (k-1)\frac{\Omega}{\omega_1} \\ \tau_2 &= \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{k}{k-1} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{1}{k-1} \\ \tau_3 &= \frac{\Omega}{\omega_2} = \frac{k}{k-1}\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{1}{k-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(179)}$$

oppure i tre inversi, se si scambiano le funzioni di ingresso ed uscita.
Si comprende, allora, la grande versatilità di questo tipo di rotismi: con lo stesso valore di k, ossia con le stesse ruote, possono essere ottenuti rapporti di trasmissione diversi con la sola scelta delle funzioni da assegnare agli assi.

§ 8.- Applicazioni.

Consideriamo il rotismo di fig.27 costituito dalle quattro ruote con numeri di denti z_1, z_2, z_3, z_4, in cui la ruota 1 è solidale al telaio, mentre la 2 e la 3, solidali fra loro, sono i satelliti calettati sul braccio portatreno.
E' la disposizione del **rotismo di Pickering** o rotismo per contagiri.
Calcoliamo il rapporto di trasmissione nella ipotesi in cui sia movente il braccio portatreno e cedente la ruota 4, ossia il valore di $\tau = \omega_4/\Omega$.
Il rapporto costruttivo vale:

$$k = \frac{\omega_4 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \qquad \textbf{(180)}$$

ed è positivo in quanto, a portatreno fermo, ad una rotazione della ruota 1, corrisponderebbe una rotazione dello stesso verso della ruota 4 (2 imbocchi esterni).

Ora, con le ipotesi fatte sulla funzione degli alberi, e tenendo conto che in questo caso è $\omega_1=0$, il rapporto di trasmissione sarà dato dalla stessa (180), di cui il valore di k è stato già calcolato, ed in cui dobbiamo porre, appunto, $\omega_1=0$.

Avremo allora:

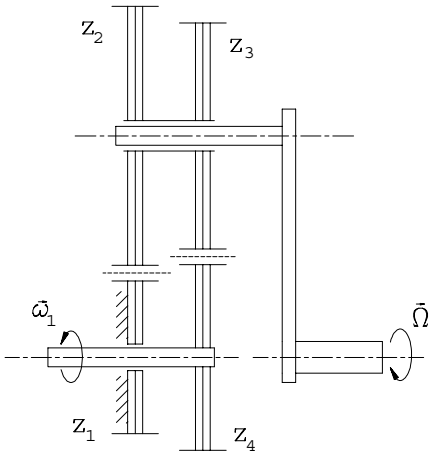


Figura 27

$$k = \frac{\omega_4 - \Omega}{-\Omega} = 1 - \frac{\omega_4}{\Omega}$$

e quindi, tenendo conto della (180),:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\Omega} = 1 - k = \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{z_2 z_4} \qquad \textbf{(181)}$$

Si può subito osservare che è facile che la differenza a numeratore risulti molto piccola a fronte del denominatore: il rotismo risulterà quindi fortemente riduttore.

Se si avesse $z_1=65$, $z_2=85$, $z_3=80$, e $z_4=70$, si avrebbe k=520/595 e τ=75/595 ossia $\tau \approx 0{,}126 \approx 1/8$.

Un altro tipo di rotismo epicicloidale, di impiego aeronautico, è quello di cui allo schema di fig.28. Rappresenta il **riduttore Farmann**, costituito da tre ruote coniche, in cui la ruota 3 è solidale al telaio, è movente la

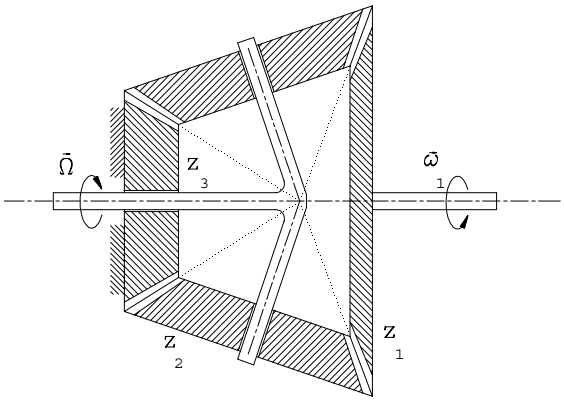


Figura 28

ruota 1, cedente il portatreno.
In questo caso sarà:

$$k = \frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = -\frac{z_1}{z_3} \qquad \textbf{(182)}$$

Non compare il numero di denti della ruota 2 perché nel rotismo ordinario corrispondente essa è una intermedia oziosa, ed il rapporto è negativo in quanto, in quella condizione, risultano di verso opposto le rotazioni della ruota 1 e della ruota 3 (è vero che vi sono due imbocchi esterni ma la disposizione delle ruote coniche dà luogo ad uno rotazione di π del vettore ω_3).
Tenendo conto che $\omega 3=0$, il rapporto di trasmissione sarà dato da:

$$\tau = \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{k}{k-1} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} \qquad \textbf{(183)}$$

Se $z_1=300$ e $z_3=60$ sarà k= - 0.2 e quindi $\tau=0.2/1.21\approx 0,17$. La forma che questo rotismo assume globalmente, in questa versione o anche in versioni con più satelliti, è il motivo per cui veniva utilizzato in campo aeronautico.
Il **differenziale per autoveicoli** (fig.29), è costituito anch'esso da quattro ruote coniche, ma a due a due uguali. Due di esse, la 2 e la 4, fungono da satelliti e come tali sono calettate al portatreno che è, l'elemento motore del meccanismo; le altre due, la 1 e la 3, sono calettate agli alberi (i semiassi) su cui, all'estremità opposta, sono poi calettati i mozzi delle ruote.

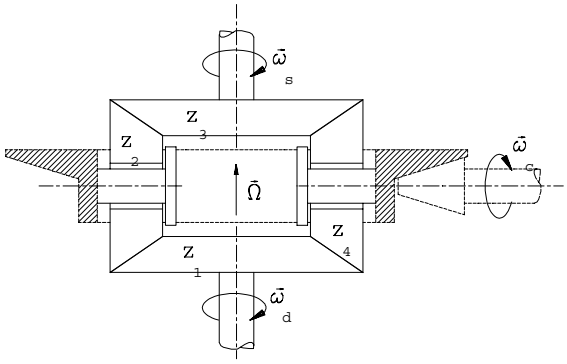


Figura 29

In tali condizioni il meccanismo ha di fatto due gradi di libertà e quindi, indicando con ω_s la velocità angolare della ruota 1 e con ω_d quella della ruota 3, la relazione fra le velocità angolari si scriverà come:

$$\Omega = \frac{k}{k-1}\omega_s - \frac{1}{k-1}\omega_d \qquad \textbf{(184)}$$

D'altra parte, l'uguaglianza delle ruote 1 e 3 implica che il rapporto costruttivo del differenziale è:

$$k = \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_d - \Omega} = -\frac{z_3}{z_d} = -1 \qquad \textbf{(185)}$$

Ne discende che dalla (184) risulta la relazione cinematica:

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_s + \frac{1}{2}\omega_d = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \qquad \textbf{(186)}$$

il che significa che la velocità angolare del portatreno sarà sempre la media delle velocità angolari degli alberi di uscita.

In particolare, se $\omega_s=\omega_d=\omega$ (marcia in rettilineo), sarà $\Omega=\omega$; la stessa condizione implica che non vi sarà alcuna rotazione dei satelliti intorno al proprio asse di calettamento: i punti simmetrici delle ruote 2 e 4, a contatto con le ruote adiacenti 1 e 3, avranno, infatti, la medesima velocità.

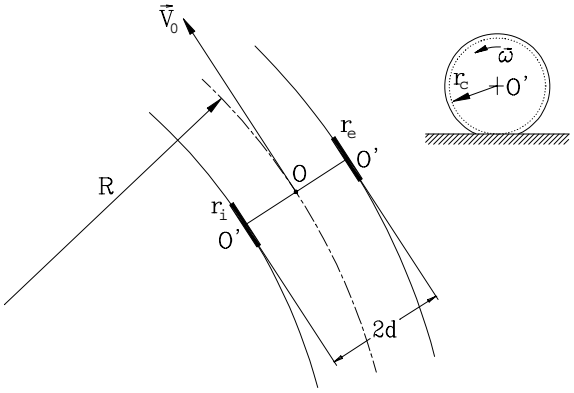


Figura 30

Consideriamo ora (fig.30), un veicolo la cui carreggiata sia 2d, le cui ruote abbiano un raggio sotto carico pari ad r_c, e che stia percorrendo con velocità V_0 una traiettoria di cui sia R il raggio di curvatura.
I centri delle ruote percorreranno le loro traiettorie con velocità, rispettivamente per la ruota interna e per l'esterna:

$$V_i = \frac{V_0}{R}(R-d)$$

$$V_e = \frac{V_0}{R}(R+d)$$

per cui le velocità angolari delle stesse ruote, ipotizzando che rotolino senza strisciare, saranno:

$$\omega_s = \frac{V_i}{r_c} = \frac{V_0}{r_c R}(R-d) \qquad \omega_d = \frac{V_e}{r_c} = \frac{V_0}{r_c R}(R+d)$$

La (186) si scriverà allora:

$$\Omega = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} = \frac{V_0}{2r_c R}(R-d+R+d) = \frac{V_0}{r_c} \qquad \textbf{(187)}$$

e ciò mostra da un canto che la larghezza della carreggiata del veicolo non ha gioco nel funzionamento del differenziale, e dall'altro che il legame fra la velocità di avanzamento del veicolo V_0, e la velocità angolare del portatreno dipende esclusivamente dal raggio sotto carico delle ruote.

Consideriamo ancora che, dal punto di vista dinamico, in assenza di perdite, deve valere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} &\Omega = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \\ &C_m\Omega - C_s\omega_s - C_d\omega_d = 0 \\ &C_m - C_s - C_d = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(188)}$$

in cui compaiono le coppie resistenti C_s e C_d agenti rispettivamente sul semiasse interno, sul semiasse esterno e la coppia motrice C_m agente sul portatreno; la seconda equazione rappresenta l'equilibrio delle potenze in assenza di perdite, la terza l'equilibrio delle coppie.
Risolvendo il sistema (188) si ottiene dapprima:

$$\begin{aligned} &C_m\left(\omega_s + \omega_d\right) - 2C_s\omega_s - 2C_d\omega_d = 0 \\ &C_m = C_s + C_d \end{aligned}$$

e poi:

$$2C_s\omega_s + 2C_d\omega_d - \left(C_s + C_d\right)\left(\omega_s + \omega_d\right) = 0$$

da cui:

$$\left(C_s - C_d\right)\left(\omega_d - \omega_s\right) = 0 \qquad \textbf{(189)}$$

Si vede allora che anche quando le velocità angolari delle ruote siano diseguali, dovendo essere necessariamente verificata la (189), dovranno essere eguali le coppie alle ruote, mentre quando le velocità angolari delle ruote sono eguali le coppie resistenti alle ruote possono anche essere diverse.
Ciò implica che se $\Omega \neq 0$ mentre, per es., è nulla sia ω_s che C_d, si avrà dalla prima delle (188) che è $\omega_d \neq 0$; ed allora, essendo $\omega_d \neq \omega_s$, sarà, per la (189), $C_s = C_d = 0$ con la conseguente impossibilità di far avanzare il veicolo.

CAPITOLO XI

I FONDAMENTI DELLA MECCANICA

SOMMARIO

1 - Postulato d'inerzia e definizione di forza.
2 - Postulato del parallelogramma delle forze.
3 - Postulato di Galilei e nozione di massa.
4 - Principio di azione e reazione.
5 - Lavoro di una forza.
6 - Lavoro di una forza posizionale.
7 - Forze conservative e potenziale.
8 - Nota: integrazione grafica.

Le leggi che regolano il moto dei corpi prendono una forma particolarmente semplice quando il corpo, cui ci si riferisce, può essere assimilabile ad un punto materiale.

Ciò non costituisce comunque pregiudizio alcuno per la loro validità giacché un corpo esteso può sempre essere pensato suddiviso in un numero qualsivoglia grande di particelle, ciascuna delle quali è assimilabile ad un punto materiale.

§ 1.- Postulato d'inerzia e definizione di forza.

La Dinamica studia il moto dei corpi come conseguenza delle cause che hanno provocato quello stesso moto; tra le cause che influenzano il moto di un corpo c'è, intanto, la presenza degli altri corpi dell'Universo, mentre occorrerebbe, per analizzare il suo moto, che esso fosse isolato, ossia sottratto a tale influenza.

Poiché, nella pratica, non è possibile disporre di un corpo rigorosamente isolato occorre definire, mediante un postulato, il moto di un punto materiale isolato, lasciando poi all'esperienza il compito di valutare se i

risultati conseguenti si accordano con i dati sperimentali.

Tale postulato è il **postulato d'inerzia**, con il quale si afferma che *un punto materiale isolato o è fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme*; in altre parole la sua accelerazione è costantemente nulla.
Dal teorema di composizione delle accelerazioni ne consegue che, se la sua accelerazione è nulla, è nulla anche la sua accelerazione rispetto ad un riferimento in moto traslatorio uniforme (moto uniforme $\therefore \vec{a}_P^{(r)} = 0$; moto traslatorio $\therefore \vec{a}_P^{(co)} = 0$).
Possiamo allora convenire di chiamare **riferimento inerziale** tanto uno che sia fisso o immaginato tale, quanto uno che sia in moto rispetto al primo, ma che si muova di moto traslatorio uniforme.

Se una certa azione fisica si esercita su un punto P ad un dato istante t, tale punto per il postulato di cui sopra dovrà acquistare una certa accelerazione che sarà caratterizzata da una certa direzione e da un certo verso.
Questa azione fisica allora si distingue per un'intensità, proporzionale all'entità di accelerazione provocata su P, ed anche per una direzione ed un verso, quelli dell'accelerazione di P. Si tratta quindi di una grandezza vettoriale, $\vec{F}$, che chiameremo **forza agente su P all'istante t**.

§ 2. - Postulato del parallelogramma delle forze.

Il **postulato del parallelogramma delle forze** fa riferimento al caso in cui sul punto materiale P agiscano, nello stesso istante t, più forze e stabilisce qual'è l'effetto su P di tali azioni.
Esso stabilisce che, *qualunque sia il numero delle forze agenti sopra un punto materiale, esse sono sempre sostituibili nei loro effetti, con un'unica forza uguale alla loro somma*.

Poiché, come visto nel precedente paragrafo, le forze sono grandezze vettoriali esse si sommano con la regola del parallelogramma; da cui il nome del postulato.

§ 3. - Postulato di Galilei e nozione di massa.

Dalla definizione di forza, data al § 1, si deduce che l'accelerazione di un punto materiale P e la forza agente su di esso hanno, istante per istante, la stessa direzione e lo stesso verso. Si è pure anticipato che il modulo di tale accelerazione è proporzionale all'intensità della forza. Ciò è

vero in base al **postulato di Galilei** che afferma che *il modulo della forza che agisce su un punto materiale è proporzionale al modulo della sua accelerazione, e che il coefficiente di tale proporzionalità è una costante caratteristica del punto P, indipendente dalla sua posizione, dalla sua velocità e dal tipo di forza agente*.
Tale costante è la massa, m, del punto materiale P, per cui possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Come caso particolare, applichiamo tale relazione ad un corpo che cade nel vuoto.

Sappiamo che tutti i corpi che cadono nel vuoto sotto l'azione della sola forza peso $\mathbf{F}_p$, acquistano, in un dato luogo, la stessa accelerazione (di gravità) orientata lungo la verticale e verso il basso. Se indichiamo con $\vec{n}$ il versore corrispondente, possiamo scrivere per questa accelerazione:

$$\vec{a} = g\vec{n}$$

D'altra parte possiamo anche scrivere per la forza peso agente sul corpo:

$$\vec{F} = F_p\vec{n}$$

Queste ultime due relazioni, sostituite nella prima, danno allora:

$$F_p = mg$$

che ci dice come, in un dato luogo, il peso di un corpo è proporzionale alla sua massa.

§ 4 - Principio di azione e reazione.

I postulati enunciati nei precedenti paragrafi riguardano forze che si ritengono applicate ad uno stesso punto materiale. Tuttavia quando si ha da trattare con sistemi è necessario prendere in considerazione forze, o sistemi di forze, applicate a punti materiali diversi.

Si può osservare, allora, ciò che accade, per esempio, quando si hanno due punti, P e Q, appartenenti a corpi diversi ed in contatto fra loro. E facile immaginare che se sul punto Q agisce una forza, $\vec{F}_{PQ}$, dovuta al punto P questa cesserà di esistere se il punto P viene rimosso, ossia se non esiste più il contatto fra i due punti. In casi come questo, e in casi analoghi, l'esperienza ci dice che all'azione esercitata dal punto P sul punto Q corrisponde una forza (reazione), $\vec{F}_{QP}$, direttamente opposta esercitata dal pun-

to Q sul punto P.
Più in generale, nel caso di un punto materiale vincolato, alla reazione che esso subisce da parte del vincolo fa riscontro una forza esercitata dal punto sul vincolo stesso.

Da questo tipo di osservazioni discende il **principio di azione e reazione** (Newton): *Tutte le volte che un punto materiale P è soggetto all'azione di una certa forza* $\vec{F}$ *, dovuta alla presenza di un altro punto materiale Q, ad essa fa riscontro, sia in condizioni di quiete che di moto, una forza direttamente opposta (reazione)* $-\vec{F}$ *esercitata dal punto materiale P sul punto materiale Q.*

Si noti che ciò implica che, se i punti P e Q non sono a diretto contatto, le due forze in questione (la $\vec{F}$ e la $-\vec{F}$) debbono avere necessariamente come retta d'azione la congiungente i punti P e Q.

§ 5. - Lavoro di una forza.

Supponiamo che un corpo sia sollecitato, in un suo punto P, da una forza costante $\vec{F}$ e che il punto si sposti dalla posizione P' alla posizione P".

Si definisce **lavoro compiuto dalla forza costante** $\vec{F}$ nello spostamento (P"-P') il prodotto scalare:

$$L = \vec{F} \times (P'' - P') \qquad \textbf{(1)}$$

Analogamente si può definire il lavoro compiuto dalla coppia costante di momento $\vec{M}$ applicata ad un corpo che ha ruotato di un angolo $\vec{\varphi}$ il prodotto scalare:

$$L = \vec{M} \times \vec{\varphi} \qquad \textbf{(2)}$$

Se la (1) o la (2) danno un valore positivo il lavoro si dice **lavoro motore**, se danno valore negativo il lavoro si dice **lavoro resistente**.

E' ovvio che il lavoro sarà nullo se è nulla la forza, oppure se è nullo lo spostamento (P"-P'), ma sarà nullo anche se la direzione della forza e quella dello spostamento sono ortogonali.
Lo stesso vale per la coppia.

Se invece la forza(*) non è costante ma è un vettore variabile con il tempo, $\vec{F}(t)$, l'espressione (1) perde di significato, in quanto durante lo spostamento dal punto da P' a P'', il vettore $\vec{F}(t)$ può cambiare continuamente.
Sarà necessario in questo caso riferirsi ad un intervallo di tempo elementare *dt*, durante il quale il punto P avrà subito uno spostamento infinitesimo *dP*. Diremo, in questo caso, che la forza variabile $\vec{F}(t)$ in corrispondenza allo spostamento dP, ha compiuto il lavoro elementare:

$$dL = \vec{F}(t) \times dP \qquad \textbf{(3)}$$

sottintendendo quindi che nell'intervallo di tempo *dt* la forza si sia mantenuta costante.
Il lavoro complessivo compiuto dalla $\vec{F}(t)$ in corrispondenza allo spostamento di P da P' a P'', sarà poi dato da:

$$L = \int_{P'}^{P''} \vec{F}(t) \times dP \qquad \textbf{(4)}$$

Intanto, se si indicano con F_x, F_y, F_z le componenti del vettore $\vec{F}(t)$ e con *dx*, *dy*, *dz* le componenti dello spostamento elementare *dP* nel riferimento cartesiano adottato, la (3) si scrive:

$$dL = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad \textbf{(5)}$$

ed ancora, se si ricorda che è:

$$dP = \vec{v}_P(t)dt \equiv \dot{x}dt + \dot{y}dt + \dot{z}dt \qquad \textbf{(6)}$$

la (5) si scrive anche come:

$$dL = \vec{F}(t) \times \vec{v}_p dt = \left(F_x\,\dot{x} + F_y\,\dot{y} + F_z\,\dot{z}\right)dt$$

Il rapporto fra il lavoro elementare *dL* ed il tempo *dt* in cui tale lavoro è compiuto prende il nome di **potenza**, e sarà:

$$W = \frac{dL}{dt} = \vec{F}(t) \times \vec{v}_P = F_x\,\dot{x} + F_y\,\dot{y} + F_z\,\dot{z}$$

La potenza è uno scalare che misura la rapidità con cui viene compiuto un lavoro.

(*) Continuiamo a riferirci solo alla forza per brevità, ma intendendo che i concetti valgono anche per le coppie mettendole in relazione con le corrispondenti rotazioni.

Sostituendo la (6) nella (4), e tenendo conto che la posizione P' sarà occupata da P all'istante t' e la posizione P" all'istante t", avremo per il **lavoro compiuto dalla forza in un intervallo di tempo finito** (t"-t'):

$$L = \int_{t'}^{t''} dL = \int_{t'}^{t''} \vec{F}(t) \times \vec{v}_P \, dt = \int_{t'}^{t''} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt$$

ossia la somma di tutti i lavori elementari compiuti dalla forza nei successivi tempuscoli dt.
Si deduce quindi anche, tenendo presente la proprietà distributiva del prodotto scalare, che *il lavoro della somma di più forze applicate ad uno stesso punto è uguale alla somma dei lavori delle singole forze*.

Se il sistema è costituito da un insieme di punti materiali P_i soggetti alle forze $\vec{F}_i$ il lavoro elementare di tali forze sarà dato da:

$$dL = \sum_i (\vec{F}_i \times dP_i)$$

e la potenza da:

$$W = \sum_i (\vec{F}_i \times \vec{v}_{P_i})$$

Il lavoro delle stesse forze, nell'intervallo di tempo t'-t", sarà quindi:

$$L = \int_{t'}^{t''} \sum_i (\vec{F}_i \times \vec{v}_{P_i}) dt$$

§ 6.- Forze posizionali.

Se la variabilità della forza $\vec{F}$ che sollecita il punto P di un corpo dipende solamente dalle coordinate del suo punto di applicazione, tale forza si dice **posizionale**; il suo lavoro, in tal caso, dipende solamente dalla traiettoria γ percorsa da P e non dalla sua legge oraria.

Infatti se la forza è posizionale, anche le sue componenti dipenderanno solamente dalle coordinate di P, e potranno essere quindi espresse, in funzione dell'ascissa curvilinea s, come:

$$F_x = F_x(s) \qquad F_y = F_y(s) \qquad F_z = F_z(s)$$

Inoltre, per le componenti dello spostamento, si potrà scrivere:

$$dx = \dot{x}dt = \frac{dx}{ds}ds\,; \quad dy = \dot{y}dt = \frac{dy}{ds}ds\,; \; dz = \dot{z}dt = \frac{dz}{ds}ds\,;$$

L'espressione del lavoro, con l'opportuno cambiamento dei limiti di integrazione, sarà pertanto:

$$L = \int_{s'}^{s''} \left[F_x(s)\frac{dx}{ds} + F_y(s)\frac{dy}{ds} + F_z(s)\frac{dz}{ds} \right] ds \qquad \textbf{(7)}$$

che corrisponde all'integrale della forma differenziale:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

e quindi all'integrale curvilineo:

$$L = \int_{\gamma} \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz \right]$$

§ 7.- Forze conservative e potenziale.

Può anche accadere che la forza $\vec{F}$, oltre che essere posizionale, sia descritta da una forma analitica tale che le sue componenti risultano da funzioni derivabili nel dominio in cui si muove il punto P: ossia che esista una certa funzione U(P) tale che sia:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \textbf{(8)}$$

Allora accade anche che, nello spostamento del punto P da P' a P'', il lavoro compiuto dalla forza risulta indipendente dalla traiettoria, mentre dipende solo dalle posizioni estreme del percorso; la forza si dirà allora una **forza conservativa**.

Da tale definizione si deduce che se, nel suo moto, il punto P percorre una **traiettoria chiusa** (da P' a P'' e poi da P'' a P'), il lavoro compiuto nel percorrere il tratto da P' a P'' sarà uguale ed opposto al lavoro compiuto nel percorrere il tratto da P'' a P', e pertanto il **lavoro complessivo sarà nullo.**

Sarà quindi, per una forza conservativa:

$$\oint \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \right) = 0$$

D'altra parte le componenti di una forza conservativa soddisfano le equa-

zioni:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y};$$

ed allora, volendo calcolare l'integrale (7), tenendo conto della (8), troveremmo:

$$L=\int_{s'}^{s''}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)ds=U(P'')-U(P') \qquad \textbf{(9)}$$

La funzione U(P) che compare nella (9) prende il nome di **potenziale**; risulta ovviamente definita a meno di una costante additiva, e gode della proprietà che il lavoro compiuto dalla forza conservativa $\vec{F}$, quando il suo punto di applicazione P passa dalla posizione P' alla posizione P'', è uguale alla differenza che il potenziale assume nei due punti. Il legame fra potenziale della forza e sue componenti è espresso dalle relazioni (8).

Per un sistema materiale si dirà che *le forze attive che agiscono sui suoi punti, P_i, sono conservative in un dato dominio se per ogni punto P_i è conservativa sia la forza esterna attiva, $\vec{F}^{(e,a)}$, che la forza interna attiva, $\vec{F}^{(i,a)}$, esercitata da un altro punto P_j, supposto fisso in quel dominio, che agiscono su di esso.*

In base a questa definizione si può trovare, per esempio, il potenziale della forza elastica agente fra i due punti estremi P e Q di una molla di rigidezza k.

Supponiamo che la lunghezza della molla indeformata sia l_0 mentre è l_1 la sua lunghezza dopo la deformazione. La forza interna che si esercita sui due punti sarà, in modulo:

$$F^{(i,a)}=-k(l-l_0)$$

e quindi il suo potenziale sarà dato da:

$$U=-\int_{l_0}^{l_1}k(l-l_0)dl=-\frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2 \qquad \textbf{(10)}$$

La differenza (l_1-l_0) è proprio, in questo caso, la distanza, P-Q, fra i punti estremi della molla al termine della deformazione, e si può verificare quindi che è:

$$F_{Q.P}^{(i,a)}=\frac{\partial U}{\partial(P-Q)}=\frac{\partial U}{\partial P};\qquad F_{P,Q}^{(i,a)}=\frac{\partial U}{\partial Q}=-F_{Q.P}^{(i,a)};$$

ossia che dalla stessa (10) si può ottenere sia il potenziale della forza conservativa interna che il punto Q esercita su P, sia quello della forza che il

punto P esercita su Q.

§ 8.- Nota: Integrazione grafica.

Può essere utile qui richiamare un metodo che risulta conveniente nella risoluzione di problemi che coinvolgono il calcolo del lavoro di una forza variabile, o comunque nella risoluzione di un problema qualsiasi che coinvolga l'operazione di integrazione.

In linea assolutamente generale il problema si pone nei seguenti termini.

Si dispone di una funzione f(x) riportata in un diagramma cartesiano, con date scale di rappresentazione che possiamo indicare con α per i valori sulle ascisse e β per quelli sulle ordinate. Supponendo che x possa variare fra un valore minimo pari ad x_1 ed un valore massimo pari ad x_2, si vuole trovare il valore di:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}(x)\,dx$$

Ora, poiché il valore di detto integrale corrisponde al valore dell'area sottesa dalla f(x) sull'asse delle ascisse (positiva quando è f(x)>0; negativa quando è f(x)<0) fra i limiti x_1 ed x_2, il problema potrà essere risolto calcolando appunto il valore di tale area; data la variabilità con x della f(x) ciò potrà essere fatto sommando le aree corrispondenti ad n strisce parallele all'asse delle ordinate di opportuna larghezza Δx. In linea teorica l'approssimazione del calcolo sarà tanto migliore quanto minore è l'ampiezza delle singole strisce, ma in pratica è sufficiente, come si vedrà, adeguarsi all'andamento della funzione integranda.

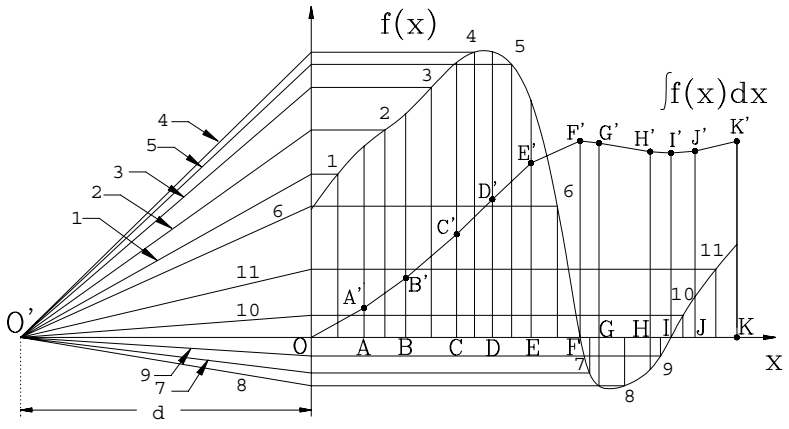


Figura 1

In fig.1 è stata riportata un funzione f(x), fra i limiti x_1=0 ed $x_2 \equiv$K; l'area sottesa dalla f(x) è stata suddivisa in 12 strisce, che hanno per base i segmenti O-A, A-B, B-C,...,J-K; dal punto medio di questi segmenti è stata condotta la perpendicolare fino ad intersecare nei punti 1, 2, 3,...,11 la f(x). Tale segmento di perpendicolare è l'altezza di un rettangolo che ha per base Δx_i e che approssimerà tanto meglio l'area sottesa dal corrispondente tratto di f(x) quanto più questo sia approssimabile ad un segmento di retta.
Con riferimento alla prima striscia, di base O-A, il segmento rappresentativo della sua area si ottiene nel seguente modo: - scelto ad arbitrio il segmento OO'=d, detto distanza polare, si riporta il punto 1 sull'asse delle y e lo si congiunge con il punto O' ottenendo la proiettante 1;
- da O si conduce la parallela a questa proiettante fino ad incontrare in A' la perpendicolare per A (il secondo lato del rettangolo).
Il segmento AA' rappresenta, a scala d, l'area della prima striscia.
Infatti il triangolo rettangolo che ha OO'=d per base e la proiettante 1 come ipotenusa ha come altezza, h_1, la stessa altezza del primo rettangolo di cui si vuole l'area, ed è pure simile, per costruzione al triangolo rettangolo OAA',in cui è OA=Δx.
Vale allora la proporzionalità:

$$\frac{h_1}{d} = \frac{A'A}{\Delta x}$$

da cui:

$$h_1 \Delta x = I_1 = A'A \cdot d$$

Con analogo procedimento si opera sulla seconda striscia, riportando però questa volta la parallela alla sua proiettante a partire dal punto A' fino in B'; il segmento BB' è, ovviamente proporzionale all'area somma della prima e della seconda striscia.

Procedendo in tal modo, l'area totale, e quindi l'integrale cercato è dato, a scala d, dal segmento KK'.

I segmenti AA', BB', CC', ..., rappresentano il valore assunto dall'integrale quando è calcolato fra O ed il corrispondente punto dell'ascissa. Generalizzando, si conclude, allora, che ciascuna ordinata della curva integrale fornisce, a scala d, il valore dell'integrale (28) calcolato fra l'origine e la

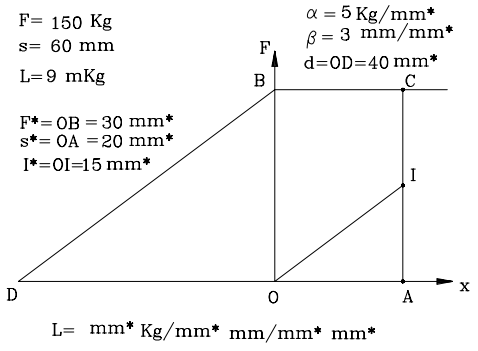


Figura 2

sua ascissa.
Osservando la fig.1, si può notare come la curva integrale è crescente fino al punto F', in quanto l'area sottesa fra O ed F è tutta positiva; poi decresce da F' ad I',in quanto si viene a sommare l'area sottesa fra F ed I che è negativa; è infine ancora crescente in quanto è positiva l'area da I a K.
Allorché le grandezze rappresentate in diagramma sono riportate a data scala, il valore dell'integrale, già calcolato come visto, va ancora moltiplicato sia per la scala delle ascisse che per quella delle ordinate.
In fig.2, è riportato, a titolo di esempio, il calcolo del lavoro di una forza, OB a scala α, supposta, per semplicità, costante, per uno spostamento OA, a scala β.
Le misure indicate con mm* si riferiscono a misure sul grafico, le altre alle misure reali. In termini dimensionali si avrà proprio:

$$[L] = \left[\overline{AI} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot d\right] = \left[mm^*\right] \cdot \left[\frac{Kg}{mm^*}\right] \cdot \left[\frac{mm}{mm^*}\right] \cdot \left[mm^*\right] = \left[Kg \cdot mm\right]$$

Capitolo XII

LE FORZE E L'EQUILIBRIO DEI SISTEMI

SOMMARIO

1 – Classificazione delle forze.
2- Spostamenti virtuali e lavoro virtuale.
3- Analisi dei vincoli in assenza di attrito.
4 – Equilibrio dei sistemi.
5 – Il principio dei lavori virtuali.

§ 1.- Classificazione delle forze.

Le forze che agiscono su una macchina, o sui singoli membri di essa, possono essere classificate in vario modo.

a) Forze interne e forze esterne.

Sono **forze esterne** (fig. 3) quelle che agiscono sul sistema dall'esterno, intendendo come "esterno" lo spazio non occupato dal sistema stesso (la macchina, il meccanismo, o un singolo membro di questa) di cui si vuol studiare il comportamento dinamico.

Possono essere forze agenti su un punto o anche forze distribuite; in tal caso, tuttavia, possono, generalmente, essere ricondotte ad un risultante applicato in un opportuno centro di riduzione e ad un momento risultante.

Si chiamano **forze interne** quelle che a ciascun membro della macchina sono applica-

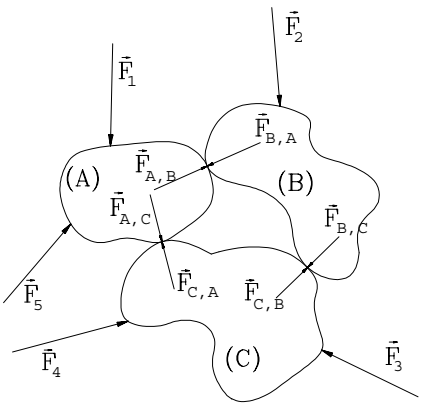


Figura 3

te da parte degli altri membri con cui esso è a contatto.

Ora, poiché un sistema di forze interne è costituito da coppie di vettori di braccio nullo, sarà sempre nullo sia il suo risultante sia il suo momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi.

Inoltre, mentre, come si è detto, il risultante di un sistema di forze interne è nullo, il **lavoro** complessivo **delle forze interne** è generalmente non nullo(*) e può essere, secondo i casi, negativo o positivo.

Sarà negativo, per esempio, quando si tratti del lavoro compiuto da forze dissipative (caso delle forze di attrito); ma sarà positivo quando si tratti del lavoro compiuto da forze capaci di generare moto.

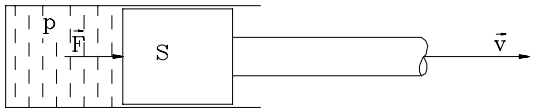


Figura 4

Se consideriamo, infatti, il vapore in fase di espansione all'interno di un cilindro (fig. 4), le forze di pressione agenti sullo stantuffo sono forze interne ed equivalgono al risultante F=pS agente come nello schema. Se lo stantuffo si sposta con velocità $\vec{v}$ il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ sarà dato da:

$$dL_1 = \vec{F} \times \vec{v} dt = pSvdt \qquad \textbf{(1)}$$

mentre il lavoro compiuto dalle forze applicate al vapore, ossia dalla $-\vec{F}$ e dalle forze interne allo stesso fluido, è dato da:

$$dL_2 = -pSvdt - \rho\, Sl\, dE = -pSvdt - m\, dE \qquad \textbf{(2)}$$

avendo indicato con ρ la massa specifica (densità) del fluido, con Sl il suo volume, e con dE la variazione di energia interna per unità di massa.

Poiché tale massa m è costante, derivando rispetto al tempo la sua espressione m=ρSl, avremo:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho}{dt} Sl + \rho S \frac{dl}{dt} = 0$$

da cui possiamo ricavare:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = -\frac{v}{l} \qquad \textbf{(3)}$$

La (2) può scriversi anche come:

(*) E' nullo solo il lavoro delle forze interne dei corpi rigidi, come ovvia conseguenza della ipotesi di rigidità.

$$dL_2 = -\rho\, Sl\left(\frac{pvdt}{\rho\ l} + dE\right) = -\rho\, Sldt\left(\frac{p}{\rho}\frac{v}{l} + \frac{dE}{dt}\right)$$

e quindi, sostituendovi la (3):

$$dL_2 = -\rho\, Sldt\left(-\frac{p}{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dE}{dt}\right) = -\rho\, Sl\left(\frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho + dE\right) \quad \textbf{(4)}$$

Tuttavia, per il primo principio della termodinamica, nell'ipotesi che l'espansione sia adiabatica (dQ=0), e trascurando la variazione di energia cinetica della massa fluida, dovrà essere d£ + dU = 0, e quindi nel nostro caso:

$$dL_2 = -\rho\, Sl\left(-\frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho + dE\right) = 0$$

La somma della (1) e della (2) si riduce quindi in definitiva a:

$$dL = dL_1 + dL_2 = pSvdt = dL_1 > 0$$

e ciò mostra che la somma dei lavori delle forze interne corrispondenti alle azioni mutue tra il membro fluido ed il membro rigido con cui esso si accoppia è positivo.

b) Forze attive e forze reattive.

Possono essere sia interne che esterne. Le **forze attive**, siano esse esterne oppure interne, sono generalmente funzioni note dei parametri da cui esse dipendono, mentre le **forze reattive**, che sono quelle che emanano dai vincoli, sono sempre incognite.

c) Forze motrici e forze resistenti.

Si chiamano **forze motrici** quelle forze che producono il moto ed il cui lavoro è sempre positivo, mentre si chiamano **forze resistenti** quelle che si oppongono al moto e che quindi compiono un lavoro negativo.

d) Forze d'inerzia.

Le **forze (azioni) d'inerzia** sono quelle forze che si manifestano tutte le volte che un rigido non si muove di moto traslatorio uniforme. Dipendono dalla massa e dalla accelerazione dei singoli punti del rigido stesso e, in generale, danno luogo ad un risultante $\vec{F}'$ e ad un momento risultante $\vec{M}'$ (delle forze d'inerzia).

Non si tratta di azioni effettivamente applicate al sistema ma sono forze che nascono dal moto del rigido e che vengono effettivamente trasmesse dal sistema ai suoi vincoli.

§ 2.- Spostamenti virtuali e lavoro virtuale.

Qualunque sia il tipo di forze cui è soggetta una macchina, un meccanismo, o un singolo membro di questo, la sua funzionalità è generalmente garantita dalla presenza dei vincoli che, come si è già detto, assolvono il compito della trasmissione delle forze fra i vari membri mobili, se interni, oppure, se esterni, ne garantiscono il collegamento al telaio.

Proprio per questa loro funzione è l'importante l'analisi delle loro proprietà fisiche con il fine ultimo di poter giungere alla determinazione delle forze che i singoli membri si scambiano fra loro e, più in generale, allo studio dell'equilibrio dell'intero sistema.

In tale ottica è di fondamentale importanza la nozione di *spostamento virtuale*; la sua determinazione non è univoca, ma dipende dall'essere il vincolo un vincolo fisso oppure un vincolo mobile (o dipendente dal tempo).

Lo spostamento virtuale di un punto del sistema, δP, è uno *spostamento infinitesimo e compatibile con i vincoli* cui è soggetto. Nel caso che il vincolo sia fisso esso coincide con uno spostamento effettivo del punto (moto assoluto), mentre se il vincolo è mobile lo spostamento virtuale ad un dato istante, t, è quello che si avrebbe se il vincolo fosse fisso in quel medesimo istante (moto relativo).

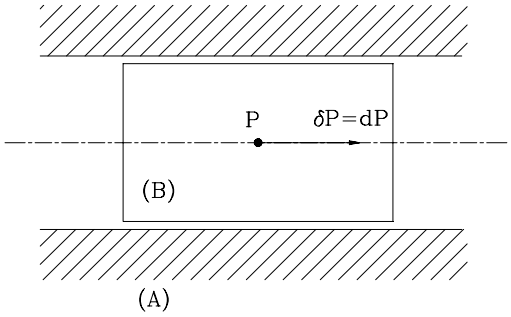


Figura 5

A sua volta uno spostamento virtuale può essere reversibile o irreversibile a seconda se la natura del vincolo consente, oppure no, lo spostamento virtuale di segno opposto.

Se prendiamo in considerazione, a titolo di esempio (fig.5), il caso dell'accoppiamento prismatico fra un corsoio (B) che può scorrere su una guida fissa (A), lo spostamento virtuale δP di un qualsiasi punto P di (B) è uno spostamento infinitesimo nel-

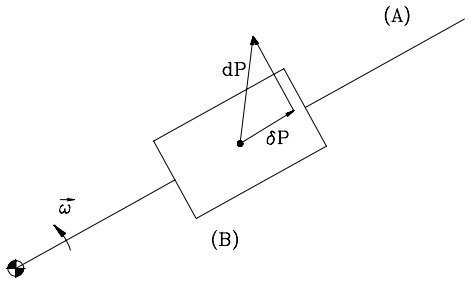


Figura 6

la direzione della tangente alla sua traiettoria (assoluta) nel punto occupato da P nell'istante considerato; e in questo caso lo spostamento virtuale corrisponde allo spostamento effettivo.
Se invece la guida (A) non è fissa (fig.6), tale corrispondenza non sussiste più: lo spostamento effettivo di P è quello lungo la tangente alla traiettoria assoluta, mentre lo spostamento virtuale δP è ancora quello lungo l'asse di (A).
Alla nozione di spostamento virtuale va associato il concetto di lavoro virtuale delle forze che agiscono sui punti di un sistema.
Se un sistema è soggetto alle forze $\mathbf{F}_i$ agenti sui suoi punti P_i, si dice *lavoro virtuale* di tali forze relativo ad un dato istante, t, ed ad un dato spostamento virtuale, δP, del sistema, il lavoro complessivo compiuto da quelle forze per effetto di quel dato δP. La corrispondente espressione sarà:

$$\delta L = \sum_i \left[\vec{F}_i(t) \times \delta P_i \right]$$

Secondo i casi, potrà interessare calcolare il lavoro virtuale delle sole forze attive o delle sole forze reattive.

§ 3.- Analisi dei vincoli in assenza di attrito.

Le reazioni vincolari che agiscono sui punti di un sistema soggetto a vincoli privi di attrito godono della proprietà che *il lavoro virtuale delle forze reattive, relativo ad ogni istante e ad ogni spostamento virtuale, è nullo se lo spostamento virtuale è reversibile, positivo o nullo se lo spostamento virtuale è irreversibile.*

Si consideri, infatti, come caso più generale, quello di due membri (A) e (B) a contatto in un punto P delle loro superfici coniugate; le forze che essi si scambiano in P, in assenza di attrito, hanno in ogni caso la direzione della normale comune nel contatto.
Lo spostamento virtuale δP, sarà invece sul piano tangente comune in P se tale spostamento (fig. 7) è reversibile (spostamenti possibili solo su rette del piano tangente comune),

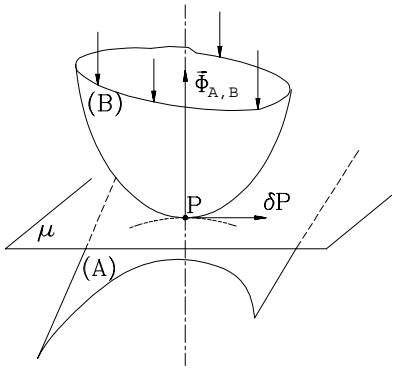


Figura 7

mentre se tale spostamento (fig. 8) è irreversibile (spostamenti possibili in una qualsiasi direzione ma in un solo verso) il δP avrà una direzione qualsiasi, ma potrà sempre essere scomposto in un componente giacente sul piano tangente, δu, ed in un componente ad esso normale δv.

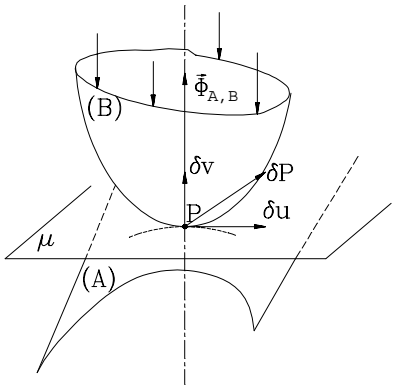


Figura 8

Ora, nel primo caso, forza e spostamento virtuale sono sicuramente ortogonali, per cui se indichiamo con $\vec{\Phi}_{AB}$ la forza (reattiva) che (A) esercita su (B) nel punto P, e con δP lo spostamento virtuale di $P_{(B)}$, sarà:

$$\delta L = \vec{\Phi}_{A,B} \times \delta\vec{P} = 0$$

Nel secondo caso, invece, si dovrà scrivere:

$$\delta L = \vec{\Phi}_{A,B} \times \delta\vec{P} = \vec{\Phi}_{A,B} \times \delta\vec{u} + \vec{\Phi}_{A,B} \times \delta\vec{v} \geq 0$$

e questo lavoro sarà nullo se δv=0, mentre sarà positivo se δv≠0, ossia se lo spostamento è tale da mantenere il contatto oppure no.

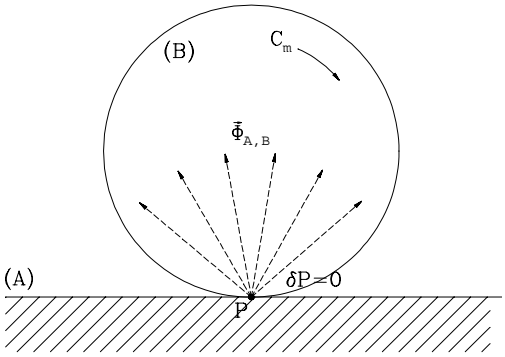


Figura 9

Particolare è il caso che si presenta se i due membri (A) e (B) sono in contatto di puro rotolamento. Poiché il contatto di puro rotolamento è garantito proprio da forze di attrito, non è più lecito affermare che le forze che essi si scambiano hanno la direzione della normale al contatto e quindi la direzione della $\mathbf{\Phi}_{A,B}$ può essere qualsiasi. Sarà invece nullo lo spostamento virtuale δP dal momento che il moto di (B) rispetto ad (A) avviene proprio intorno al punto P.
Si può concludere, allora, che anche in questo caso sarà:

$$\delta L = \vec{\Phi}_{A,B} \times \delta\vec{P} = 0$$

Con tali premesse, possiamo ora cercare le condizioni cui debbono soddisfare, in assenza di attrito, il risultante ed il momento risultante delle

forze reattive nelle coppie cinematiche, laddove il contatto fra i due membri (A) e (B) è un contatto di combaciamento.
Cominciamo con l'osservare che per lo spostamento virtuale di un qualsiasi punto di (B) si può scrivere:

$$\delta P_i = \vec{v}_{P_i}\delta t = \delta A + \vec{\omega}\delta t \wedge (P_i - A)$$

ossia:

$$\delta\, P_i = \delta A + \delta\vartheta \wedge (P_i - A)$$

essendo A un qualsiasi punto di (B) ed avendo indicato con $\delta\vartheta$ la *rotazione virtuale* di (B).
Allora, il lavoro virtuale di tutte forze reattive, $\vec{\Phi}_i$, che (A) esercita su (B), e che deve essere nullo, si potrà scrivere come:

$$\delta L = \sum_i \vec{\Phi}_i \times \delta P_i = \sum_i \vec{\Phi}_i \times \delta A + \sum_i (P_i - A) \wedge \vec{\Phi}_i \times \delta\vartheta = 0$$

Ma allora, indicando con:

$$\vec{\Phi} = \sum_i \vec{\Phi}_i;$$

$$\vec{M}_A^{(\Phi)} = \sum_i (P_i - A) \wedge \vec{\Phi}_i;$$

il risultante ed il momento risultante di tali forze reattive, l'espressione del lavoro virtuale si può scrivere come:

$$\delta L = \vec{\Phi} \times \delta A + \vec{M}_A^{(\Phi)} \times \delta\vartheta = 0 \quad \textbf{(5)}$$

e tale lavoro deve essere nullo essendo il vincolo privo di attrito.

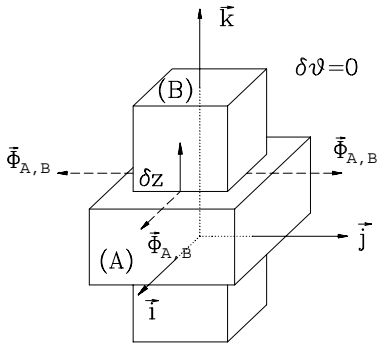


Figura 10

Pertanto se la coppia cinematica è una **coppia prismatica** (fig. 10), di cui sia $\vec{k}$ il versore dell'asse, si avrà $\delta\vec{A} = \delta z\vec{k}$ e δϑ=0, e quindi la (5) diventa:

$$\delta L = \vec{\Phi} \times \delta\vec{A} = \vec{\Phi} \times \vec{k}\,\delta z = 0$$

Dovendo ciò essere vero per qualsiasi valore di δz, dovrà essere necessariamente:

$$\vec{\Phi} \times \vec{k} = 0$$

il che implica che il risultante non può avere componenti lungo l'asse della coppia; in altre parole *la coppia prismatica può reagire solo con una forza perpendicolare al suo asse e*, giacché nessuna limitazione emerge per il

momento risultante, *con un momento di direzione qualsiasi*.
Se poi la coppia prismatica collega due membri in moto piano (fig. 11), il risultante dovrà giacere sul piano del moto ed il momento risultante dovrà essere a questo perpendicolare.

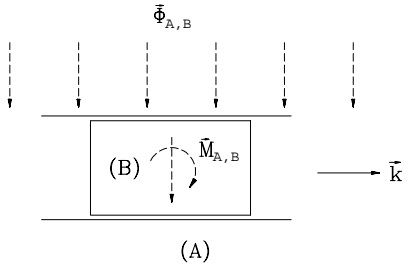


Figura 11

La retta di applicazione del risultante può anche non tagliare "fisicamente" la coppia, e quando ciò accade essa può ancora essere spostata di una quantità arbitraria aggiungendo il corrispondente momento di trasporto.

Se invece la coppia cinematica è una **coppia rotoidale** (fig. 12) di cui sia $\vec{k}$ il versore dell'asse ed A un punto dell'asse stesso, si avrà δA=0 e $\delta\vec{\vartheta} = \delta\vartheta\vec{k}$, e quindi la (5) diventa:

$$\delta L = \vec{M}_A^{(\Phi)} \times \vec{k}\,\delta\vartheta = 0$$

Dovendo ciò essere vero per qualsiasi valore di δϑ, dovrà essere necessariamente:

$$\vec{M}_A^{(\Phi)} \times \vec{k} = 0$$

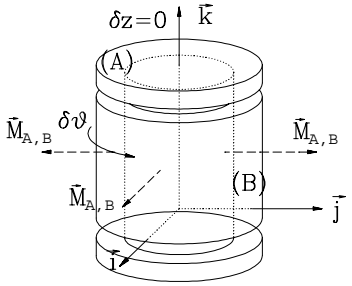


Figura 12

il che implica che il momento risultante non può avere componenti con asse momento diretto secondo l'asse della coppia; in altre parole *la coppia rotoidale può reagire solo con un momento perpendicolare al suo asse e*, giacché nessuna limitazione emerge per il risultante, *con una forza avente direzione qualsiasi*.
Se poi la coppia rotoidale collega due membri in moto piano (fig. 13), il risultante dovrà giacere sul piano del moto ed il momento risultante non potrà essere perpendicolare a questo ma giacere anch'esso sul piano del moto.

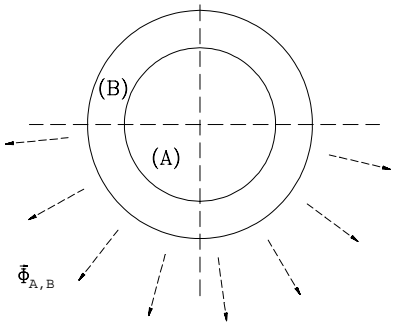


Figura 13

La retta di applicazione del risultante passerà quindi necessariamente per il centro della coppia ed avrà una direzione qualsiasi.

§ 4.- Equilibrio dei sistemi.

Un sistema materiale su cui agisca un sistema di forze qualsiasi si dice in equilibrio quando, avendolo supposto in quiete in un dato istante, esso, per effetto di quelle forze, rimane in quiete anche negli istanti successivi: quel sistema di forze, cioè, non è in grado di provocare alcun moto del sistema su cui agisce.

Se il sistema materiale in questione è in equilibrio, e presenta anche dei punti vincolati, è lecito sostituire ai vincoli, nei punti in cui essi agiscono, le corrispondenti reazioni: in tal modo infatti, non risulta alterato il sistema delle forze agenti su di esso; il sistema, quindi, rimarrà ancora in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze di cui alcune saranno forze esterne e le altre forze interne.

Poiché il sistema è in equilibrio deve essere globalmente nullo l'effetto di tutte le forze agenti su di esso e quindi, in ogni punto P_i deve essere nullo il risultante ed il momento risultante delle forze che agiscono su di esso.

Dovrà cioè essere, distinguendo fra forze esterne e forze interne:

$$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} = 0$$

e per tutto il sistema:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \vec{F}_i^{(i)} = 0$$

Ma il sistema delle forze interne agenti in un sistema è vettorialmente equivalente a zero e tale allora dovrà pure essere il sistema delle forze esterne. Se ne può concludere che: *Se un sistema materiale qualsiasi, su cui agiscono delle forze, è in equilibrio, il sistema di vettori applicati che rappresentano le forze esterne (attive e reattive) agenti sul sistema è equivalente a zero.*

Questa condizione di equilibrio si traduce nelle due equazioni vettoriali:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(a)} + \vec{R}^{(v)} = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}^{(a)} + \vec{M}^{(v)} = 0$$

essendo $\vec{R}$ il risultante delle forze esterne (attive e reattive) ed $\vec{M}_O$ il momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo O.

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni cardinali dell'equilibrio**

statico e sono valide per ogni possibile sistema materiale preso nel suo complesso e contemporaneamente per una parte di esso.

Tutte le volte che si studia l'equilibrio di una parte di un sistema, le forze interne possono essere trattate come forze esterne. Infatti, si può sempre isolare il membro che interessa e sostituire nei punti che erano di contatto con la parte restante del sistema le forze che quest'ultima esercitava su di esso.

Le equazioni cardinali, tuttavia, rappresentano *condizione necessaria ma non sufficiente* per l'equilibrio di un sistema, dovendosi sempre verificare che l'equilibrio sussista anche per ogni sua parte (o punto).

Per stabilire le condizioni di equilibrio di un sistema qualsiasi per mezzo delle equazioni cardinali è sufficiente, in teoria, immaginare di sostituire in corrispondenza ad ogni vincolo la corrispondente reazione e imporre che siano contemporaneamente nulli risultante e momento risultante delle forze attive (note) e reattive (incognite) ad esso applicate.
Ciò, tuttavia, non è generalmente sufficiente a risolvere il problema in quanto, quasi sempre, il numero delle incognite da determinare è superiore al numero delle equazioni che si possono scrivere.
In taluni casi il problema si può semplificare imponendo l'equilibrio dei singoli membri che costituiscono il sistema dato, e introducendo quindi le reazioni corrispondenti ai vincoli interni dello stesso: in virtù del principio di azione e reazione queste incognite potranno poi essere eliminate.
Il procedimento sarà comunque tanto più laborioso quanto più alto è il numero di reazioni interne da eliminare; fortunatamente l'uso delle equazioni cardinali non rappresenta l'unica via per la risoluzione del problema dell'equilibrio: nel caso in cui si abbiano vincoli privi di attrito soccorre egregiamente il *principio dei lavori virtuali* che consente in ogni caso l'eliminazione automatica delle reazioni.

Per il caso generale, occorre osservare che, se il sistema è isostatico, ossia se il numero delle incognite da determinare è pari al numero delle equazioni indipendenti che si possono scrivere per rappresentarne l'equilibrio, la determinazione delle condizioni di equilibrio si può ancora ottenere dalla applicazione delle equazioni cardinali, [ossia imponendo che sia nulla la somma di tutte le forze applicate al sistema $\left(\sum \vec{F} = 0\right)$ e che contemporaneamente sia nullo il loro momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi $\left(\sum \vec{M}_O = 0\right)$].
Se invece il sistema è iperstatico, ossia se il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni, occorrerà ricorrere alla teoria della elasticità.

In altri casi, è la teoria dell'usura, usura delle superfici in contatto provocata dalla presenza dell'attrito, l'elemento essenziale per il calcolo delle forze reattive.

§ 5.- Il Principio dei lavori virtuali.

Condizione necessaria e sufficiente, affinché una configurazione di un sistema, soggetto ***a vincoli privi di attrito o di puro rotolamento e indipendenti dal tempo****, sia di equilibrio, è che, per ogni spostamento virtuale che lo allontani da quella configurazione, non sia positivo il lavoro (virtuale) delle forze attive agenti su di esso*.
Ossia:

$$\delta L^{(a)} \leq 0$$

Sarà uguale a zero quando lo spostamento virtuale è reversibile, minore di zero quando esso è irreversibile.

Che tale condizione sia necessaria si deduce considerando che se un sistema è in equilibrio le accelerazioni di tutti i suoi punti P_i devono essere nulle per cui deve essere, per il postulato di Galilei, $\vec{F}'_i = 0$; ciò vuol dire, di conseguenza, che dovrà essere nullo il risultante di tutte le forze (attive e reattive) agenti su ogni singolo punto, ossia deve essere:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{\Phi}_i = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Il lavoro complessivo compiuto da tutte le forze in conseguenza dello spostamento virtuale δP_i sarà allora:

$$\delta L = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta P_i + \sum_i \vec{\Phi}_i \times \delta P_i = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Ma in questa somma, il secondo termine è certamente (v. § 3) positivo o nullo, quindi il primo dovrà necessariamente essere negativo o nullo:

$$\delta L^{(a)} = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta P_i \leq 0$$

Che sia anche sufficiente si deduce tenendo presente, anzitutto, che, se i vincoli del sistema sono indipendenti dal tempo, qualunque spostamento effettivo è anche spostamento virtuale; allora, se il sistema abbandonasse la sua configurazione di equilibrio ($a_i>0$), almeno per un punto la (6) non sarebbe più uguale a zero ma sarebbe maggiore di zero e pertanto sarebbe maggiore di zero anche la (7).
Ma in quest'ultima il secondo addendo, avendo fatta l'ipotesi che i vincoli siano privi di attrito, è certamente nullo; quindi è il primo addendo ad essere maggiore di zero, e questo è contrario all'ipotesi.

L'utilità del principio dei lavori virtuali nella risoluzione dei problemi di equilibrio sta proprio nel fatto che esso esprime una condizione che non coinvolge le forze reattive agenti sul sistema; si presta quindi egregiamente in tutti i casi in cui (in assenza di attrito) si abbia necessità di determinare il valore che debba avere una componente di una forza attiva affinché il sistema in esame sia in equilibrio in una data configurazione.

Più in generale, consideriamo anche che, poiché le posizioni dei punti P_i di un sistema possono, in generale, essere espresse in funzione delle coordinate lagrangiane q_r, lo spostamento virtuale del generico punto potrà essere scritto come:

$$\delta P_i = \sum_r \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \delta q_r$$

e quindi il lavoro virtuale complessivo delle forze attive sarà, se i vincoli sono tutti bilaterali e se il sistema è in equilibrio:

$$\delta L^{(a)} = \sum_r \left(\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \right) \delta \vec{q}_r = 0$$

Ne discende un set di r equazioni del tipo:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \delta \vec{q}_r = Q_r^{(a)} \delta \vec{q}_r = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

i cui primi membri sono in generale funzioni delle q_r e delle $\dot{q}_r$, ma vanno calcolati per $\dot{q}_r = 0$ dal momento che, in condizioni di equilibrio non si possono avere velocità diverse da zero.

Le (8) vengono dette *equazioni di Lagrange*: le configurazioni di equilibrio del sistema sono quindi solamente quelle che corrispondono agli r valori delle coordinate lagrangiane che soddisfano le (8).

Ciascun coefficiente $Q^{(a)}$ prende anche il nome di *componente lagrangiana della forza attiva*.

Infine, se le forze attive ammettono potenziale, (v. XI § 7) si avrà:

$$\delta L^{(a)} = \sum_r \left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial P_i} \times \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \right) \delta \vec{q}_r = \sum_r \frac{\partial U}{\partial q_r} \delta \vec{q}_r = 0$$

e quindi se ne ricava che dovranno essere verificate r condizioni della forma:

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$$

CAPITOLO XIII

LE FORZE VINCOLARI IN PRESENZA DI ATTRITO

SOMMARIO

1 - Contatti puntiformi o lineari, con attrito asciutto.
2 - Applicazione alle coppie rigide superiori.
3 - Coppie rotoidali.
4 - Contatti di rotolamento.
5 - Reazioni vincolari con attrito radente e volvente.

Le forze che si scambiano le superfici coniugate di una coppia cinematica dipendono dalla natura dei membri accoppiati, ossia dall'essere essi rigidi, deformabili, fluidi ecc.; dalla natura e dall'estensione del contatto (strisciamento, rotolamento; puntiforme, lineare, superficiale); dallo stato delle superfici (lisce o rugose); dalla forma dell'attrito (asciutto, lubrificato).

§ 1.- Contatti puntiformi o lineari con attrito asciutto.

Consideriamo (fig.14) due membri qualsiasi (A) e (B) che presentino fra loro un contatto puntiforme in P; siano $\left(\vec{v}_P\right)_A$ e $\left(\vec{v}_P\right)_B$ le velocità assolute del punto P considerato appartenente rispettivamente al membro (A) ed al membro (B).

Nel punto di contatto P, si avrà la forza $\vec{F}_{AB}$ che il membro (A) esercita sul membro (B) e la forza $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ che il membro (B) esercita sul membro (A).

Si è già visto che *in assenza di attrito* il lavoro delle forze che i due membri si scambiano deve essere nullo. Pertanto in tali condizioni sarà:

$$dL = \left[\vec{F}_{AB} \times \left(\vec{v}_P\right)_B + \vec{F}_{BA} \times \left(\vec{v}_P\right)_A\right] dt = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Se ne deduce, allora, che deve necessariamente essere:

$$\vec{F}_{AB} \times \left(\vec{v}_P\right)_B - \vec{F}_{AB} \times \left(\vec{v}_P\right)_A = \vec{F}_{AB} \times \left[\left(\vec{v}_P\right)_B - \left(\vec{v}_P\right)_A\right] = 0$$

ossia

$$\vec{F}_{AB} \times \left[\vec{v}_P^{(r)}\right]_{B,A} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Ciò vuol dire che la forza $\vec{F}_{AB}$ è ortogonale al vettore $\left[\vec{v}_P^{(r)}\right]_{B,A}$, e quindi ortogonale al piano tangente comune di contatto μ; sarà, allora, $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_n$, diretta, cioè, secondo la normale comune di contatto.

In assenza di attrito, quindi, la forza che il membro (A) esercita sul membro (B), è ortogonale al vettore velocità nel moto relativo di (B) rispetto ad (A).

In presenza di attrito, invece, trattandosi di un fenomeno che avviene con dissipazione di energia, il lavoro espresso dalla (1) è certamente negativo perciò si dovrà scrivere:

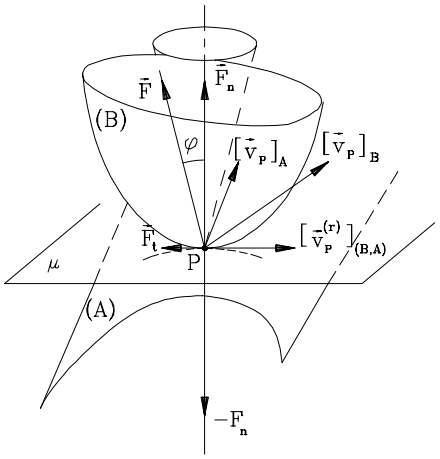


Figura 14

$$\vec{F}_{AB} \times \left(\vec{v}_P\right)_{B,A}^{(r)} < 0$$

Pertanto la $\vec{F}_{AB}$ non sarà più diretta secondo la normale, ma potrà assumere tutte le possibili direzioni interne ad un cono di vertice P (**cono di attrito**); la sua direzione pertanto è, a priori, indeterminata.

Tuttavia, quando il moto relativo di strisciamento si è instaurato, e quindi si è in presenza di una effettiva velocità relativa, la $\vec{F}_{AB}$ è diretta secondo una delle generatrici del cono di attrito ed in particolare secondo la generatrice appartenente al piano perpendicolare al piano tangente comune nel contatto che contiene anche il vettore $\vec{v}_P^{(r)}$.

L'angolo fra la $\vec{F}_{AB}$ e la $\vec{v}_P^{(r)}$ è un angolo ottuso; l'angolo che la $\vec{F}_{AB}$ forma con il versore $\vec{n}$ della normale al contatto è l'**angolo di attrito**, φ.

Se l'angolo φ è indipendente dalla direzione della $\vec{v}_P^{(r)}$, il cono di attrito è rotondo ed ha per asse la retta per P di versore $\vec{n}$.

Da quanto sopra si può concludere che la forza $\vec{F}_{AB}$ che il membro (A) esercita in P sul membro (B) può essere scomposta nelle due componenti, normale e tangenziale:

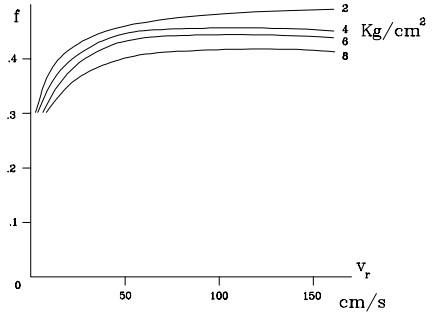


Figura 15

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{AB}\cos\varphi \qquad \vec{F}_t = \vec{F}_{AB}\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

il cui legame risulta quindi:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_n \tan\varphi = f\vec{F}_n \qquad \textbf{(4)}$$

In conclusione, in caso di moto incipiente e in coerenza con quanto visto a proposito del cono di attrito, sarà $\vec{F}_t < f\vec{F}_n$, mentre quando si hanno condizioni di strisciamento effettivo sarà $\vec{F}_t = f\vec{F}_n$.

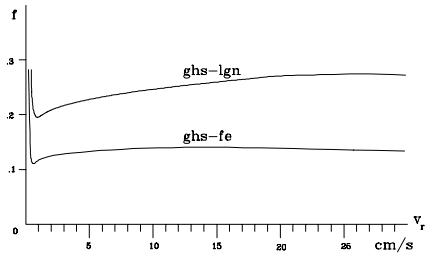


Figura 16

Il coefficiente $f = \tan\varphi$ prende il nome di **coefficiente di attrito** (cinetico), e soddisfa alle leggi di Coulomb e Morin sull'attrito asciutto.

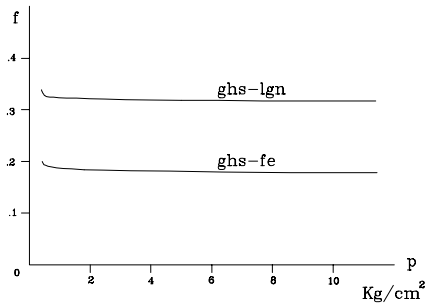


Figura 17

In virtù di tali leggi, che sono leggi sperimentali, il coefficiente di attrito *f* dipende dallo stato delle superfici a contatto, e dalla natura dei materiali; non dipende dalla forma e dall'estensione del contatto, né, almeno in prima approssimazione, dalla velocità relativa o dalla forza normale.

In realtà, circa la dipendenza di f dalla velocità relativa, si può ammettere una legge del tipo $f=f_o(v_r/v_{ro})^m$. I grafici di fig.15 e 16 mostrano la variazione di *f* al variare della velocità relativa e della pressione; si vede che le

maggiori variazioni si hanno in corrispondenza di valori molto bassi della v_r e ciò giustifica l'esistenza di un coefficiente di attrito di primo distacco (statico) > *f*. Inoltre gli stessi grafici mostrano come f si mantiene praticamente costante anche al variare della pressione di contatto p=p(F_n).
In fig. 17 si può osservare la variazione di *f* al variare della velocità relativa e della pressione di contatto per un accoppiamento ghisa-cuoio

Tornando ora all'espressione del lavoro, (1), riscritta tenendo conto della presenza dell'attrito, si ha:

$$dL_p = \left|\vec{F}_{AB} \times \left(\vec{v}_P\right)_{B,A}^{(r)}\right| dt = F_t v_P^{(r)} dt = f F_n v_P^{(r)} dt < 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Vediamo, allora, che la somma dei lavori compiuti, nel tempo dt, dalle forze che si scambiano due membri a contatto in un punto P, quando il contatto è di strisciamento, è uguale al lavoro prodotto dalla $\vec{F}_t$ applicata ad un membro della coppia, per effetto della velocità nel moto relativo del membro cui la $\vec{F}_t$ è applicata rispetto al membro da cui essa emana.

Nel caso esaminato la $\vec{F}_t$ è applicata al membro (B) da parte del membro (A), e la velocità è quella del moto relativo di (B) rispetto ad (A).

§ 2 - Applicazione alle coppie rigide superiori.

A)
Consideriamo (fig.18) un **imbocco dentato** fra la coppia di ruote (A) e (B) cilindriche a denti diritti, e supponiamo che due denti siano in presa, in *fase di accesso*, essendo M, all'istante considerato, il punto di contatto fra i profili.

In assenza di attrito il dente di (A) eserciterebbe sul dente di (B) la forza $\vec{F}_n$ diretta lungo la normale al contatto, ossia lungo la retta g. In presenza di attrito, invece i denti si scambieranno una forza $\vec{F}$ la cui direzione dovrà essere sbiecata dell'angolo φ rispetto alla normale.

Per definire la $\vec{F}$ [di (A) su (B)] in modo corretto occorre determi-

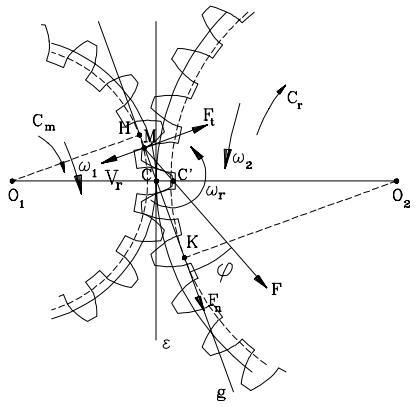


Figura 18

nare innanzitutto direzione e verso della velocità di M nel moto relativo della (B) rispetto alla (A); questa sarà data da:

$$\left(\vec{v}_M^{(r)}\right)_{BA} = \left(\vec{\omega}^{(r)}\right)_{BA} \wedge (M - C) \;\; \therefore \;\; v_M^{(r)} = (\omega_2 + \omega_1) CM$$

e sarà diretta come in figura.

La $\vec{F}_t$, di conseguenza, dovendo avere il verso opposto alla $\vec{v}_M^{(r)}$, farà sì che la forza risultante $\vec{F}$ risulti ruotata, rispetto alla normale, g, dell'angolo φ e in modo tale che la sua retta di applicazione, r, interseca la retta dei centri in un punto C_1' spostato verso il centro, O_2, della ruota condotta.

Risultano minori, di conseguenza, sia il braccio della $\vec{F}$ rispetto ad O_2 $(O_2E < r_2 \cos\vartheta)$, sia il braccio della $-\vec{F}$ rispetto ad O_1 $(O_1A < r_1 \cos\vartheta)$: la coppia motrice necessaria ad equilibrare la C_r sarà certamente diversa, quindi, per effetto dell'attrito.

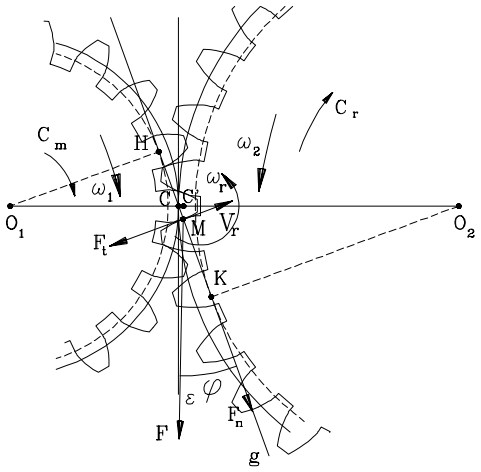


Figura 19

In fase di recesso, (fig.19), nella quale il punto M si trova al di sotto della retta dei centri, la velocità relativa in M, $\vec{v}_M^{(r)}$, ha verso opposto e quindi la $\vec{F}$ sarà sbiecata ancora dell'angolo φ ma dalla opposta rispetto alla retta g. L'intersezione della sua retta d'applicazione sarà tuttavia ancora in un punto C' spostato rispetto a C verso il centro O_2.

Per quanto riguarda i bracci della $\vec{F}$ rispetto alle coppie rotoidali O_1 ed O_2, si avrà invece rispettivamente $O_2E > r_2 \cos\vartheta$ e $O_1A > r_1 \cos\vartheta$: di nuovo la coppia motrice necessaria ad equilibrare la C_r sarà certamente diversa per effetto dell'attrito, e cioè di nuovo, rispetto al caso senza attrito, minore il primo e maggiore il secondo; anche qui, quindi , il rapporto C_m/C_r risulta maggiore che non nel caso di assenza di attrito.

La potenza perduta per attrito si può ricavare dalla (5) ed è:

$$\frac{dL_p}{dt} = -F_t v_P^{(r)} = -f F_n v_P^{(r)} = -f F_n (\omega_2 + \omega_1) \overline{CM} \qquad \textbf{(6)}$$

Si capisce da qui come è conveniente dal punto di vista delle perdite man-

tenere piccola la lunghezza dell'arco d'azione, in modo che sia piccolo il valore massimo di CM.
Indicativamente il rendimento di un imbocco dentato di questo tipo, per ruote di media qualità di lavorazione è η=0.8./.0.85 che può arrivare anche a η=0.95 in caso di lubrificazione dell'imbocco.

B)

Consideriamo ora l'imbocco vite senza fine-ruota a denti elicoidali, (fig. 20) nella ipotesi ovvia che sia motrice la vite e cerchiamo le azioni sulla ruota a denti elicoidali utilizzando come riferimento un sistema di assi, come in figura, nel piano principale.
Ipotizzando che il contatto avvenga proprio nel punto C, calcoliamo, anzitutto, la velocità di C nel moto relativo della ruota (B) rispetto alla vite (A).
La velocità assoluta di C, considerato appartenente a (B) sarà:

$$(\vec{v}_C)_B = \omega_2 R\vec{k}$$

mentre, considerato appartenente ad (A), avrà come velocità assoluta:

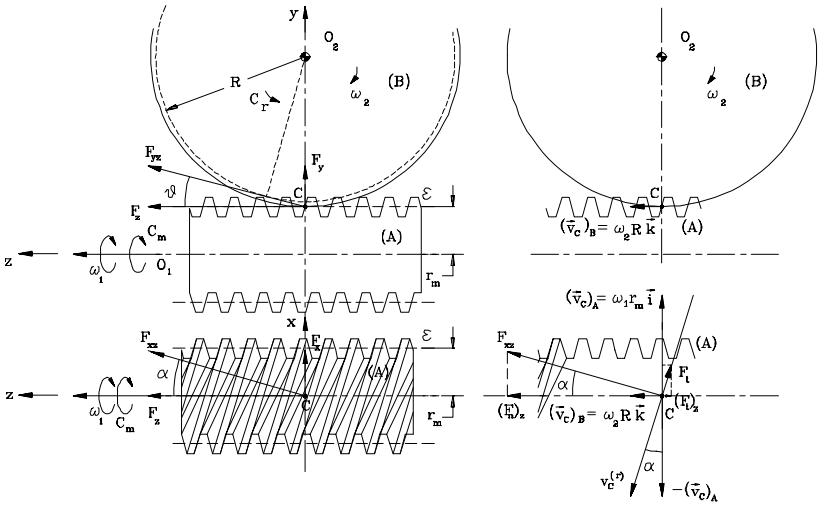


Figura 20

$$(\vec{v}_C)_A = \omega_1 r_m \vec{i}$$

Nel moto relativo predetto sarà allora:

$$\vec{v}_C^{(r)} = (\vec{v}_C)_B - (\vec{v}_C)_A = \omega_2 R\vec{k} - \omega_1 r_m \vec{i}$$

Si deduce immediatamente che, essendo $\vec{v}_C^{(r)} \times \vec{j} = 0$, il vettore velocità relativa giace nel piano y=cost, ossia in un piano parallelo al piano xz.
Se così è, anche la $\vec{F}_t$ deve stare in tale piano e dovrà pure essere tangente in C all'elica media della vite.
Infatti, l'angolo α^*, formato dal vettore $\vec{v}_C^{(r)}$ con l'asse delle x, vale:

$$\tan\alpha^* = \frac{\left|\vec{v}_C^{(r)}\right|_z}{\left|\vec{v}_C^{(r)}\right|_x} = \frac{\omega_2 R}{\omega_1 r_m} = \tau \frac{R}{r_m}$$

e se in questa sostituiamo il raggio della primitiva della ruota che, come già trovato, vale:

$$R = \frac{z_1 p_a}{2\pi}\frac{1}{\tau} = \frac{p_e}{2\pi}\frac{1}{\tau}$$

troviamo:

$$\tan\alpha^* = \frac{\tau}{r_m}\frac{p_e}{2\pi}\frac{1}{\tau} = \frac{p_e}{2\pi r_m} = \tan\alpha$$

e quindi che è $\alpha^* = \alpha$, angolo di inclinazione dell'elica media.
La forza normale, che la vite (A) esercita sulla ruota (B) in corrispondenza del punto di contatto C, sarà data in virtù delle (170) e (171) del cap. X, da:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{C_m}{r_m}\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\theta} = \\ &= F_z\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\theta} \end{aligned}$$

ciò vuol dire che la sua componente lungo la direzione dell'asse della vite può essere scritta anche come:

$$F_z = F_n\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\theta}} = F_n\cos\beta$$

facendo così comparire, in modo esplicito, l'angolo, β, che la normale al contatto forma rispetto al medesimo asse.

Complessivamente, allora, lungo la direzione dell'asse z avremo due componenti di forze al contatto, la componente della $\vec{F}_t$ e la componente della $\vec{F}_n$, ossia:

$$\begin{aligned} (F_t)_z &= F_t\sin\alpha = f\,F_n\sin\alpha \\ (F_n)_z &= F_n\cos\beta \end{aligned}$$

Solo queste due componenti possono partecipare all'equilibrio alla rotazione della ruota (B) intorno alla cerniera O_2; dovrà essere quindi:

$$C_r + (F_t)_z R - (F_n)_z R = 0 \quad \therefore \quad C_r = R\left[(F_n)_z - (F_t)_z\right]$$

e quindi:

$$C_r = R\left(F_n \cos\beta - F_n \sin\alpha\right) = F_n R\left(\cos\beta - f \sin\alpha\right)$$

da cui, tenendo conto che è:

$$R = r_m \tan\alpha \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

si ricava:

$$F_n = \frac{C_r}{R\left(\cos\beta - f \sin\alpha\right)} = \frac{\tau}{r_m \tan\alpha} \frac{C_r}{\left(\cos\beta - f \sin\alpha\right)} \qquad \textbf{(7)}$$

D'altra parte l'equazione dei lavori nell'unità di tempo di tutte le forze applicate al sistema durante il funzionamento a regime ci permette ancora di scrivere:

$$C_m \omega_1 - C_r \omega_2 - F_t v_C^{(r)} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

in cui la velocità $v_C^{(r)}$ può essere espressa come:

$$v_C^{(r)} = \frac{\left(v_C\right)_A}{\cos\alpha} = \frac{\omega_1 r_m}{\cos\alpha} = \frac{r_m}{\tau \cos\alpha} \omega_2$$

Pertanto la (8) diventa:

$$C_m \omega_1 = C_r \omega_2 + f F_n \frac{r_m}{\tau \cos\alpha} \omega_2$$

e sostituendovi l'espressione (7) della F_n:

$$C_m \omega_1 = C_r \omega_2 + f \frac{r_m}{\tau \cos\alpha} \frac{\tau}{r_m \tan\alpha} \frac{C_r \omega_2}{\left(\cos\beta - f \operatorname{sen}\alpha\right)} =$$

$$= C_r \omega_2 + f \frac{C_r \omega_2}{\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\beta - f \operatorname{sen}\alpha\right)} =$$

$$= C_r \omega_2 \left[1 + \frac{f}{\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\beta - f \operatorname{sen}\alpha\right)}\right]$$

Ricaveremo quindi:

$$\frac{1}{\eta}=\frac{C_m\omega_1}{C_r\omega_2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+f-f\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-f\operatorname{sen}^2\alpha}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+f\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-f\operatorname{sen}^2\alpha}$$

e quindi, invertendo e dividendo per (cosα cosβ):

$$\eta=\frac{\tan\alpha-f\tan^2\alpha\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}{\tan\alpha+f\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha\left(1-\tan\alpha f\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)}{\tan\alpha+f\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}} \qquad \textbf{(9)}$$

Se ora si pone come coefficiente virtuale di attrito:

$$f^*=f\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=f\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\vartheta} \qquad \textbf{(10)}$$

la (9) si può scrivere come:

$$\eta=\frac{\tan\alpha\left(1-f^*\tan\alpha\right)}{\tan\alpha+f^*}=\frac{\tan\alpha\left(1-\tan\varphi^*\tan\alpha\right)}{\tan\alpha+\tan\varphi^*}$$

ottenendo infine l'espressione del rendimento dell'imbocco e cioè:

$$\eta=\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\varphi^*\right)} \qquad \textbf{(11)}$$

dove φ^* rappresenta l'angolo virtuale d'attrito corrispondente alla (10).
La (11) risulta, quindi, dipendente, oltre che, ovviamente, dal coefficiente di attrito, solamente dalla geometria dell'imbocco. Infatti vi compare l'angolo di inclinazione dell'elica media della vite, α, e, attraverso il coefficiente di attrito virtuale, l'angolo di inclinazione del suo filetto, ϑ, nel piano principale.
Si noti che è proprio il valore di quest'ultimo a determinare lo scostamento di f* da f: se la vite fosse a filetto rettangolare (ϑ=0) si avrebbe $\cos\beta=\cos\alpha$ e quindi f*=f. In questo caso il rendimento (11) avrebbe la stessa espressione che si otterrebbe per il piano inclinato.

§ 3 . - Coppie rotoidali.

Una coppia rotoidale, tipicamente un accoppiamento perno-cuscinetto (fig. 21), rappresenta il caso caratteristico in cui la configurazione del sistema, da sola, non è sufficiente a definire la posizione del punto di contatto fra i membri della coppia, e di conseguenza nemmeno il punto di applicazione delle forze che si scambiano i membri collegati.

Saranno condizioni di equilibrio dinamico, in tal caso, a risolvere il problema.

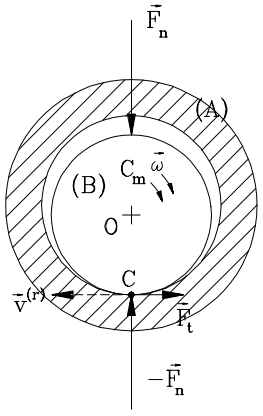


Figura 21

Consideriamo i due membri (A) e (B) collegati dalla coppia rotoidale di fig. 21, in cui il perno (B) è sottoposto all'azione di un carico normale $\vec{F}_n$. A causa dell'inevitabile giuoco fra i due elementi della coppia, si potrebbe pensare che il contatto si instauri nel punto C appartenente alla retta di applicazione della $\vec{F}_n$, punto in cui il cuscinetto (A) reagirebbe con una $-\vec{F}_n$. Questa situazione, vera nel caso statico, non può più reggere allorquando si pensi che il perno ruoti all'interno del cuscinetto con una certa velocità angolare ω: si avrebbe infatti in C una velocità dovuta al moto relativo fra i due membri, così come indicato in figura, e ad essa dovrebbe corrispondere, agente su (B), una $\vec{F}_t$ di verso opposto e pari ad $f\mathrm{F_n}$. Occorrerà certamente una coppia C_m sufficiente ad equilibrare il momento della $\vec{F}_t$, ma, tuttavia, non esiste altra forza, agente su (B) che possa garantire l'equilibrio alla traslazione nella direzione della $\vec{F}_t$ stessa.

Non resta che concludere che il contatto in C non è possibile.

E' possibile invece una configurazione come quella di fig. 22, in cui il punto di contatto C si è spostato, per effetto dell'inerpicamento del perno sul cuscinetto, e coerentemente al verso della ω, fino a trovare una nuova configurazione di equilibrio.

In questa nuova configurazione, infatti, la forza totale $-\vec{F}$ che i due membri si scambiano in C sarà eguale ed opposta al carico esterno e quindi è rispettato l'equilibrio alla traslazione; inoltre le stesse due forze formano una coppia il cui momento sarà equilibrato dalla C_m necessaria a vincere la resistenza d'attrito.

Decomponendo la $-\vec{F}$ nelle sue due componenti normale e tangenziale si evidenzia la $\vec{F}_t = f\vec{F}_n$ che risulta correttamente di verso opposto alla velocità relativa, tale quindi da compiere lavoro negativo.
La stessa $-\vec{F}$ forma allora l'angolo di attrito, φ, rispetto alla normale al contatto.

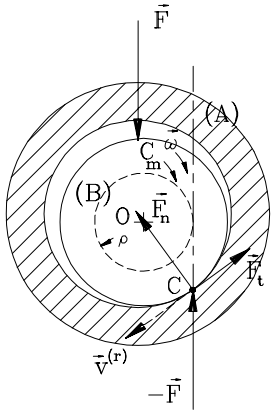


Figura 22

L'equilibrio alla rotazione del perno porta, ora, a scrivere:

$$C_m = F\rho = -Fr \ \text{sen}\,\varphi$$

dove r è il raggio del perno.
Possiamo concludere che, pur non essendo noto a priori il punto C, il contatto si instaurerà in quel punto per cui risulta l'equilibrio descritto: per dato valore del coefficiente di attrito e quindi per dato angolo di attrito, φ, è noto il valore di ρ, raggio del cosiddetto **cerchio di attrito**: ad esso, in condizioni di equilibrio risulta tangente la retta di applicazione della forza che si scambiano i due membri a contatto. E tale tangenza dovrà essere dalla parte per cui risulti negativo il lavoro della forza che il cuscinetto (A) esercita sul perno (B) nel moto relativo (ω) di (B) rispetto ad (A).

Applichiamo quanto sopra al caso del quadrilatero articolato piano di fig. 23, cercando quale debba essere, in presenza di attrito la C_m, applicata alla manovella, capace di equilibrare la coppia resistente C_r applicata al bilanciere. Siano $\boldsymbol{\omega}_1$ ed $\boldsymbol{\omega}_2$ le rispettive velocità angolari delle due aste e sia noto il coefficiente di attrito f.

Se non vi fosse attrito, la condizione di equilibrio della biella, non sottoposta ad alcuna azione esterna, impone che la retta di applicazione delle forze, $\vec{F}_{1,3}$ ed $\vec{F}_{2,3}$, che su di essa esercitano manovella e bilanciere abbia la direzione stessa dell'asta AB.
Per il principio di azione e reazione sul bilanciere dovrà quindi agire, in B, una $\vec{F}_{3,2} = -\vec{F}_{2,3}$ e, per l'equilibrio alla traslazione, dovrà agire in

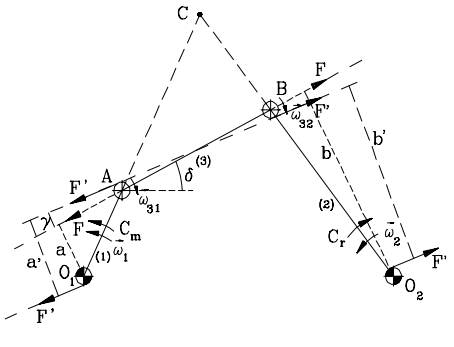


Figura 23

O_2, da parte del telaio, una $\vec{F}_{T,2} = \vec{F}_{2,3}$; è quanto basta per poter scrivere la condizione di equilibrio alla rotazione del bilanciere intorno ad O_2: dovrà essere, infatti, $C_r = Fb$, essendo b la distanza, ormai nota, di O_2 da retta di applicazione della $\vec{F}_{3,2}$.

Essendo noto il valore di Cr, abbiamo pure $F \equiv \left|\vec{F}_{3,2}\right| = C_r/b$.

D'altra parte, la biella eserciterà sulla manovella agirà , in A, una $\vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{3,2}$ che è ora un vettore completamente noto.

A questo, per l'equilibrio alla traslazione, dovrà corrispondere, in O_1, una forza $\vec{F}_{T,1} = -\vec{F}_{3,1}$ anch'essa completamente nota.

La $\vec{F}_{T,1}$ e la $\vec{F}_{3,1}$, uguali in modulo, parallele e di verso opposto, costituiscono una coppia che, per l'equilibrio alla rotazione della manovella, dovrà essere equilibrata da una $C_m = Fa = \left|\vec{F}_{3,1}\right| a$, essendo a la distanza di O_1 dalla retta di applicazione della $\vec{F}_{3,1}$.

Avremo, in conclusione, $C_m = C_r\, a/b$.

Per studiare l'equilibrio del meccanismo *in presenza di attrito*, occorrerà anzitutto cercare preventivamente i versi delle velocità angolari relative nelle coppie rotoidali che collegano la biella alla manovella ed al bilanciere; la posizione del punto C, centro della rotazione istantanea della biella nel suo moto assoluto, indica che entrambi i versi, di ω_{31} (della biella rispetto alla manovella) e di ω_{32} (della biella rispetto al bilanciere), sono discordi rispetto ai versi di ω_1 ed ω_2.

Pertanto le due forze $\vec{F}'_{1,3}$ ed $\vec{F}'_{2,3}$, che **manovella e bilanciere esercitano sulla biella** dovranno, da un canto, avere ancora la stessa retta di applicazione ma anche, adesso, essere tangenti ai rispettivi cerchi di attrito in modo tale che, come mostrato in figura, *(per semplicità grafica si è supposto che i diametri dei cerchi di attrito coincidano con quelli delle coppie rotoidali)* il loro momento risulti di verso opposto a quello delle rispettive $\omega^{(r)}$, ossia ω_{31} e ω_{32}.

Inoltre la forza $\vec{F}'_{T,2}$, reazione del telaio sul bilanciere, dovrà avere retta di applicazione tangente superiormente al cerchio d'attrito in O_2 in modo da generare un momento di verso opposto alla rotazione del bilanciere stesso rispetto al telaio, ω_2.

Resta così determinato il braccio b' della coppia che equilibra la C_r applicata al bilanciere. Si trova b'<b e quindi, come è logico, una $\vec{F}' > \vec{F}$.

Sulla manovella la reazione, $\vec{F}'_{T,2}$, da parte del telaio sarà ancora una forza uguale ed opposta alla $\vec{F}'_{3,1}$ che la biella esercita sulla manovella stessa, ma tangente inferiormente al cerchio d'attrito in O_1 in modo da generare un momento di verso opposto alla rotazione, ω_1, della manovella stessa rispetto al telaio. Resta quindi determinato il braccio a' della coppia che deve

essere equilibrata dalla C_m applicata alla manovella.
Si trova a'>a e quindi, come è logico una $C'_m = C_r\, a'/b'$ maggiore di quella trovata nel caso senza attrito.

Si noti infine che, sia nel caso senza attrito che nel caso con attrito, si sono sempre ottenute come reazioni del telaio sul meccanismo due forze uguali in modulo, di verso opposto su rette di applicazione parallele: queste due forze corrispondono quindi ad una coppia. Essa stessa, la C_r, e la C_m sono le uniche coppie esterne che agiscono sul meccanismo nel suo complesso e pertanto la loro somma dovrà in ogni caso essere nulla.

In modo analogo è possibile trattare il medesimo problema per un manovellismo di spinta (fig. 24), in cui al corsoio è applicata una forza resistente $\vec{F}_r$ la cui retta di applicazione non passa per il centro della coppia rotoidale in B.

L'equilibrio della biella, non soggetta da altre forze se non quelle vincolari in A e in B, impone che risultino uguali ed opposte, e sulla stessa retta di applicazione le due forze $\vec{F}$ applicate ad essa dalla manovella e dal corsoio. D'altra parte esse stesse dovranno compiere lavoro negativo e quindi ciascuna dovrà avere un momento, rispetto al centro della corrispondente coppia rotoidale, il cui verso sia opposto a quello del moto relativo della biella rispetto ai membri adiacenti.

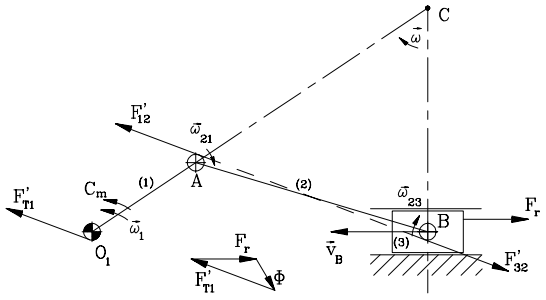


Figura 24

La posizione del punto C, indica che la rotazione della biella rispetto alla manovella deve avere verso opposto a quello della manovella, così come la rotazione della biella rispetto al corsoio. Pertanto la retta di applicazione delle $\vec{F}$ dovrà essere tangente superiormente al cerchio d'attrito in A ed inferiormente al cerchio di attrito in B.
La sua direzione resta pertanto definita.

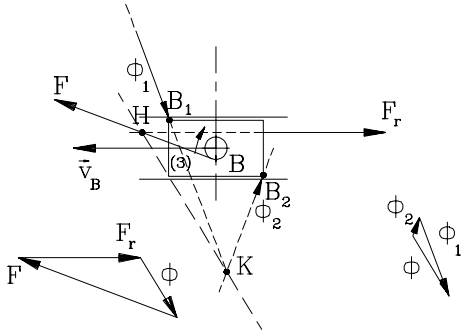


Figura 25

Analizzando, ora, l'equilibrio del corsoio (fig.25), si osserva che su di esso si esercita oltre alla $\vec{F}_r$ assegnata, la forza che la biella esercita su di esso, la cui direzione è stata già trovata, ed anche la forza $\vec{\Phi}$, reazione del telaio di cui, al momento, nulla si può dire circa la direzione della sua retta di applicazione; si può però affermare con certezza che per poter essere il corsoio in equilibrio la sua retta di applicazione dovrà passare per il punto, H, di intersezione delle due rette di applicazione della $\vec{F}$ e della $\vec{F}_r$.

D'altra parte, la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ discende dall'essere il corsoio in contatto con la guida fissa; e ciò può avvenire in vario modo: possono essere in contatto le superfici superiori, o le superfici inferiori, oppure possono toccarsi i punti B_1 e B_2, ovvero i loro simmetrici. Nei primi due casi la retta d'applicazione della $\vec{\Phi}$ sarà inclinata dell'angolo di attrito nel modo corretto per avere lavoro negativo; negli altri due casi essa sarà la risultante delle singole reazioni nei punti in cui si ha il contatto. La soluzione cercata sarà quella per cui le reazioni nei punti di contatto, $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_2$, inclinate in modo da opporsi alla velocità del corsoio, diano come risultante una $\vec{\Phi}$ che chiuda in modo corretto il triangolo di equilibrio delle tre forze applicate al corsoio.

La soluzione corretta è quella in cui i contatti si hanno proprio nei punti B_1 e B_2 in cui le rette di applicazione, sbiecate dell'angolo di attrito, come in figura, in modo che $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_2$ si oppongano al moto del corsoio, si intersecano in K; la retta per H e K dà la direzione della loro risultante $\vec{\Phi}$ il cui modulo e verso si ricava dalla chiusura del triangolo di equilibrio. $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_2$ si ottengono poi scomponendo $\vec{\Phi}$ secondo le loro direzioni.

Il triangolo di equilibrio del corsoio consente di ricavare il modulo della forza $\vec{F}$ che la biella esercita sul corsoio che è il medesimo della forza $\vec{F}$ che la biella esercita sulla manovella. Per l'equilibrio di quest'ultima si procede come per l'esempio precedente, ricavando infine il valore della coppia C_m che equilibra la $\vec{F}_r$.

§ 4. - Contatti di rotolamento.

Consideriamo (fig.26) il sistema costituito da un rullo (B) che può rotolare senza strisciare sopra il piano (A), e caricato da una forza di chiusura $\vec{F}_n$ la cui retta di applicazione passa per il punto di contatto, D.

Osserveremmo, sperimentalmente, che, applicando a (B) una coppia gradualmente crescente, da 0 verso valori non nulli, questo inizierà a rotolare solo quando la coppia C_m avrà raggiunto un valore ben determinato. Fino ad un istante immediatamente precedente all'inizio del moto di (B), quindi, la situazione delle azioni applicate è proprio quella rappresentata nello schema di figura; che non rappresenta, tuttavia, una condizione di equilibrio di (B) in quanto la coppia C_m applicata non trova riscontro in un'altra coppia equilibrante.

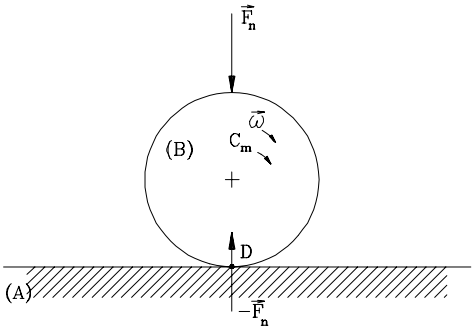


Figura 26

La disposizione delle forze non può quindi essere quella ivi rappresentata.

Dobbiamo invece dedurre che uno schema corretto può essere quello di fig. 27 in cui, pur ritenendo il contatto in D, la retta d'azione della $-\vec{F}_n$ risulti spostata in D' parallelamente a se stessa, di modo che la C_m risulta equilibrata dalla coppia di reazione che emana dal vincolo; ossia:

$$C_m = F_n \overline{D'D} = F_n u$$

Analogamente a quanto visto per la $\vec{F}_t$ nel caso di attrito radente, si può dire che finche siamo in condizioni statiche la coppia di reazione può assumere qualunque valore $<C_m$, raggiungendo proprio il valore di C_m non appena il rullo inizia il suo movimento.

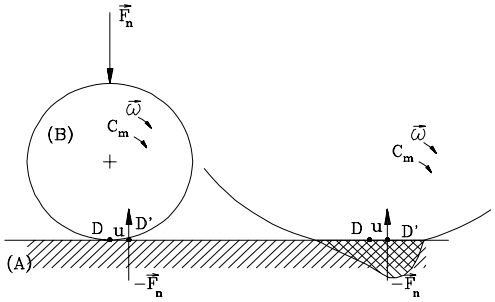


Figura 27

Il braccio u della $\vec{F}_n$ pensata spostata in D' prende il nome di **parametro di attrito volvente** e, a differenza di quanto si aveva nel caso dell'attrito radente, in cui il coefficiente di attrito f era adimensionale, esso ha, ovviamente, le dimensioni di una lunghezza.

Permane in ogni caso il fatto che il momento della coppia di reazione di (A) su (B) deve essere tale da opporsi al moto relativo del mem-

bro (B) rispetto al membro (A).
Secondo le leggi di Coulomb-Morin il parametro di attrito volvente, u, è indipendente dal valore della forza di chiusura della coppia, e dal valore della velocità angolare relativa fra i membri a contatto; dipende invece dalla natura dei materiali a contatto e dallo stato delle superfici.

In effetti *u* è una funzione molto complessa di diversi parametri: essenzialmente: la deformabilità dei corpi a contatto ed il conseguente scorrimento relativo fra le loro superfici; l'irregolarità delle superfici che si toccano; la non perfetta elasticità dei corpi stessi.
Tutti questi fattori di fatto influenzano le condizioni nel contatto per cui, qualitativamente, si può immaginare una distribuzione di pressioni, nell'intorno del punto D, come quella indicata nella stessa fig.27.
Occorre anche tener presente che, alla dissipazione di energia dovuta alla non perfetta elasticità dei materiali, c'è da aggiungere quella dissipata in conseguenza degli strisciamento nei punti dell'arco di contatto.
In pratica, nel caso di cilindro su piano, si può ritenere accettabile ritenere che sia $0.05<u<0.5$ per contatti ferro-ferro fino a legno-legno, mentre si scende a valori di $u \approx 0.005./.0.01$ quando si abbiano contatti acciaio-acciaio, come nel caso di sfera-anello nei cuscinetti di rotolamento, dove, come si può intuire, gioca un ruolo estremamente importante l'alta qualità tecnologica dei materiali fra cui si realizza il contatto.

§ 5. - Reazioni vincolari con attrito radente e volvente.

Si consideri il caso schematizzato in fig. 28 in cui una rotella (B), portata da un braccio (D), si appoggia su una camma (A); il contatto fra (A) e (B) sia di puro rotolamento.
Si vuole trovare il valore della C_m che deve essere fornita dalla camma (A), che ruota con velocità angolare ω_1, quando sul braccio (D), che ruota con velocità angolare ω_2, si esercita una coppia resistente C_r, e ciò nell'ipotesi che vi sia attrito nelle coppie rotoidali e una resistenza al rotolamento nel contatto fra rotella e camma caratterizzato dal parametro di attrito volvente *u*.

Indicato con A il punto di contatto fra rotella e camma, il centro, C, del moto assoluto della rotella deve trovarsi sulla intersezione delle due rette per O_2D e per O_1A; intersezione che cade esternamente a tali segmenti.
Se ne conclude che il moto della rotella rispetto alla camma è un rotolamento con verso orario e che è pure oraria la rotazione relativa della rotella intorno al perno del braccio (D).
Poiché sulla rotella (B) non agiscono altre forze se non quelle esercitate dalla camma e dal braccio, queste due forze devono avere la medesima retta di applicazione e questa deve essere disposta in modo tale che esse compiano lavoro negativo.
Pertanto nel contatto fra rotella e camma essa dovrà passare per il punto A', posto a distanza u dal punto A e dal lato per cui il momento della $\vec{R}_{AB}$ sia discorde nei confronti della $\vec{\omega}_{BA}$; mentre nel contatto fra rotella e braccio essa dovrà essere tangente al cerchio d'attrito dalla parte inferiore di modo che il momento della forza $\vec{R}_{DB}$ risulti di segno opposto a quello della rotazione $\vec{\omega}_{BD}$ della rotella rispetto al braccio.

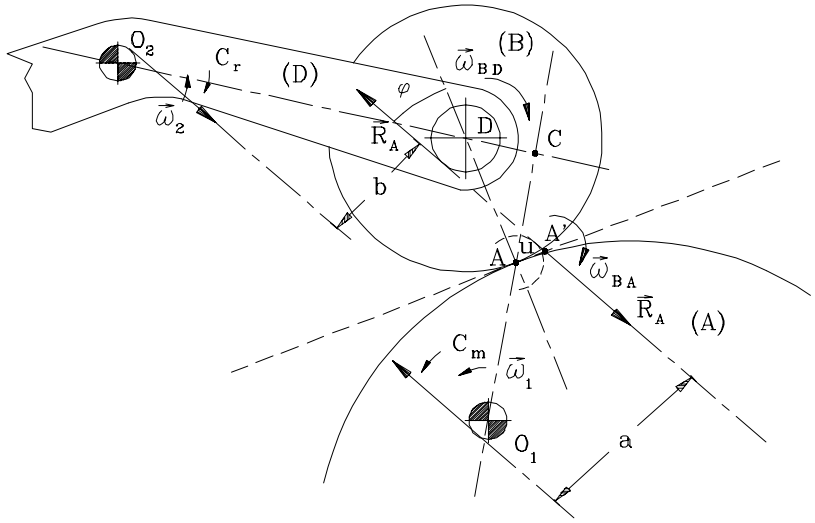


Figura 28

Analogamente deve compiere lavoro negativo, in O_2, la reazione del telaio sul braccio, $\vec{R}_{TD}$; per l'equilibrio alla traslazione, questa dovrà risultare parallela alla $\vec{R}_{BD}$, uguale in modulo e verso opposto.

Risulta così individuato il braccio, b, della coppia che farà equilibrio alla C_r e che permette di calcolare il modulo di $\vec{R}_{TD}$ (= C_r/b), ossia anche della $\vec{R}_{BA}$. Quest'ultima, vettore noto, partecipa all'equilibrio della camma insieme alla reazione del telaio sulla stessa, $\vec{R}_{TA}$, ed alla coppia C_m

che si vuole determinare.

Considerazioni analoghe a quelle fatte per il braccio in O_2 portano a determinare la distanza fra le rette di applicazione della $\vec{R}_{BA}$ e della $\vec{R}_{TA}$, ossia il braccio, a, della coppia di reazione che si esercita sulla camma (A) che deve essere equilibrata dalla C_m cercata (C_m=aR_{BA}).
L'angolo che la retta di applicazione della $\vec{R}_{BA}$ forma con la normale al contatto in A deve risultare in ogni caso ≤ all'angolo di attrito φ se si vuole che il momento della reazione $\vec{R}_{BA}$ sia eguale al momento necessario a garantire il rotolamento e quindi sufficiente a far sì che la rotella non s'impunti.

Consideriamo adesso lo schema di fig. 29 in cui un carrello, costituito dalle due ruote (A) e (B) e dalla trave di collegamento H, sia sollecitato da una forza esterna $\vec{F}$. Ipotizzando che il contatto di rotolamento fra le ruote ed il piano sia caratterizzato dal parametro di attrito volvente, *u*, e che vi sia attrito nelle coppie rotoidali, si vuole trovare il valore della coppia C_m, applicata alla ruota (B), equilibrante del sistema quando esso si sposta nel verso in cui la velocità angolare delle ruote sia quella indicata.
Per l'equilibrio della trave H, le rette di applicazione della forza esterna $\vec{F}$, della $\vec{R}_{AH}$ che la ruota (A) esercita sulla trave e della $\vec{R}_{BH}$ che la ruota (B) esercita sulla stessa trave devono passare per uno stesso punto.
D'altra parte per l'equilibrio della ruota (A), che risulta sottoposta solo all'azione delle reazioni vincolari, devono avere la medesima retta di applicazione sia la reazione del piano contro la ruota che l'azione della trave sulla ruota stessa ed entrambe devono compiere lavoro negativo nel moto relativo di (A) rispetto ai membri adiacenti. La direzione di tale retta è dunque determinata essendo quella che passa per A' a distanza u dal punto A e tangente al cerchio d'attrito nel modo indicato in figura.

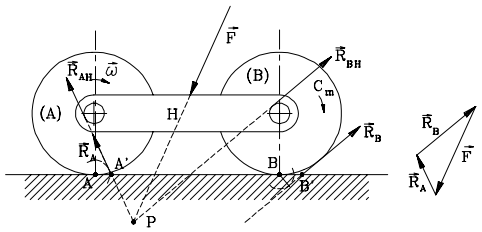


Figura 29

L'intersezione di questa retta con la retta di applicazione della $\vec{F}$ individua il comune punto di intersezione P. Da questo punto deve passare allora anche la retta di applicazione della $\vec{R}_{BH}$ che dovrà pure essere tangente al cerchio d'attrito della coppia rotoidale di (B) dalla parte indicata in figura (la $-\vec{R}_{BH}$ deve opporsi alla rotazione della ruota).

I moduli di $\vec{R}_{AH}$ e di $\vec{R}_{BH}$ si ricavano dal triangolo di equilibrio della trave.
Infine per l'equilibrio della ruota (B), la reazione del piano di appoggio deve risultare parallela alla $\vec{R}_{BH}$ (equilibrio alla traslazione), passante per il punto B' in modo da essere a distanza u da B e dalla parte in cui la $\vec{R}_B$ si opponga alla rotazione della ruota. La distanza fra le rette di applicazione della $\vec{R}_{BH}$ e della $\vec{R}_B$ determina il braccio della coppia che deve essere equilibrata dalla C_m.
Anche in questo caso gli angoli formati dalle rette di applicazione della $\vec{R}_{AH}$ e della $\vec{R}_{BH}$ con le corrispondenti normali al contatto (fra ruota e piano) devono entrambi risultare $\leq\varphi$ per evitare il verificarsi di impuntamento e conseguente strisciamento della ruota.

Di quest'ultima affermazione si può trovare la motivazione riflettendo sul modo in cui è stato necessario operare, in entrambi i casi illustrati, per definire l'equilibrio della rotella prima e delle ruote poi; modo che può essere rivisto, in modo più semplice, con l'ausilio della fig. 30a in cui una ruota di dato raggio, montata su un supporto per il tramite di una coppia rotoidale debba rotolare senza strisciare su un piano con data velocità angolare, come indicata.

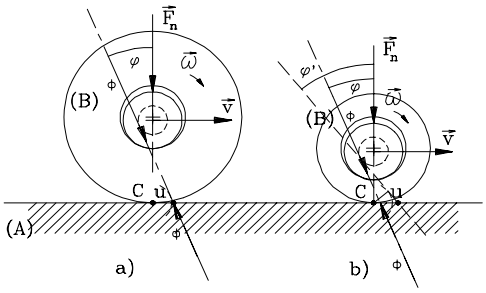


Figura 30

Si cominci ad osservare che tra i dati del problema si ha sia il valore del coefficiente di attrito, f=tanφ, che dipende dalle superfici e dai materiali a contatto nella coppia rotoidale, sia il valore del parametro di attrito volvente, *u*, che dipende dalle condizioni esistenti nel contatto fra ruota e piano: tali valori sono quindi indipendenti dalla geometria e dalla cinematica del sistema che si ha allo studio.
D'altra parte l'inclinazione della retta di applicazione della $\vec{\Phi}$ rispetto alla normale di contatto discende direttamente dal valore di *u* e dal valore del raggio del cerchio d'attrito, ma sarà diversa a seconda del valore del raggio di curvatura di (B). Ciò comporta che l'angolo da essa formato rispetto alla normale di contatto può anche risultare maggiore del valore effettivo di φ; il che non è possibile, in quanto la retta di applicazione della forza che si scambiano perno e ruota non può trovarsi al di fuori del cono di attrito. Rispettando tale condizione (fig. 30b) la retta verrà necessariamente a tro-

varsi, dal punto di contatto C, ad una distanza minore di u: e ciò significa che la coppia di reazione da parte del piano risulta minore di quella che sarebbe necessaria per ottenere il rotolamento di (B) su (A). Di conseguenza (B) si impunta e striscia su (A).
In definitiva, indicando con r il raggio della coppia rotoidale e con R il raggio di curvatura della ruota, la condizione che sia garantito il rotolamento è data da:

$$u \leq (R - r)\sin\varphi$$

Capitolo XIV

AZIONI NEI CONTATTI DI COMBACIAMENTO

SOMMARIO

1 - Ipotesi del Reye e sue applicazioni.
2 - Coppia rotoidale portante.
3 - Freni a tamburo ad accostamento rigido.
4 - Freni a tamburo ad accostamento semilibero.
5 - Coppia rotoidale portante-spingente.
6 - Freno a disco ad accostamento rigido.
7 - Freno a disco ad accostamento semilibero.
8 - Altre applicazioni sull'ipotesi del Reye.

§ 1. - Ipotesi del Reye e sue applicazioni.

Consideriamo due membri (A) e (B), in contatto fra loro attraverso due superfici: il contatto sia quindi un contatto di *combaciamento*. In generale, l'azione che il membro (A) trasmette al membro (B) è il risultante di un sistema di azioni elementari $d\vec{F}_n$ che non sono uniformemente distribuite su tutti i punti del contatto; infatti, le due superfici non saranno né potranno, di fatto, essere assolutamente lisce ma presenteranno in ogni caso delle asperità casualmente distribuite che rendono le azioni nel contatto diverse da punto a punto.
Dovremo pertanto affermare che deve essere $dF_n = f(P)$, ossia che l'azione elementare è una funzione del punto in cui si esplica.

Se le superfici sono asciutte si può ancora ammettere che il valore di tali azioni elementari scambiate tra i due membri soddisfino alle leggi dell'attrito radente (Coulombiano), ma la legge della loro distribuzione lungo la superficie è influenzata dalla deformabilità dei corpi, dalla loro elasticità, e dall'usura delle superfici stesse.

La presenza delle asperità nelle superfici a contatto comporta il dover senz'altro ammettere che esista un'area reale di contatto, $(dA)_r$,

certamente diversa dalla corrispondente area apparente, $(dA)_a$, e che la prima sarà sicuramente minore della seconda $(dA)_r<(dA)_a$; di conseguenza la pressione reale corrispondente alla dF_n risulterà maggiore.
Possiamo, tuttavia, scrivere:

$$dF_n = p_r\, dA_r = p_r \frac{dA_r}{dA_a}\, dA_a = p\, dA_a$$

ammettendo quindi, nel punto P una pressione (convenzionale) pari a:

$$p = p_r \frac{dA_r}{dA_a}$$

Di conseguenza, punto per punto, si avrà un'azione tangenziale (elementare):

$$dF_t = f\, dF_n = f\, p\, dA_a$$

In queste condizioni il problema è di tipo iperstatico e, per la sua risoluzione è ormai definitivamente accettata la teoria dell'usura secondo l'ipotesi del Reye, che dice: "*In un contatto di combaciamento il lavoro compiuto dalle azioni tangenziali di attrito in corrispondenza di ciascun elemento della coppia e in un certo tempo Δt è proporzionale al volume di materiale asportato per logoramento in quello stesso elemento e nello stesso tempo*."
Discende da quanto sopra la relazione:

$$dF_t v_P^{(r)} \Delta t = k\, dV\, \Delta t$$

ossia:

$$f\, dF_n v_P^{(r)} \Delta t = k\, \delta\, dA_a\, \Delta t$$

e, in definitiva,

$$f\, p\, dA_a v_P^{(r)} = k\, \delta\, dA_a$$

avendo indicato con dV il volume di materiale usurato in corrispondenza dell'elemento dA_a, con *f* il coefficiente di attrito fra i materiali a contatto, con $v_P^{(r)}$ la velocità del punto P nel moto relativo dei due membri, con δ lo spessore del materiale usurato in dA_a, con k un opportuno coefficiente di proporzionalità.
Da quanto sopra discende che per la legge di distribuzione delle pressioni al contatto si può scrivere:

$$p = \left(\frac{k}{f}\right) \frac{\delta}{v_P^{(r)}}$$

da cui si comprende che, nota la velocità dei punti a contatto, lo spessore del materiale asportato localmente per usura definisce univocamente la legge di distribuzioni delle pressioni nel contatto fra i due membri (e viceversa).
Occorre sottolineare, inoltre, che **poiché δ è l'altezza del volume** di materiale usurato **esso va misurato**, ovviamente, **lungo la perpendicolare alla superficie di contatto**; d'altra parte, per il modo con cui è stata ricavata la precedente espressione di p (si è operata una divisione per il tempo Δt), δ può anche essere interpretato come la componente della velocità del generico punto P lungo la direzione della normale all'area di contatto, nel moto di accostamento di (A) verso (B) dovuto all'usura.

L'applicazione dell'ipotesi del Reye suole tuttavia essere fatta introducendo due ipotesi semplificative ma comunque corrispondenti alle situazioni reali:
a) che **la forma delle superfici** che vengono a contatto **non si modifica** nel tempo per effetto del logoramento; e ciò corrisponde alla circostanza, tecnicamente normale, che, dei due materiali a contatto, uno è più tenero dell'altro, per cui l'usura avviene a spese di uno solo dei due membri;
b) che il logoramento del membro di materiale più tenero, (A), è definito dal **moto relativo** di accostamento all'altro, (B), e che questo moto sia un **moto rigido** assicurato da una chiusura di forza della coppia cinematica.

§ 2. - Coppia rotoidale portante.

Consideriamo una coppia cinematica (fig. 1) costituita da un cilindro (B) ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno al suo centro O, e dal membro (A), a contatto con (B) sotto l'azione della forza di chiusura $\vec{F}$; per effetto dell'usura provocata dal moto relativo di strisciamento fra le due superfici (A) si accosta a (B) radialmente (moto traslatorio).

Lo spessore di materiale usurato, δ, dipende, punto per punto, dal moto di accostamento di (A) verso (B) che avviene, essendo questo traslatorio, lungo una retta l corrispondente all'asse di simmetria del membro (A). Il valore di δ, in corrispondenza del generico punto P, **da misurarsi**

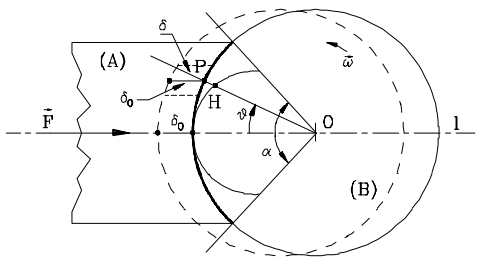


Figura 1

nella direzione della normale al contatto in quel punto, vale:

$$\delta = \delta_0 \cos\vartheta$$

se δ_0 è il valore di δ in corrispondenza del punto che sta sulla retta l e se θ è l'anomalia del punto di contatto, P, considerato .
Quindi la distribuzione delle pressioni lungo i punti del contatto avrà una legge del tipo:

$$p = \left(\frac{k}{f}\right)\frac{\delta}{v^{(r)}} = \left(\frac{k}{f}\right)\frac{\delta_0 \cos\vartheta}{\omega r} = \left(\frac{k\delta_0}{f\omega r}\right)\cos\vartheta = p_0 \cos\vartheta \qquad \textbf{(1)}$$

dove p_0, il cui valore dipende dalle costanti entro parentesi, rappresenta comunque il valore della pressione massima, valore che si ha nel punto di anomalia $\theta = 0$ ossia nel punto situato sulla retta l.

Questa relazione, che teoricamente presenta la sua validità nel campo in cui $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$, di fatto vale per $-\alpha/2 \le \vartheta \le \alpha/2$ se si indica con α **l'angolo di abbracciamento**, ossia l'angolo che definisce l'estensione del contatto fra (A) e (B).
Si vede, infine, che una circonferenza, il cui diametro sia pari al raggio p_0 del cilindro e che abbia il centro sulla retta l, si presta egregiamente a rappresentare, sotto forma di *diagramma polare*, la legge di distribuzione delle pressioni ora trovata: ponendo che il suo diametro valga p_0, per ogni suo punto H sarà proprio $OH = p_0\cos\theta$.

L'esempio mostrato rappresenta, tuttavia, un caso estremamente particolare giacché è stato ipotizzato che il moto di accostamento di (A) verso (B) fosse un moto traslatorio.

In effetti, nel caso più generale, tale moto corrisponderà ad una rotazione $\Delta\alpha$ intorno ad un asse passante per un certo punto C del piano ed a questo perpendicolare: trattandosi di moto piano, sarà cioè:

$$\Delta\vec{\alpha} = \Delta\alpha\,\vec{k}$$

Vi potranno essere casi in cui i vincoli imposti ad (A) consentiranno la determinazione di C (*accostamento rigido*), ma anche casi in cui il punto C non può essere determinato a priori, ma solo in base a condizioni di equilibrio dinamico (*accostamento semilibero*).

Quando il moto di accostamento di (A) verso (B) non sia traslatorio, ma sia invece rotatorio intorno ad un punto C del piano (fig.2), appare chiaro che gli spostamenti effettivi dei punti di contatto di (A) non hanno un'unica direzione, e quindi, tale caso non è immediatamente riconducibile al caso della traslazione prima considerato. Tuttavia, se si considera il punto O di (A) coincidente con il centro di (B), è lecito scrivere:

$$\left(\Delta\alpha\,\vec{k}\right)_C = \left(\Delta\alpha\,\vec{k}\right)_O + \text{traslazione}$$

ossia scomporre il moto di rotazione intorno a C, in un moto di rotazione intorno ad un altro punto, O nel nostro caso, ed in una traslazione nella direzione perpendicolare alla congiungente OC.
Si è visto infatti in Cinematica che è:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\Lambda(P-C) = \vec{\omega}\Lambda(P-O) + \vec{\omega}\Lambda(O-C) = \vec{\omega}\Lambda(P-O) + \vec{v}_O$$

Dei corrispondenti spostamenti (fig.2), quello dovuto alla rotazione intorno ad O non corrisponde ad un avvicinamento di (A) verso (B) e quindi non è da mettere in relazione con la valutazione dell'usura, e quindi di δ: quindi, a tal fine, non è da prendersi in considerazione; lo spostamento dovuto alla traslazione nella direzione perpendicolare ad OC avvicina, invece, (A) a (B) ed è quello che individua la direzione della **retta di accostamento**, l, che si cercava, definita quindi come la retta per O perpendicolare ad OC.
Si è così ottenuto di eliminare dal moto effettivo di accostamento quella parte che non può avere relazione con la misura dell'usura e di ricondurre, ai fini della valutazione di δ, il moto di accostamento rotatorio ad un moto di accostamento puramente traslatorio nella direzione di l.
Prendendo questa retta come riferimento polare potremo quindi dire che la distribuzione delle pressioni è ancora del tipo $p = p_0 \cos\vartheta$ e che lungo la sua direzione si registrerà il valore massimo della pressione al contatto fra i due membri.

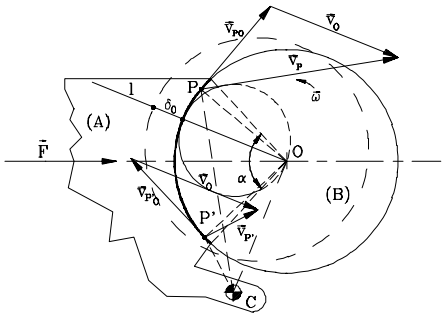


Figura 2

§ 3. - Freno a tamburo ad accostamento rigido.

Consideriamo, come esempio relativo al caso in cui il centro di rotazione nel moto di accostamento di (A) verso (B) sia noto, quello del freno rappresentato in fig. 3, in cui il **ceppo** (A), di data larghezza a, per effetto della forza di chiusura Q, è in contatto con il tamburo (B), di raggio r, che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ antioraria intorno al suo

centro O; sia α l'estensione angolare del contatto fra i due membri.
Assumiamo come riferimento una coppia di assi xy con origine in O, l'asse x coincidente con l'asse di simmetria
del ceppo, e l'asse y ruotato di 90° nel verso delle $\vec{\omega}$. In questo riferimento gli angoli saranno quindi positivi se misurati nel verso concorde ad $\vec{\omega}$.

Il moto di accostamento del ceppo verso il tamburo, man mano che si verifica il suo logoramento, è una rotazione rigida intorno al punto fisso O_1, che quindi coincide con il punto C; questo risulta allora noto. La retta di accostamento sarà quindi pure nota e sarà la retta l passante per O, centro del tamburo, e perpendicolare alla congiungente OO_1; inclinata quindi di un certo angolo β rispetto all'asse delle x ($\beta<0$).

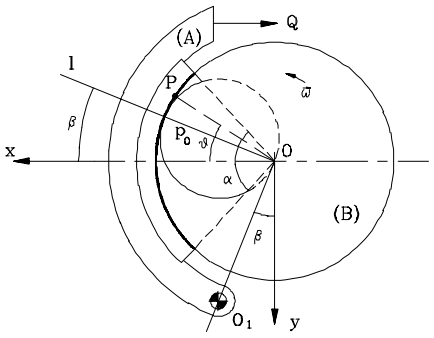


Figura 3

La pressione che si ha in corrispondenza del generico punto P del contatto sarà espressa quindi dalla relazione:

$$p = p_0 \cos(\vartheta - \beta)$$

relazione che rispetta la condizione di avere $p = p_0$ per $\vartheta = -|\beta|$.

Tale pressione agisce su una area elementare, dS, pari a:

$$dS = a\, r\, d\vartheta$$

Avremo allora in corrispondenza di P una forza normale (elementare) data da:

$$dF_n = p\, dS = p_0 \cos(\vartheta - \beta)\ \ a\, r\, d\vartheta = a\, r\, p_0 \cos(\vartheta - \beta) d\vartheta$$

e l'insieme di tutti i $d\vec{F}_n$ distribuiti lungo i punti del contatto fra ceppo e tamburo costituiscono un sistema di vettori aventi tutti direzione radiale e quindi aventi il punto O come polo; tale sistema ammetterà certamente un risultante, $\vec{F}_n$, la cui retta di applicazione passerà per il punto O e la cui direzione, per adesso incognita, formerà un certo angolo γ con l'asse delle x.

D'altra parte, se questa retta inclinata dell'angolo γ è la retta di applicazione del risultante in questione, la somma dei componenti di tutti i $d\vec{F}_n$ lungo la direzione normale ad essa deve essere nulla, mentre la somma dei componenti lungo la sua direzione darà proprio il vettore

$\vec{F}_n$.

In termini analitici, la prima condizione sarà espressa da:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dF_n \, sen(\vartheta - \gamma) = a\, r\, p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) sen(\vartheta - \gamma) d\vartheta = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

mentre la seconda sarà espressa da:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dF_n \cos(\vartheta - \gamma) = a\, r\, p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \cos(\vartheta - \gamma) d\vartheta \qquad \textbf{(3)}$$

Lo sviluppo della (2), [v. App. A-a1] fornisce una relazione che consente di ricavare il valore di γ in funzione dell'angolo, β, della retta di accostamento e dell'angolo di abbracciamento, α. Si avrà cioè:

$$\tan\gamma = \tan\beta \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha} \qquad \textbf{(4)}$$

La (4) mostra che, poiché il numeratore è certamente minore del denominatore, l'angolo γ sarà sempre minore dell'angolo β (fig.4); inoltre, poiché il numeratore è certamente positivo ($\alpha > \operatorname{sen}\alpha$) l'angolo γ e l'angolo β hanno sempre lo stesso segno: la retta di applicazione di $\vec{F}_n$ è quindi situata, rispetto all'asse delle x, dalla stessa parte della retta di accostamento.

Una volta nota una espressione per l'angolo γ, è possibile sviluppare la (3) e trovare [v. App. A-a2] l'espressione del modulo del risultante. Si ottiene:

$$F_n = \frac{1}{2} \text{a r p}_0 (\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{1}{2} \text{a r p}_0 (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \textbf{(5)}$$

In tal modo il vettore risultante della distribuzione delle azioni normali che il ceppo esercita sul tamburo risulta completamente definito: in modulo, (5), in direzione, (4) ed anche in verso: contro il tamburo trattandosi di azioni che il ceppo esercita su questo.

Per quanto fin qui detto si può concludere che in ogni caso la retta inclinata dell'angolo γ, che definisce la retta di applicazione della $\vec{F}_n$, passerà comunque per il centro O del tamburo; esso prende quindi

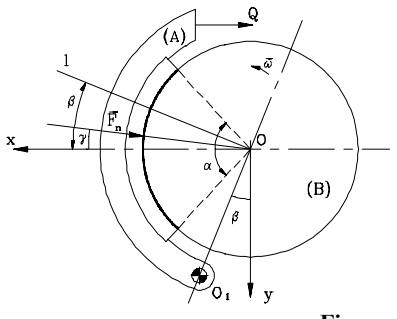


Figura 4

il nome di **polo delle forze normali**.

Inoltre, sarà bene richiamare l'attenzione sul fatto che l'ipotesi di fondo che ha portato a trovare le espressioni (4) e (5) è quella che tutto il contatto fra ceppo e tamburo sia attivo: ossia che esista, in ogni punto del contatto una pressione p che dia luogo ad una $d\vec{F}_n$ effettiva; per la validità dei risultati fin qui trovati, e per i successivi, dovrà quindi sempre verificarsi che, in ogni punto, sia:

$$p = p_0 \cos(\vartheta - \beta) > 0$$

Poiché la legge di distribuzione è di tipo cosinusoidale, p sarà positiva per i punti in corrispondenza dei quali è:

$$(\vartheta - \beta) < \pm \pi/2$$

ossia se:

$$\vartheta < \beta \pm \pi/2$$

Affinché il ceppo sia tutto attivo occorrerà, quindi, che l'estensione del ceppo sia tale da essere comunque:

$$\alpha/2 < \beta \pm \pi/2$$

oppure anche:

$$|\beta| < \pi/2 - \alpha/2$$

Per il modo in cui è stato definito l'angolo β, il valore (π–α)/2 fissa il valore massimo, β_{lim}, per la posizione della cerniera fissa O_1, e, attraverso la (4), anche il valore massimo, γ_{lim}, per l'inclinazione della retta di applicazione del risultante delle forze normali, $\vec{F}_n$.

Noto il risultante delle forze normali, il modulo del risultante delle forze tangenziali sarà dato(*) da $F_t = f F_n$, ed esso sarà un vettore la cui retta di applicazione è certamente perpendicolare a quella di $\vec{F}_n$ ed il cui verso dovrà essere tale da generare un momento frenante, tale cioè da opporsi alla rotazione del tamburo: ruotato di π/2 nello stesso verso di $\vec{\omega}$. Rimane perciò da determinare solamente il suo punto di applicazione, E; noto il quale, si può valutare immediatamente il momento frenante, $\vec{M}_f$.

Imponiamo, a tale scopo, la condizione che il momento frenante

(*) Essendo ciascuna $d\vec{F}_t$ ruotata di π/2 rispetto a ciascuna $d\vec{F}_n$, è certamente nulla la somma di tutte le componenti parallele alla direzione di $\vec{F}_n$ e quindi alla retta inclinata di γ.

dovuto al complesso delle azioni tangenziali elementari $d\vec{F}_t$ sia eguale al momento del corrispondente risultante, $\vec{F}_t$, scrivendo:

$$M_f = F_t\ \varepsilon = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dF_t\ r = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} f dF_n\ r = a\, r^2\, p_0 f \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) d\vartheta =$$
$$= ar^2 p_0 f\, 2\cos\beta\, \mathrm{sen}(\alpha/2)$$

da qui si può ricavare il braccio OE di $\vec{F}_t$ come:

$$\varepsilon = OE = \frac{2ar^2 p_0 f \cos\beta\, \mathrm{sen}(\alpha/2)}{f\,\frac{1}{2} arp_0(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}} = \frac{4\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}{(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)} r\cos\gamma \qquad \textbf{(6)}$$

Si rileva immediatamente che il punto E, punto di applicazione della $\vec{F}_t$, si trova ad una distanza diversa da r e quindi non sta sulla periferia del tamburo: ciò è ovvio data la distribuzione delle $d\vec{F}_t$.
Inoltre si può affermare che sarà sempre ε>r qualunque sia la geometria del freno; e ciò in quanto il fattore $\frac{4\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}{(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)}$ è maggiore di 1 ed il valore di cosγ, essendo γ un angolo abbastanza piccolo, sarà comunque prossimo all'unità.
Se, ora, nella (6) poniamo:

$$2\ r^* = \frac{4\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}{(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)}\ r \qquad \textbf{(7)}$$

la stessa (6) si scriverà come:

$$\varepsilon = 2\ r^*\ \cos\gamma \qquad \textbf{(8)}$$

e questa, per dato angolo di abbracciamento, α, del freno, e per dato raggio del tamburo, rappresenta il luogo dei punti di applicazione della $\vec{F}_t$ al variare della posizione della cerniera: di β e quindi di γ. Poiché rispetto a tale variazione il 2r* è costante, la (8) può essere interpretata, in coordinate polari, come una circonferenza di diametro pari a 2r* e disposto sull'asse delle x. Questa circonferenza prende il nome di **cerchio di Romiti** (fig. 5) e l'intersezione con essa della retta inclinata di γ fissa definitivamente la posizione del punto E che risulta quindi essere il punto di intersezione delle rette di applicazione della $\vec{F}_n$ e della $\vec{F}_t$.

Il verso della $\vec{F}_t$, applicata al tamburo, come già detto, dovrà essere quello capace di generare l'azione frenante e pertanto esso dovrà essere quello capace di esplicare un momento di verso opposto al verso di rotazione del tamburo stesso. Inoltre, la retta di applicazione della $\vec{F}_t$, che ovviamente è perpendicolare alla retta di applicazione della $\vec{F}_n$, e che con questa formerà quindi un angolo retto, dovrà necessariamente passare per il punto O*, secondo estremo del diametro del cerchio Romiti; ciò accadrà qualunque sia la posizione di E sul cerchio Romiti e quindi qualunque sia il valore dell'angolo γ e quindi di β: il punto O* prende il nome di **polo delle forze tangenziali**, indipendente allora dalla posizione della cerniera fissa.

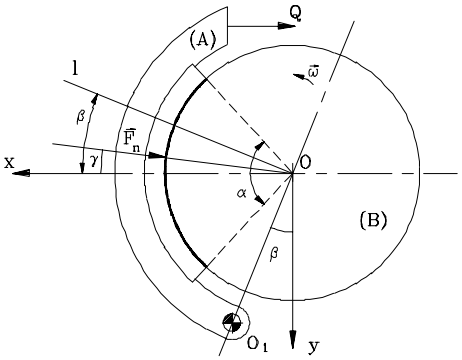


Figura 5

Sommando la $\vec{F}_n$ e la $\vec{F}_t$ si ottiene il vettore $\vec{F}$, risultante di tutte le azioni agenti sul tamburo (fig. 6), ossia:

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t = \vec{F}_n + f\vec{F}_n = \sqrt{1+f^2}\,\vec{F}_n$$

La sua retta di applicazione risulterà sbiecata dell'angolo di attrito, φ, rispetto a quella della $\vec{F}_n$ e taglierà il cerchio Romiti in un punto R* la cui posizione su di esso dipende dal verso della $\vec{F}_t$, e quindi, **per dato verso di rotazione** del tamburo, solamente dal valore del coefficiente di attrito.
Noto il cerchio di Romiti ed il coefficiente di attrito fra ceppo e tamburo, il punto R* è, cioè, univocamente determinato e da questo punto passerà il risultante $\vec{F}$, qualunque sia la posizione di E. Per tale motivo, il punto R* prende il nome di **polo delle forze risultanti**. La sua indipendenza dalla posizione della cerniera O_1 costituisce una condizione che risulterà indispensabile

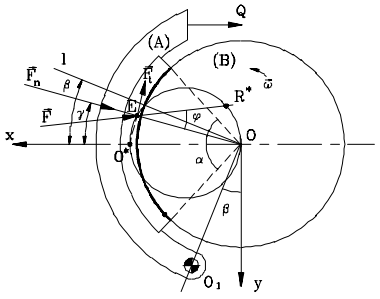


Figura 6

sfruttare nei casi in cui il moto di accostamento del ceppo non avviene intorno ad un punto noto a priori.

Gli elementi necessari alla valutazione del momento frenante sono adesso completamente definiti; esso sarà il momento della $\vec{F}_t$ rispetto al centro O del tamburo, ossia:

$$M_f = F_t \ \mathrm{OE} = F_t \ \varepsilon = f F_n \ 2\, r^* \cos\gamma \qquad \textbf{(9)}$$

e tale valore dipenderà chiaramente dall'anomalia del punto O_1: nella (9), infatti, compare l'angolo γ che dipende da β, e quest'ultimo compare anche, (4), nella espressione di F_n; dipende anche (6) dall'angolo di abbracciamento α.
Tuttavia, il valore numerico della (9) è ancora indeterminato in quanto in essa il valore di F_n è incognito per via della p_0 che compare nella (4).
Di contro, non si è ancora tenuto conto della condizione di equilibrio del ceppo sotto l'azione della forza di chiusura, $\vec{Q}$, della coppia, della $\vec{F}_n$, e della $\vec{F}_t$. Dovrà, quindi, essere ancora (fig. 7), indicando con a, b, c, i rispettivi bracci :

$$Q\,a - F_n\,b - F_t\,c = 0$$

da cui:

$$Q\,a = F_n\,(b + f\,c)$$

e quindi:

$$F_n = \frac{Q\,a}{b + f\,c} \qquad \textbf{(10)}$$

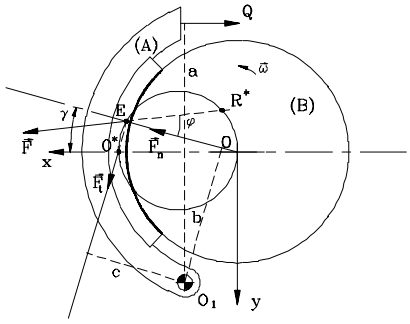


Figura 7

e il momento frenante, che, trattandosi del ceppo di sinistra(*) , indicheremo con il pedice Sn, si potrà scrivere come:

$$(M_f)_{\mathrm{Sn}} = f F_n \ \varepsilon = \frac{f\,Q\,a}{b + f\,c} \ 2\, r^* \cos\gamma \qquad \textbf{(11)}$$

Dalla (10 si può risalire al valore di F_n, e da qui ottenere, tramite la (5), il valore di p_0: sarà possibile quindi tracciare il diagramma delle pressioni al contatto fra ceppo e tamburo.

(*)

Per ceppo sinistro si intende (v. Fig.8), con $\vec{\omega}$ antioraria, quello la cui cerniera fissa è situata nel primo quadrante; per ceppo destro quello la cui cerniera fissa è situata nel secondo quadrante, ossia il simmetrico del primo rispetto ad una retta parallela all'asse delle y.

In modo diverso, per quanto riguarda il momento frenante, si comporta il **ceppo destro**, il simmetrico di quello ora considerato (fig.8). Poiché la cerniera fissa si trova in posizione simmetrica alla prima rispetto alla direzione dell'asse delle y, avremo, a parità di estensione del contatto, lo stesso valore per l'angolo γ, e un cerchio Romiti il cui diametro non è cambiato in quanto esso dipende solamente da α; su di esso troveremo quindi un punto E, punto di applicazione delle forze, in posizione esattamente simmetrica di quella del ceppo di sinistra.

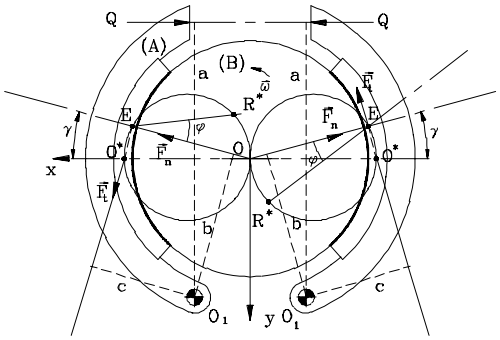


Figura 8

Per quanto riguarda, invece, il polo delle forze risultanti, R*, esso dovrà trovarsi, a parità di coefficiente di attrito, in posizione simmetrica al primo rispetto all'asse delle x: infatti il risultante delle forze tangenziali, $\vec{F}_t$, che il ceppo esercita sul tamburo deve ancora compiere lavoro negativo, ossia avere un momento rispetto al centro O del tamburo che si opponga alla rotazione del tamburo stesso, e quindi il risultante di tutte le forze applicate al tamburo dovrà essere ruotato, ancora dell'angolo d'attrito ma in verso opposto rispetto al caso del ceppo di sinistra.
Stando così le cose, la condizione di equilibrio del ceppo si scriverà:

$$Q\,a - F_n\,b + F_t\,c = 0$$

da cui:

$$Q\,a = F_n\,(b - f\,c)$$

e quindi:

$$F_n = \frac{Q\,a}{b - f\,c} \qquad \textbf{(10')}$$

e il momento frenante, che indicheremo ora con il pedice Dx, si dovrà scrivere come:

$$(M_f)_{\mathrm{Dx}} = f F_n\,\varepsilon = \frac{f Q\,a}{b - f\,c}\;2\,r^*\cos\gamma \qquad \textbf{(11')}$$

Si vede dalle (10') e (11') che in questo caso, a parità di forza di chiusura della coppia e di geometria del freno si avrà un maggior valore nel componente normale delle forze agenti sul tamburo e di conseguenza un maggior momento frenante.

Si comprende che la differenza di comportamento del ceppo di sinistra rispetto al ceppo di destra è legato non soltanto alla posizione simmetrica delle rispettive cerniere fisse quanto, e soprattutto, al verso di rotazione del tamburo: è quest'ultimo infatti che decide quale sia il verso della $\vec{F}_t$; quindi, cambiando il verso di $\vec{\omega}$ da antiorario ad orario, si avrà un maggior momento frenante da parte del ceppo di sinistra e minore da parte del ceppo di destra. Lo stesso risultato si avrebbe passando da un freno a ceppi esterni ad un freno ad espansione.
Sinteticamente si può concludere che darà un maggior momento frenante il ceppo che, per effetto della forza tangenziale d'attrito risulta "teso", rispetto al ceppo che risulta "compresso": quindi in un freno a tamburo con entrambe le cerniere fisse in basso darà un maggior momento frenante il ceppo di destra se l'accostamento è esterno, mentre se il freno è ad espansione sarà maggiore il momento frenante del ceppo di sinistra.

Il problema di avere il medesimo momento frenante da parte di entrambi i ceppi è un problema che può anche avere una soluzione o adottando particolari cinematismi, o altri dispositivi, che modifichino il valore della forza di chiusura, oppure disponendo il secondo ceppo in posizione rovesciata rispetto al primo in modo che risultino entrambi tesi o entrambi compressi per un dato verso di rotazione del tamburo.
Tuttavia la scelta di una soluzione di un tipo piuttosto che un altra è sempre da mettere in relazione con la destinazione del freno stesso, ossia con il modo in cui esso si troverà a funzionare: sarà da prendere in considerazione se la rotazione del tamburo ha un verso preferenziale oppure no (veicolo con senso di marcia preferenziale), se il momento frenante complessivo che occorre realizzare debba avere il medesimo valore per entrambi i versi di rotazione del tamburo, ecc.

Un particolare interessante, che si desume dalle (10) e (10'), sta nel fatto che, se si fa variare la posizione della cerniera fissa in modo da portarla sulla retta di applicazione della $\vec{F}_t$ il braccio di quest'ultima diventa nullo (c=0) e quindi l'attrito non influenza più l'equilibrio del ceppo. Ne segue che, a parità di forza di chiusura $\vec{Q}$, la $\vec{F}_n$ avrà sempre lo stesso valore indipendente da quale sia il verso di rotazione del tamburo.

Dalla (10'), inoltre, si vede anche che, nel caso del ceppo di destra, se la differenza a denominatore fosse negativa (b/c < f), la forza di chiusura dovrebbe essere pure essa negativa per poter dar luogo ancora ad una $\vec{F}_n$ rivolta contro il ceppo. Ciò è da interpretarsi nel senso che il momento della $\vec{F}_t$ rispetto alla cerniera fissa è tale da superare quello della $\vec{F}_n$ e che quindi, per l'equilibrio del ceppo, il momento del-

la forza di chiusura dovrebbe essere negativo. Di fatto, in queste condizioni, il ceppo risulta **autofrenante** e potrà essere bene adottato come dispositivo di sicurezza.

§ 4. - Freni a tamburo ad accostamento semilibero.

Un freno a tamburo ad accostamento semilibero (fig. 9) differisce da quello ad accostamento rigido per il fatto che l'elemento frenante, il ceppo, non è direttamente collegato al telaio, ma è invece collegato, mediante una coppia rotoidale A, ad un portaceppo al quale è demandata l'azione di accostamento del ceppo contro il tamburo attraverso una forza di chiusura Q che lo obbliga ad una rotazione intorno ad una cerniera fissa, O_1.

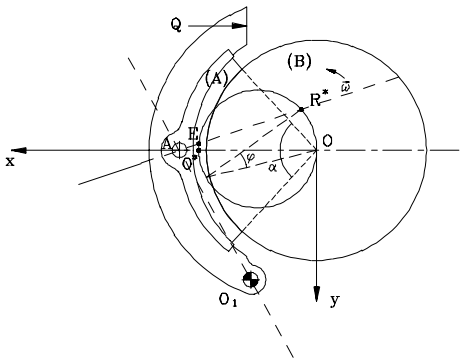


Figura 9

Questa differente geometria non consente di seguire lo stesso procedimento, già seguito per il freno ad accostamento rigido, per trovare le forze che si scambiano ceppo e tamburo: in questo caso, infatti, viene a mancare proprio la prima delle informazioni utilizzate nel procedimento seguito precedentemente, e cioè la posizione del centro di rotazione del ceppo nel suo moto assoluto, ciò che permetteva l'immediata individuazione della retta di accostamento.

Dal punto di vista puramente cinematico l'unica considerazione possibile in proposito è che il moto assoluto del ceppo sarà quello che risulta da un moto relativo al portaceppo, rotazione intorno ad A, e da un moto di trascinamento da parte del ceppo, rotazione intorno ad O_1; il centro del moto assoluto conseguente dovrà trovarsi certamente sulla retta congiungente O_1 ed A, ma non è possibile individuare la sua posizione.

Tuttavia, tra i risultati ottenuti nel precedente paragrafo si è trovato che ci sono due elementi che risultano indipendenti dalla posizione del centro del moto assoluto (la cerniera fissa, in quel caso): il diametro del cerchio Romiti (6), che dipende solamente dalla estensione del contatto e dal raggio del tamburo, e, su di esso, la posizione del polo delle forze risultanti, R*, posizione che dipende dal valore dell'angolo di attrito e dal verso di rotazione del tamburo, la posizione del polo delle forze normali, O, e la posizione del polo delle forze tangenziali, O*.

La conoscenza di questi due elementi sono sufficienti per risolvere il problema.
Infatti, (fig. 10), tracciato il cerchio Romiti ed individuata la posizione su di esso del punto R*, è immediato individuare anche la direzione della risultante complessiva delle forze che si scambiano ceppo e tamburo; il ceppo è sottoposto all'azione di due sole forze, il risultante delle forze che il tamburo esercita su di esso (uguale ed opposto a quello delle azioni che il ceppo esercita sul tamburo) e la reazione vincolare da parte della cerniera A che, se si trascura la presenza di attrito nell'accoppiamento, deve passare proprio per A: per l'equilibrio del ceppo, quindi, queste due forze devono avere la medesima retta di applicazione, che è proprio quella che si diceva potersi individuare.

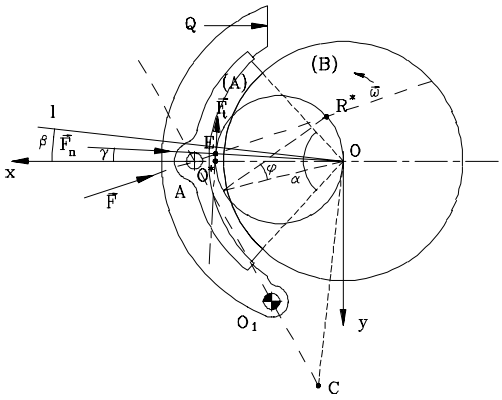


Figura 10

Ora, l'intersezione della retta per R* e per A con il cerchio Romiti è il punto E, punto di applicazione di $\vec{F}$, di $\vec{F}_n$ e di $\vec{F}_t$ e pertanto la congiungente EO è la retta di applicazione del risultante delle forze normali il cui angolo con l'asse delle x è l'angolo γ.
Dal valore di γ, attraverso la (3), si risale agevolmente al valore di β, ossia all'inclinazione sull'asse delle ascisse della retta di accostamento di cui all'inizio mancavano sufficienti informazioni.
L'intersezione della normale per O a questa retta con la congiungente O_1A, infine, ci dà sicuramente il centro del moto assoluto del ceppo nel suo moto di accostamento verso il tamburo per effetto dell'usura della sua superficie di contatto.

Da questo punto in avanti i passi per la determinazione dei moduli delle forze al contatto è identica al caso del freno ad accostamento rigido, dal momento che sono disponibili tutti gli elementi necessari: la condizione di equilibrio del portaceppo porta (10) alla determinazione del modulo di $\vec{F}_n$, e da questo si può ricavare p_0; noto quest'ultimo si può ricavare il momento frenante del ceppo di sinistra (11) o del ceppo di destra (11') risolvendo il problema in modo definivo.

§ 5. - Coppia rotoidale portante-spingente.

Per coppia rotoidale portante-spingente si intende una coppia costituita (fig. 11) da un pattino (A) che, sotto l'azione di una azione esterna di chiusura, venga premuto contro un disco (B) che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno al suo centro O.

La coppia è quindi una coppia di combaciamento (contatto superficiale), e, nella ipotesi che il membro che subisce il logoramento sia il pattino (A), la superficie di contatto della coppia rimane sempre la medesima.

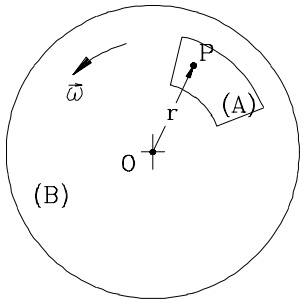


Figura 11

L'applicazione della ipotesi del Reye allo studio di questo tipo di accoppiamento impone di tener conto che la velocità relativa, in ciascun punto del contatto di area dA e distante r dal centro di rotazione O, vale ωr ed è quindi crescente man mano che ci si allontana dal centro verso la periferia del pattino stesso.

Pertanto la (1) andrà scritta come:

$$p = \left(\frac{k}{f}\right)\frac{\delta}{v^{(r)}} = \left(\frac{k}{f\omega}\right)\frac{\delta}{r} \qquad \textbf{(12)}$$

dove il rapporto entro parentesi sarà costante nel funzionamento a regime e per tutti i punti del contatto.

In questo caso, quindi, la legge di distribuzione delle pressioni dipende non soltanto dal valore locale dell'altezza, δ, del volume di materiale localmente usurato, ma anche dalla distanza del punto di contatto considerato dal centro di rotazione del disco.

La determinazione di δ può essere fatta sulla base del moto di accostamento che i vincoli imposti al pattino gli consentono del pattino verso il disco.

Non avendo fatto alcuna ipotesi sui vincoli che impongono il moto di accostamento del pattino verso il disco, si potrà dire, come caso più generale possibile, che lo spostamento che esso subisce per effetto dell'usura, e sotto l'azione della forza di chiusura della coppia, sia quello corrispondente ad un atto di moto elicoidale intorno ad una retta

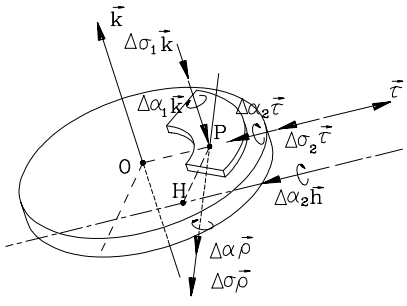


Figura 12

qualsiasi di versore $\vec{\rho}$; spostamento che sarà, quindi, la somma di una rotazione, $\Delta\alpha\vec{\rho}$, e di una traslazione e di una traslazione $\Delta\sigma\vec{\rho}$.
Tale atto di moto può essere scomposto (fig.12) secondo la normale al piano del disco, di versore $\vec{k}$, e secondo la direzione di un versore $\vec{\tau}$ **giacente nel piano del disco**; potremo cioè scrivere:

$$\Delta\alpha\vec{\rho} = \Delta\alpha_1\vec{k} + \Delta\alpha_2\vec{\tau}$$

$$\Delta\sigma\vec{\rho} = \Delta\sigma_1\vec{k} + \Delta\sigma_2\vec{\tau}$$

Avremo così quattro componenti di spostamento: due rotazioni, una secondo il versore $\vec{k}$, ed una secondo il versore $\vec{\tau}$; e due traslazioni, una secondo il versore $\vec{k}$, ed una secondo il versore $\vec{\tau}$.

E' facile comprendere che di questi spostamenti, non tutti sono atti alla determinazione del δ: non certo la rotazione di versore $\vec{k}$, per la quale nessun punto del pattino può avvicinarsi al disco; non certo una traslazione di versore $\vec{\tau}$, per la quale tutti i punti del pattino restano ancora sul piano del disco.
Ne segue che le uniche componenti dello spostamento assoluto che interessano ai fini della misura del δ sono: la traslazione $\Delta\sigma_1\vec{k}$ e la rotazione $\Delta\alpha_2\vec{\tau}$.

Ora, poiché i versori $\vec{\tau}$ e $\vec{k}$ sono fra loro perpendicolari, ossia poiché traslazione e rotazione sono fra loro perpendicolari, è possibile ricomporre queste due componenti di spostamento in un'unica rotazione $\Delta\alpha_2\vec{h}$ intorno ad una retta η di versore $\vec{h}$ parallela al versore $\vec{\tau}$ e **giacente nel piano del disco**.
La rotazione intorno a detta retta ci garantisce che lo spostamento di un qualsiasi punto del pattino avverrà lungo la direzione della normale al piano del disco; ciò è quanto occorre per trovare la distribuzione di δ.

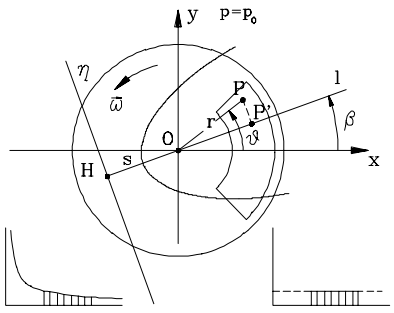


Figura 13

Fissato un riferimento con origine nel centro O del disco ed asse x coincidente con l'asse di simmetria del pattino (fig.13), ciascun punto P del contatto fra pattino e disco risulta individuato dalla sua distanza r da O e dalla sua anomalia ϑ rispetto all'asse delle x; allora, indicando con s la distanza OH della retta η da, e con β l'anomalia della sua normale, il valore di δ in

corrispondenza del generico punto P sarà espresso da:

$$\delta = \mathrm{HP'}\ \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_2\left[s + \cos(\vartheta - \beta)\right]$$

e quindi la (12) si dovrà scrivere come:

$$p = \left(\frac{k}{f\omega}\right)\frac{\delta}{r} = \left(\frac{k\Delta\alpha_2}{f\omega}\right)\frac{s + r\cos(\vartheta - \beta)}{r} = p_0\,\frac{s + r\cos(\vartheta - \beta)}{r} \qquad \textbf{(13)}$$

che definisce la legge di distribuzione delle pressioni al contatto fra pattino e disco.

Si vede dalla (13) che è $p=p_0$ quando $s + r\cos(\vartheta - \beta) = r$, ossia quando HP'=OP: in corrispondenza di quei punti, cioè, la cui distanza dal centro del disco e dalla retta η è la medesima; sono i punti che si trovano sulla parabola di cui il centro O è il fuoco e la retta η è la direttrice, e di cui la retta l, normale per O alla retta η è l'asse.

Tale retta l è allora analoga alla **retta di accostamento** già individuata per la coppia rotoidale portante; infatti, si vede sempre dalla (13), il valore massimo della pressione, p_{max}, a parità di r, si avrà quando $\vartheta = \beta$ ossia quando il punto sta sulla normale alla retta η. Per tali punti sarà allora:

$$p_{\max} = p_0\left(1 + \frac{s}{r}\right)$$

Infine, se si vuole che tutto il pattino sia attivo, ossia che sia $p>0$ per tutti i punti del contatto, deve essere verificato in ogni punto che sia $s + r\cos(\vartheta - \beta) \geq 0$, il che vuol dire anche che, per tutti i punti del pattino, deve essere comunque verificata la condizione:

$$s \geq -r\cos(\vartheta - \beta)$$

Ciò vuol dire che la retta η non deve tagliare il pattino in alcun punto.

Conviene esprimere la (13) separando i due termini della somma ed ammettere che punto per punto la pressione al contatto risulti dalla sovrapposizione di una doppia distribuzione di pressione:

$$p' = p_0\,\frac{s}{r}$$

$$p'' = p_0\cos(\vartheta - \beta)$$

la prima che dipende esclusivamente dalla distanza, r, del punto dal centro, O, del disco; la seconda che dipende solamente dalla sua anomalia, ϑ.

Il principio di sovrapposizione degli effetti consente di risolvere separatamente per ciascuna delle due distribuzioni di pressione e di sommare dopo i risultati ottenuti.

§ 6. - Freni a disco ad accostamento rigido.

Si consideri un disco (A) di centro O che ruoti con velocità angolare $\vec{\omega}$ in senso antiorario. A contatto con esso, e premuto da una forza di chiusura Q, si abbia un pattino (B) la cui superficie di contatto sia un settore circolare, ancora di centro O, di estensione angolare α, di cui sia r_1 il raggio minore ed r_2 il raggio maggiore; l'area della superficie di contatto sarà quindi:

$$A = \alpha r_m \left(r_2 - r_1 \right)$$

con:

$$r_m = \left(r_1 + r_2 \right) / 2 .$$

Supponendo, come deve essere, che tutto il pattino sia attivo, cerchiamo le forze che il pattino esercita sul disco per effetto della distribuzione di pressione indicata con p' ed utilizziamo, allo scopo, un riferimento con origine nel centro O del disco, asse x coincidente con l'asse di simmetria del pattino, ed asse y ruotato di 90° in verso antiorario.
Per effetto della pressione p', su ciascun elemento $dS=rd\vartheta dr$ dell'area di contatto si eserciterà un'azione elementare data da:

$$dF'_z = p' dS = p' r d\vartheta dr = p_0 \frac{s}{r} r d\vartheta dr = p_0 s d\vartheta dr \qquad \textbf{(14)}$$

Si ha quindi una distribuzione di vettori tutti paralleli fra loro e perpendicolari al piano del disco.
Pertanto **il risultante delle azioni normali dovuto alle p'** si otterrà come:

$$F'_z = \iint_A dF'_z = p_0 s \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} dr = p_0 s \alpha \left(r_2 - r_1 \right) \qquad \textbf{(15)}$$

oppure come:

$$F'_z = p_0 s \frac{A}{r_m} \tag{15'}$$

Tale risultante, essendo quello di una distribuzione di azioni normali elementari simmetrica rispetto all'asse di simmetria del pattino, avrà come punto di applicazione un punto B_z' dell'asse delle x, che si troverà ad una distanza b_z' da O tale per cui il suo momento, rispetto all'asse delle y, eguagli (teorema di Varignon) il risultante dei momenti delle $d\vec{F}'_z$. Pertanto, poiché la distanza del generico punto P del contatto vale $x = r\cos\vartheta$, dovrà essere (v. App. B-1.2):

$$M_y' = F_z' b_z' = \iint_A dF_z' r\cos\vartheta = p_0 sA \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

e quindi si può ricavare:

$$b_z' = \frac{M_y'}{F_z'} = r_m \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \tag{16}$$

La (16) mostra (fig.14) che la posizione del punto di applicazione del risultante $\vec{F}'_z$ dipende solamente dalla geometria del pattino e che, qualunque sia l'estensione angolare del pattino stesso, esso si troverà sempre ad una distanza minore del raggio medio, r_m.

Consideriamo adesso le azioni tangenziali corrispondenti: a ciascuna $d\vec{F}'_z$ corrisponderà una $d\vec{F}'_t = f d\vec{F}'_z$ giacente nel piano del disco ed avente la direzione della perpendicolare in P alla congiungente OP e verso tale da opporsi al verso di $\vec{\omega}$. Di tale distribuzione occorre trovare il risultante $\vec{F}'_t$.

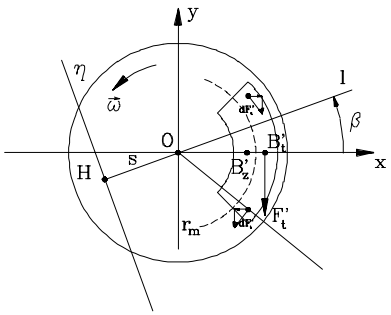


Figura 14

A tale scopo conviene notare subito che, per elementi dS simmetrici rispetto all'asse delle x, in virtù della simmetria della distribuzione delle $d\vec{F}'_z$, le componenti di ciascuna $d\vec{F}'_t$ parallele all'asse delle x saranno certamente eguali ed opposte. Ne segue che il risultante $\vec{F}'_t$ dovrà certamente essere parallelo all'asse delle y, e che il suo modulo potrà essere determinato sommando solamente le componenti delle $d\vec{F}'_t$ lungo tale direzione.

Sarà cioè:

$$F_t' = F_y' = \iint_A dF_t' \cos\vartheta = \iint_A f dF_z' \cos\vartheta$$

Risolvendo l'integrale e tenendo conto della (15'), si ottiene (v. App. B-1.3):

$$F_t' = f F_z' \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \qquad \textbf{(17)}$$

Con lo stesso criterio utilizzato per la $\vec{F}'_z$ possiamo, ora, determinare il punto, B_t', punto di applicazione della $\vec{F}'_t$; per i motivi di simmetria prima evidenziati tale punto dovrà trovarsi (fig.14) ancora sull'asse delle x ad una distanza b_t' da O tale per cui sia:

$$M_O' = F_t' b_t' = \iint_A f dF_t' r$$

Si ottiene (v. App. B-1.4):

$$F_t' b_t' = f p_0 s A = f F_z' r_m$$

e quindi, poi:

$$b_t' = \frac{f F_z' r_m}{F_t'} = r_m \frac{\alpha/2}{\operatorname{sen}(\alpha/2)} \qquad \textbf{(18)}$$

Possiamo allora concludere che anche la posizione del punto B_t' dipende solamente dalla geometria del pattino ma che si trova ad una distanza da O maggiore del raggio medio del pattino stesso.
Cerchiamo adesso **il risultante delle azioni normali dovute alla distribuzione p"** ricordando che era:

$$p'' = p_0 \cos(\vartheta - \beta)$$

e che questa è una legge di distribuzione che presenta un asse di simmetria che è proprio la retta l, inclinata dell'angolo β sull'asse delle x.
A questa pressione corrisponderà, punto per punto, su un elemento dS dell'area di contatto, una azione normale elementare pari a:

$$dF_z'' = p'' dS = p_0 \cos(\vartheta - \beta) r dr d\vartheta$$

L'insieme di tali azioni elementari costituisce una distribuzione di vettori tutti perpendicolari al piano del disco, il cui risultante sarà dato da:

$$F_z'' = \iint_A p'' dA = \iint_A p_0 \cos(\vartheta - \beta) r dr d\vartheta$$

Risolvendo l'integrale (v. App. B-2.1) si ottiene:

$$F_z'' = p_0 A \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \cos\beta \qquad \textbf{(19)}$$

e questa mostra che il modulo di $\vec{F}''_z$ risulta via via minore man mano che l'angolo β cresce da 0 a $\pi/2$, ossia man mano che la retta η si allontana dalla direzione perpendicolare all'asse delle x.

Per determinare il punto di applicazione di $\vec{F}''_z$, che indicheremo con B_z'', occorre, ora, tener conto del fatto che la retta l, asse di simmetria della distribuzione teorica delle p", non coincide con l'asse di simmetria del pattino; pertanto B_z'' dovrà stare (fig.15) su una retta inclinata sull'asse delle x di un certo angolo γ che è da determinare, e ad una certa distanza b_z'', anche questa da determinare.

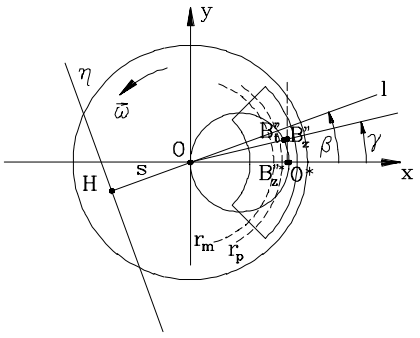


Figura 15

L'anomalia γ di questa retta sarà quella per cui il risultante dei momenti di tutti i dF_z'' rispetto ad essa sarà nullo. Pertanto dovrà essere:

$$M_\gamma'' = \iint_A dF_z'' \, r \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) = 0$$

essendo $r\operatorname{sen}(\vartheta-\gamma)$ la distanza del generico punto P dalla retta in questione. Si trova di nuovo (v. App. B-2.2.1) che la relazione che lega l'angolo γ all'angolo β è:

$$\tan\gamma = \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha - \operatorname{sen}\alpha} \tan\beta \qquad \textbf{(20)}$$

funzione soltanto, quindi, della estensione angolare del contatto.

La distanza b_z'' si ottiene imponendo che il momento di $\vec{F}''_z$ rispetto ad una retta perpendicolare a quella inclinata di γ e passante per il centro O del disco debba essere uguale al risultante dei momenti di tutti i $d\vec{F}''_z$ rispetto alla stessa retta.

Dovremo cioè scrivere:

$$F_z'' b_z'' = \iint_A dF_z'' \, r\cos(\vartheta - \gamma) = p_0 \iint_A \cos(\vartheta - \beta) r \cos(\vartheta - \gamma) r dr d\vartheta$$

per trovare in definitiva (v. App. B-2.2.2):

$$b_z'' = r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} \frac{1}{\cos\gamma} \qquad \textbf{(21)}$$

con:

$$r_p = r_m \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta r}{r_m} \right)^2 \right]$$

La (21) rappresenta in definitiva la distanza del punto B_z" da O sulla radiale inclinata di γ; questa distanza potrà essere, di massima, minore o maggiore del raggio medio r_m a seconda della estensione angolare del pattino e della sua larghezza. Infatti mentre r_p è certamente maggiore di r_m il fattore per cui deve essere moltiplicato è sempre minore dell'unità e tanto più piccolo quanto più cresce il valore di α; in effetti risulterà b_z">r_m quando il pattino non è troppo largo ed α non troppo grande: condizioni queste in cui, peraltro, normalmente nella pratica si ricade.

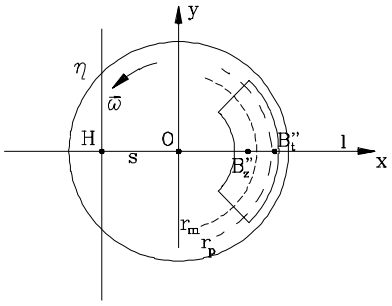


Figura 16

Si può osservare, d'altra parte, che il risultante $\vec{F}''_z$, applicato nel punto B_z", può invece pensarsi (fig.15) applicato nel punto B_z"* dell'asse di simmetria del pattino, e quindi sull'asse delle x, aggiungendo il corrispondente momento di trasporto, che vale:

$$M_x = B_z'' B_z''^* F_z'' = b_z'' \operatorname{sen}\gamma F_z''$$

Sostituendo le espressioni (199 e (21) si ha:

$$M_x = r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} \tan\gamma F_z'' = \mathrm{p}_0 A r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} \tan\gamma \cos\beta$$

Tenendo conto, poi, della (20) si ottiene:

$$M_x = \mathrm{p}_0 A\, r_p \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} \operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(22)}$$

Nel caso in cui i vincoli effettivi del pattino siano tali per cui l'asse η risulta parallela all'asse delle y (fig.16), la retta l coinciderebbe con l'asse delle x e si avrebbe $\boldsymbol{\beta=0}$ ed anche (21) γ=0.
In tal caso è cosβ=cosγ=1 e quindi la (20) e la (21) diventano:

$$F_z'' = p_0 A \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \qquad \textbf{(20')}$$

e

$$b_z'' = r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} \qquad \textbf{(21')}$$

Si ha una situazione particolare quando è, invece, **$\beta=\pi/2$**, ossia quando la retta η ha direzione parallela all'asse delle x: poiché risulta $\cos\beta=0$, risulta anche $\vec{F}''_z = 0$, il che corrisponde al fatto che si ha:

$$dF_z'' = p_0 \cos(\vartheta - \pi/2) r dr d\vartheta = p_0 \operatorname{sen}\vartheta \; r dr d\vartheta$$

e quindi una distribuzione forze elementari normali al contatto che risulta simmetrica rispetto all'asse delle x e di segno opposto.

Ciò implica allora la esistenza di un momento risultante $\vec{M}_x$ il cui asse momento coincide proprio con l'asse delle x; e, poiché la distanza del generico punto P da x vale $r\operatorname{sen}\vartheta$, sarà:

$$M_x = \iint_A dF_z'' \, r \operatorname{sen}\vartheta = p_0 \iint_A r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \; dr d\vartheta$$

Tale momento vale (v. App. B-2.2.2.2):

$$M_x = p_0 A r_p \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} \qquad \textbf{(22')}$$

che è poi ciò che si otterrebbe dalla (22) ponendo $\beta=\pi/2$.

Possiamo ora cercare il **risultante delle azioni tangenziali dovute alla distribuzione p"**.

La distribuzione delle $d\vec{F}''_t = f d\vec{F}''_z$ è una distribuzione di vettori ciascuno perpendicolare alla congiungente il punto con il centro O del disco e giacenti nel suo piano. D'altra parte, per quanto detto sulla distribuzione delle $d\vec{F}''_z$ e sul significato della retta inclinata dell'angolo γ, dovrà essere nullo (v. App. B-2.3.1) il risultante di tutte le componenti delle $d\vec{F}''_t$ parallele a questa retta, in quanto, per punti simmetrici ad essa,esse risultano a due a due eguali ed opposte.

Il risultante $\vec{F}''_t$ sarà pertanto dato dalla somma delle sole componenti perpendicolari alla retta inclinata dell'angolo γ, e cioè (v. App. B-2.3.2) da:

$$F_t'' = \iint_A f dF_z'' \cos(\vartheta - \gamma) = f p_0 \iint_A \cos(\vartheta - \beta)\cos(\vartheta - \gamma) r dr d\vartheta$$

La risoluzione di questo integrale darà allora:

$$F_t'' = f F_z'' \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} \frac{1}{\cos\gamma} \qquad \textbf{(23)}$$

e si vede che il modulo del risultante delle forze tangenziali dovute alle p", a parità di estensione angolare del pattino, diminuisce al diminuire dell'angolo γ: al di sotto di un certo valore di γ (<40°) risulta anche inferiore al prodotto fF_z", ossia si avrebbe un effetto equivalente a quello corrispondente ad un coefficiente di attrito più basso.
Il vettore, come forza agente sul disco, avrà la direzione della perpendicolare alla retta inclinata di γ e verso tale da opporsi alla rotazione del disco.

Il punto di applicazione di $\vec{F}''_t$ (fig.15) può essere determinato imponendo che il suo momento rispetto al centro O del disco sia il medesimo del momento risultante di tutte le $d\vec{F}''_t$ (teorema di Varignon); indicando con b_t"=OB_t" la distanza da O della retta di applicazione di $\vec{F}''_t$, dovrà allora essere:

$$F_t'' b_t'' = \iint_A dF_t'' r = f \iint_A dF_z'' r = f \iint_A p'' r^2 dr d\vartheta$$

e da questa si ricava (v. App. B-2.4):

$$b_t'' = r_p \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha} \cos\gamma \qquad \textbf{(24)}$$

Si trova allora che il punto B_t" è un punto della retta inclinata di γ la cui posizione risulta definita dal segmento, staccato sull'asse delle x, tale che sia:

$$OO^* = r_p \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha} \qquad \textbf{(25)}$$

la cui lunghezza dipende solamente dalla geometria del pattino.
Anche in questo caso, come già visto per i freni a tamburo, si individua una circonferenza il cui diametro giace sull'asse di simmetria del pattino ed è pari ad OO*: valore certamente maggiore del raggio medio, in quanto si è già visto che è $r_p > r_m$.
L'intersezione della retta inclinata di γ con questa circonferenza individua il punto B_t", punto di applicazione della $\vec{F}''_t$ la cui direzione quindi

dovrà necessariamente intersecare l'asse delle x in O* qualunque sia il valore dell'angolo γ. A ragione, quindi, il punto O* può definirsi **polo delle forze tangenziali dovute alle p"**.

Nel caso in cui sia $\beta=0$ e quindi anche $\gamma=0$ (fig.16), la (23) si riduce a:

$$F_t'' = \left[F_t''\right]_y = fF_z'' \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} \qquad \textbf{(23')}$$

e si avrà, allora, le condizione in cui il modulo di $\vec{F}''_t$ assume, per dato α, il suo valore minimo; analogamente la (24) diventa identica alla (25) indicando come il punto B_t" vada a coincidere con il polo O*.

Quando invece è $\beta=\pi/2$, sarà sempre nulla la somma delle componenti delle dF_t" lungo la direzione della retta inclinata di γ ($\gamma=\pi/2$), e cioè della componenti parallele all'asse delle y, e quindi il modulo del risultante $\vec{F}''_t$ sarà dato dalla sola somma delle componenti delle $d\vec{F}''_t$ lungo la direzione dell'asse delle x; e ciò vuol dire:

$$F_t'' = \iint_A fdF_z'' \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = fp_0 \iint_A \operatorname{sen}^2\vartheta \, rdrd\vartheta$$

Il calcolo (v. App. B-2.3.2.2) porta a trovare che è:

$$F_t'' = \left[F_t''\right]_x = fp_0 A \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} \qquad \textbf{(23")}$$

Dalla (24) si deduce poi che in questo caso sarà Ob_t"=0, risultato, peraltro, del tutto ovvio se si ricorda che il punto B_t" si muove con la retta inclinata di γ ma stando sempre sulla intersezione di questa con la circonferenza precedentemente individuata.

Si hanno a questo punto tutti gli elementi necessari alla valutazione del **momento frenante** che si avrà come effetto delle azioni tangenziali tra pattino e disco, sia quelle dovute alla distribuzione p' sia quelle dovute alla distribuzione p".
Tenendo conto delle (17) e (18) e delle (23) e (24) si ha:

$$M_f = M_z = F_t' b_t' + F_t'' b_t'' = fF_z' r_m + fF_z'' r_p$$

e quindi, tendo conto della (15') e della (19):

$$M_f = fp_0 A\left(s + r_p \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}\cos\beta\right) \qquad \textbf{(26)}$$

L'effettiva valutazione del momento frenante, come pure dei moduli di tutte le forze e dei momenti agenti sul disco, dipende dalla determinazione di p_0 e della distanza s della retta η dal centro del disco; e la determinazione di s, a sua volta, dipende dalla disposizione effettiva dei vincoli cui è soggetto il pattino nel suo moto di accostamento verso il disco.

Consideriamo il caso in cui il pattino (fig.17) si possa muovere ruotando intorno alla coppia rotoidale fissa O_1, per effetto della forza di chiusura **Q**, e ipotizziamo che l'asse della coppia sia perpendicolare all'asse di simmetria del pattino.

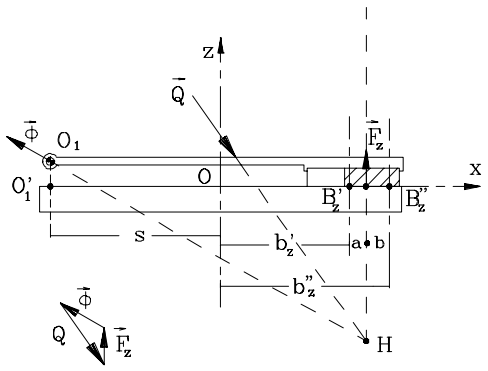


Figura 17

In queste condizioni si ha $\beta=0$ e, d'altra parte, ai fini della valutazione dell'usura (δ), la rotazione intorno ad O_1 può essere scomposta in una rotazione intorno al punto O_1' sul piano del disco ed in una traslazione nella direzione perpendicolare ad O_1O_1', che non interessa il δ. Il punto O_1' sul piano del disco è quindi la traccia dell'asse η, e la distanza OO_1' è proprio s che è quindi noto.

Se si fa poi l'ipotesi che la forza di chiusura Q stia nel piano xz, l'equilibrio alla rotazione del pattino è l'equilibrio tra la $\vec{Q}$, il risultante complessivo, $\vec{F}_z$, di tutte le azioni normali esercitate dal disco sul pattino (eguali ed opposte a quelle che il pattino esercita sul disco), e la reazione vincolare, $\vec{\Phi}$, in O_1.

Tuttavia il triangolo di equilibrio si può chiudere solo a patto di conoscere la retta di applicazione di $\vec{F}_z$. Questa dovrà essere parallela alle rette di applicazione di $\vec{F}'_z$ e di $\vec{F}''_z$ e, poiché questi ultimi sono concordi, tagliare il pattino in un punto B_z intermedio tra B_z' e B_z".

D'altra parte, essendo $\vec{F}_z = \vec{F}'_z + \vec{F}''_z$, dovrà pure essere:

$$F'_z \overline{B'_z B_z} = F''_z \overline{B_z B''_z}$$

da cui:

$$\frac{F_z^{'}}{F_z^{''}} = \frac{\overline{B_z B_z^{''}}}{\overline{B_z^{'} B_z}} = \frac{b}{a} = \frac{p_0 s \dfrac{A}{r_m}}{p_0 A \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}} = \frac{s}{r_m} \frac{\alpha/2}{\operatorname{sen}(\alpha/2)} \qquad \textbf{(27)}$$

Inoltre, deve pure essere:

$$a + b = b_z^{''} - b_z^{'} = r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4 \operatorname{sen}(\alpha/2)} - r_m \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \qquad \textbf{(28)}$$

Poiché le quantità che compaiono nella (27) e nella (28) sono tutte note, in quanto dipendono solamente dalla geometria del pattino, le quantità a e b possono essere determinate e quindi è pure determinato il punto B_z e la retta di applicazione di $\vec{F}_z$.

L'intersezione, H, fra quest'ultima e la retta di applicazione della $\vec{Q}$ consente allora di definire la retta di applicazione della reazione vincolare $\vec{\Phi}$, e di chiudere il triangolo di equilibrio del pattino, ricavando quindi sia $\vec{\Phi}$ che $\vec{F}_z$.

Poiché, come detto sopra, è:

$$F_z^{'} + F_z^{''} = p_0 A \left[\frac{s}{r_m} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \right] = F_z$$

il valore di p_0 adesso è pure noto, e con esso anche il momento frenante (26).

§ 7. - Freni a disco ad accostamento semilibero.

Consideriamo adesso il caso (fig.18) in cui il pattino non si accosti al disco con un moto rigido ma sia incernierato ad un estremo del portapattino, in O_2, attraverso una coppia rotoidale mobile.

Si fa ancora l'ipotesi che gli assi delle coppie rotoidali siano perpendicolari all'asse di simmetria del pattino ($\beta=0$), e che sia nota la forza di chiusura $\vec{Q}$ applicata al portapattino.

In queste condizioni di vincolo, tale moto di accostamento è un moto composto ed è quindi indeterminata la posizione della retta η: sarà

certamente ancora sul piano del disco, ma non è più nota la sua distanza, s, dal centro di rotazione, O, del disco.
Si ha allora un'incognita in più oltre al valore di p_0.
La soluzione di un problema di questo tipo, tuttavia, si ottiene ugualmente se si considera che per l'equilibrio del pattino, in assenza di attrito nella coppia rotoidale O_2, devono avere la medesima retta di applicazione sia il risultante $\vec{F}_z$ delle forze normali complessive che la reazione vincolare in O_2. Nota la geometria del sistema, quindi, è pure nota, nel piano di figura, la posizione della retta di applicazione di $\vec{F}_z$ ossia la distanza OH.

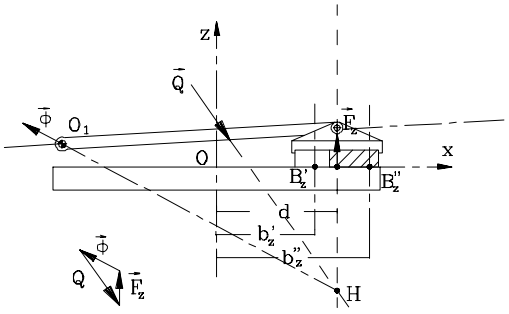


Figura 18

E' quanto basta per imporre l'equilibrio del portapattino, sottoposto all' azione della $\vec{Q}$, di $\vec{F}_z$, e della reazione vincolare, $\vec{\Phi}$, in O_1, e, dal triangolo di equilibrio trovare il modulo di $\vec{F}_z$, che vale:

$$F_z = F_z^{'} + F_z^{"} = p_0 A \left[\frac{s}{r_m} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \right] \qquad \textbf{(29)}$$

Nella (29), tuttavia, compaiono entrambe le incognite, s e p_0.
Ma, deve ancora essere (27):

$$\frac{F_z^{'}}{F_z^{"}} = \frac{b}{a} = \frac{s}{r_m} \frac{\alpha/2}{\operatorname{sen}(\alpha/2)} \qquad \textbf{(30)}$$

in cui il rapporto b/a è noto in quanto è:

$$a = \overline{OH} - b_z^{'} = \overline{OH} - r_m \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

$$b = b_z^{"} - \overline{OH} = r_p \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} - \overline{OH}$$

Dalla (30) allora si può ricavare il valore di s, e poi dalla (29) il valore di p_0, risolvendo il problema.

§ 8. - Altre applicazioni dell'ipotesi del Reye.

a) Perno spingente a testa piana.

Si consideri (fig. 19) un perno a testa piana caricato lungo il suo asse longitudinale da una forza $\vec{Q}$ e appoggiato su una superficie piana; il vincolo laterale è costituito da un accoppiamento rotoidale.
Il perno, inoltre, ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ per effetto di una coppia C_m.
Il contatto fra le due superfici piane, esteso fra i raggi r ed R, è un contatto di strisciamento ed è quindi applicabile l'ipotesi del Reye che può scriversi come:

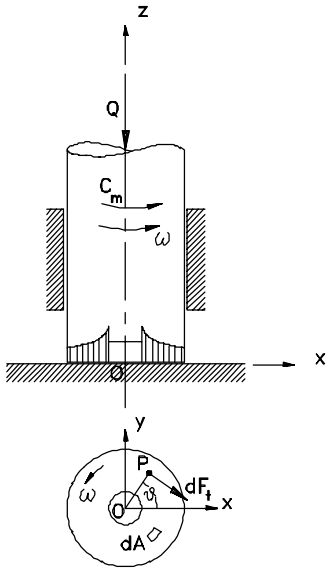


Figura 19

$$p = \frac{k\delta}{fv^{(r)}} = \frac{k\delta}{f\omega x} \qquad \textbf{(31)}$$

Poiché il moto di accostamento del perno verso il piano è un moto puramente traslatorio, sarà per tutti i punti del contatto $\delta=cost=\delta_0$ e pertanto la (31) diventa:

$$p = \frac{k\delta_0}{f\omega}\frac{1}{x} = \frac{p_0}{x} \qquad \textbf{(32)}$$

che mostra una distribuzione di pressione al contatto di tipo iperboloidico con asse di simmetria lo stesso asse del perno.
Su ciascun elemento di area di contatto, $dA=x d\vartheta dx$, si avrà, di conseguenza, una forza normale elementare pari a:

$$dF_n = pdA = \frac{p_0}{x}dA = \frac{p_0}{x}xd\vartheta dx = p_0 d\vartheta dx$$

e a questa distribuzione corrisponde il risultante:

$$F_n = \int_A p_0 d\vartheta dx = 2\pi p_0 \int_r^R dx = 2\pi p_0 (R-r) \qquad \textbf{(33)}$$

e, poiché l'area della superficie totale vale $A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$, la (33) si può anche scrivere:

$$F_n = 2\frac{Ap_0}{R+r} = \frac{Ap_0}{r_m} \qquad \textbf{(33')}$$

con r_m il raggio medio del contatto.
L'effettivo valore di $\vec{F}_n$ non è ancora noto in quanto è incognito il valore di p_0: questo può essere ricavato imponendo che per l'equilibrio alla traslazione del perno deve essere $\vec{F}_n = -\vec{Q}$ e quindi deve essere:

$$p_0 = \frac{Q}{A} r_m$$

Di conseguenza il diagramma delle pressioni al contatto avrà la forma:

$$p = p_0 \frac{1}{x} = \frac{Q}{A}\frac{r_m}{x} \qquad \textbf{(34)}$$

Ad ogni $d\vec{F}_n$, poi, corrisponde un $d\vec{F}_t = f d\vec{F}_n$ giacente sul piano di contatto, la cui direzione è quella della perpendicolare alla OP e verso tale da opporsi alla velocità relativa in P.
Data la simmetria della distribuzione dei $d\vec{F}_t$ (eguali ed opposti per ogni coppia di punti dello stesso diametro simmetrici rispetto ad O), sarà nullo il risultante $\vec{F}_t$ delle azioni tangenziali; non sarà invece nullo il loro momento risultante M_f che sarà dato da:

$$M_f = \int_A dF_t x = f\int_A x dF_n = 2\pi f p_0 \int_r^R x dx = \pi f p_0\left(R^2 - r^2\right) \qquad \textbf{(35)}$$

Tenuto conto poi della espressione di p_0 e che è $A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$, la (35) vale:

$$M_f = f p_0 A = f\frac{Q}{A} r_m A = fQr_m \qquad \textbf{(36)}$$

L'effetto delle azioni al contatto è quindi quello di generare un momento frenante equivalente a quello che si avrebbe se il carico Q agisse come forza tangenziale di attrito, a distanza dal centro pari al raggio medio dell'area di contatto.

b) Perno spingente a testa conica.

Mantenendo le stesse ipotesi del caso precedente, esaminiamo il caso (fig. 20) in cui il perno abbia una testa a forma di tronco di cono di semiapertura (π-2α), e ruoti impegnato in un foro la cui superficie coniugata a quella del perno abbia un raggio minimo r ed un raggio massimo R corrispondenti ad uno spessore h=(R-r)tanα.
Il moto di accostamento del perno per effetto dell'usura è ancora un moto traslatorio che provocherà un affondamento costante, δ_0, per tutti i punti del contatto nella direzione dell'asse z: nella direzione normale alla superficie di contatto l'usura sarà misurata allora da:

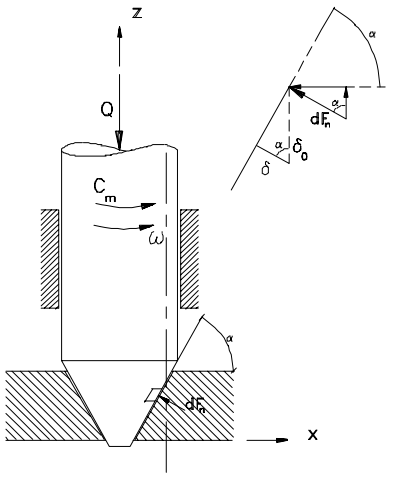


Figura 20

$$\delta = \delta_0 \cos\alpha$$

e a questa corrisponderà, per l'ipotesi del Reye, una distribuzione di pressione del tipo:

$$p = \frac{k\delta}{fv^{(r)}} = \frac{k\delta_0}{f\omega}\frac{\cos\alpha}{x} = p_0 \cos\alpha \frac{1}{x}$$

Allora, poiché l'area elementare di contatto vale:

$$dA = \frac{dx}{\cos\alpha} x d\vartheta \qquad \textbf{(37)}$$

l'azione normale elementare in corrispondenza ad ogni punto è data da:

$$dF_n = pdA = p_0 \cos\alpha \frac{1}{x}\frac{dx}{\cos\alpha} x d\vartheta = p_0 dx d\vartheta \qquad \textbf{(38)}$$

Questo è un vettore perpendicolare alla superficie di contatto e risulta quindi inclinato di α rispetto all'asse z che è anche l'asse di simmetria della distribuzione di tale insieme di vettori.
Ne segue che sarà certamente nulla il risultante delle componenti parallele all'asse delle x, mentre il risultante delle componenti secondo l'asse z è diverso da zero e deve, a sua volta, equilibrare il carico **Q**.
Sarà allora:

$$F_n = Q = \int_A dF_n \cos\alpha = 2\pi p_0 \cos\alpha \int_r^R dx = 2\pi p_0 \cos\alpha (R - r) \qquad \textbf{(39)}$$

Questa, tenendo conto che dalla (37) si ha:

$$A = \frac{2\pi}{\cos\alpha} \int_r^R x dx = \frac{\pi}{\cos\alpha} \left(R^2 - r^2 \right) \qquad \textbf{(40)}$$

si può ancora scrivere come:

$$F_n = Q = 2\pi p_0 \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} \frac{R^2 - r^2}{R + r} = p_0 \cos^2\alpha \frac{A}{r_m} \qquad \textbf{(41)}$$

Essendo noto il valore di Q la (41) permette di ricavare il valore di p_0, ossia:

$$p_0 = \frac{Q}{A \cos^2\alpha} r_m \qquad \textbf{(42)}$$

con il quale risulta definita la legge di distribuzione delle pressioni al contatto.
Per quanto riguarda il momento resistente dovuto alle azioni tangenziali si potrà, infine, scrivere:

$$M_f = \int_A dF_t x = f \int_A dF_n x = 2\pi f p_0 \int_r^R x dx = \pi f p_0 \left(R^2 - r^2 \right)$$

ossia, tenendo conto della (40) e della (42):

$$M_f = f p_0 A \cos\alpha = f A \cos\alpha \frac{Q r_m}{A \cos^2\alpha} = \frac{f}{\cos\alpha} Q r_m$$

Si vede che si ha una maggiorazione virtuale del coefficiente di attrito che dipende dall'angolo di semiapertura del cono e che sarà tanto più basso quanto maggiore sarà quest'ultimo.

c) Pattino con cerniera fissa.

Per l'ipotesi del Reye, e tenendo conto che il moto relativo è traslatorio, si può scrivere:

$$p = \frac{k\delta}{f v^{(r)}} = k'\delta \qquad \textbf{(43)}$$

Il moto di accostamento del pattino verso il piano è una rotazione intor-

no alla cerniera fissa C: l'atto di moto che può dare in ogni punto del contatto un affondamento δ perpendicolare alla superficie di contatto è invece una rotazione intorno al punto O, piede della perpendicolare al piano condotta da C; ciò equivale a scomporre la rotazione intorno a C, in una rotazione intorno ad O ed in una traslazione perpendicolare ad OC.

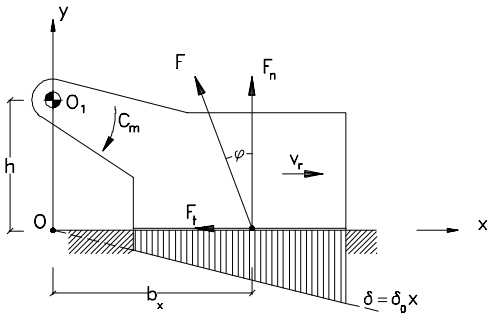


Figura 21

Scegliendo tale punto O come origine del riferimento, sarà:

$$\delta = \delta_0 x$$

che, sostituita nella (43), dà:

$$p = \frac{k\delta_0}{fv^{(r)}} x = p_0 x \qquad \textbf{(44)}$$

Il diagramma delle pressioni sarà quindi un diagramma lineare con pendenza p_0, esteso fra le ascisse x_1 ed x_2.
E' poi, indicando con a la larghezza del pattino, $dA = a\,dx$ per cui:

$$A = \int_S dA = a\int_{x_1}^{x_2} dx = a(x_2 - x_1)$$

Il risultante delle forze normali agenti sul pattino è quindi dato da:

$$F_n = \int_S dF_n = \int_S p\,dA = p_0 a\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{1}{2} p_0 a\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

che, considerando che è:

$$\frac{1}{2}a\left(x_2^2 - x_1^2\right) = a(x_2 - x_1)\frac{x_1 + x_2}{2} = Ax_m$$

si può scrivere come:

$$F_n = p_0 A x_m \qquad \textbf{(45)}$$

La retta di applicazione di $\vec{F}_n$, perpendicolare al piano, si troverà ad una distanza da O tale che il momento di $\vec{F}_n$ uguagli il risultante dei momenti di tutte le $d\vec{F}_n$, per cui sarà:

$$F_n b_x = \int_S x dF_n = p_0 a \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3} p_0 a \left(x_2^3 - x_1^3 \right)$$

da cui:

$$b_x = \frac{\frac{1}{3} p_0 a \left(x_2^3 - x_1^3 \right)}{\frac{1}{2} p_0 a \left(x_2^2 - x_1^2 \right)} = \frac{\frac{1}{3} \left(x_2^3 - x_1^3 \right)}{\frac{1}{2} \left(x_2^2 - x_1^2 \right)} = x_m \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta x}{x_m} \right)^2 \right] = x_p \quad \textbf{(46)}$$

con $\Delta x = x_2 - x_1$.
Si noti, infatti, che la forma della (46) è identica alla espressione già trovata nell'analisi dei freni a disco (v. App. 2.2.2).
Il punto di applicazione della $\vec{F}_n$ si trova quindi ad una distanza maggiore dell'ascissa media del contatto.
Poiché a ciascuna $d\vec{F}_n$ corrisponde una $d\vec{F}_t = f d\vec{F}_n$, sarà anche $\vec{F}_t = f\vec{F}_n$, e, per l'equilibrio del pattino, si può scrivere:

$$C_m - b_x F_n + h F_t = C_m - b_x F_n + hf F_n = C_m - F_n \left(b_x - hf \right) = 0$$

e da questa ricavare il modulo di $\vec{F}_n$ in funzione di quantità tutte note. E' cioè:

$$F_n = \frac{C_m}{b_x - hf} = \frac{C_m}{x_p - hf} \quad \textbf{(47)}$$

Il valore di F_n, ricavato dalla (47), sostituito nella (45), consente di ricavare il valore di p_0 e di avere il diagramma vero delle pressioni al contatto.
La potenza perduta per attrito sarà data da:

$$P_w = F_t v^{(r)} = f F_n v^{(r)} = \frac{f C_m v^{(r)}}{x_p - hf} \quad \textbf{(48)}$$

Una particolare riflessione merita l'espressione (47): se la geometria del pattino fosse tale per cui si avesse a denominatore $x_p < hf$, non potendo essere $F_n < 0$ ché significherebbe un'azione dal pattino contro il piano, dovrà essere invece $C_m < 0$ ossia che, per l'equilibrio del pattino, non si dovrà fornire una coppia di chiusura ma anzi una coppia che alleggerisca il carico sul pattino stesso. L'interpretazione di una tale situazione è che l'azione complessiva al contatto del piano verso il pattino è tale da provocare l'impuntamento del pattino stesso: infatti se la distanza del punto di applicazione della $\vec{F}$ è tale da verificare la disuguaglianza in questione, il vettore $\vec{F}$, la cui retta di applicazione passerebbe alla sinistra (per il caso in figura) della coppia rotoidale, darebbe luogo esso

stesso ad una coppia di chiusura.

Si può ancora osservare che, invertendo il verso della velocità relativa fra pattino e piano, l'equazione di equilibrio del pattino darebbe:

$$F_n = \frac{C_m}{x_p + hf} \qquad \textbf{(47')}$$

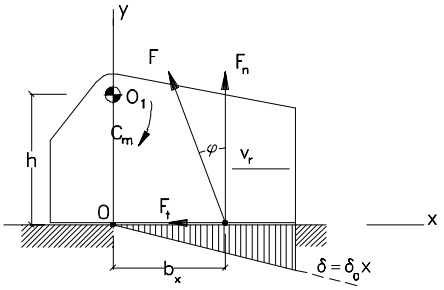


Figura 22

ossia, a parità di coppia di chiusura, una $\vec{F}_n$ minore: infatti il cambiamento di verso che subisce la $\vec{F}_t$ ha come effetto quello di far aumentare il braccio della $\vec{F}$ rispetto all'asse della coppia rotoidale. Anche la potenza perduta:

$$P_w = F_t v^{(r)} = f F_n v^{(r)} = \frac{f C_m v^{(r)}}{x_p + hf} \qquad \textbf{(48')}$$

risulta, di conseguenza, inferiore.

Le stesse considerazione possono essere applicate al caso di fig.22 in cui la coppia rotoidale O risulta interna rispetto alla superficie di appoggio del pattino sul piano.

Nulla varia se non che il punto C, piede della perpendicolare al piano condotta da O cade all'interno del contatto; tale punto è ancora l'origine della distribuzione delle pressioni al contatto (44) e quindi una porzione del contatto risulterà inattiva.

d) Pattino ad accostamento semilibero.

Consideriamo il pattino, di lunghezza l e spessore a, come quello di fig. 23, differente dal caso precedente per il fatto di essere diversamente vincolato: una cerniera mobile, A, che dista c dal suo bordo sinistro, lo collega ad un braccio, vincolato a sua

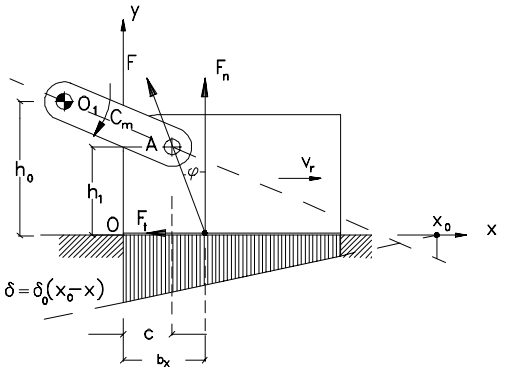


Figura 23

volta tramite la cerniera fissa O_1, su cui agisce una coppia di chiusura C_m. Restano identiche tutte le altre ipotesi fatte per il primo pattino.

Dato il tipo di vincolo, non è qui possibile individuare a priori la posizione del centro della rotazione istantanea nel moto assoluto del pattino che, per effetto dell'usura, si accosta al piano di appoggio; l'unica considerazione possibile in proposito è che il punto C dovrà trovarsi (teorema di Kennedy) sulla retta per O_1 e per A. La conseguenza immediata di tale circostanza è che non è più nota la posizione del punto (x_0), traccia della retta η, rispetto al quale valutare la distribuzione dei δ. Tuttavia il punto x_0 dovrà certamente trovarsi sul piano.
Fissato un riferimento come in figura, x_0 sta quindi sull'asse delle x e la legge di distribuzione dell'usura si potrà scrivere come:

$$\delta = \delta_0 (x_0 - x)$$

La legge di distribuzione delle pressioni al contatto sarà data allora da:

$$p = \frac{k\delta_0}{fv^{(r)}} x = p_0 (x_0 - x)$$

La distribuzione delle pressioni è ancora, quindi, di tipo lineare, e individuabile da una retta con origine nel punto x_0 (incognito) ed inclinata di p_0 (pure incognito). Ad essa comunque dovrà corrispondere, su ogni elemento di area del contatto, di lunghezza dx e spessore a, una azione normale elementare:

$$dF_n = pdA = p_0 (x_0 - x) a dx$$

Il risultante di tali azioni elementari sarà:

$$\begin{aligned} F_n &= \int_A pdA = p_0 a \int_0^l (x_0 - x) dx = p_0 a \int_0^l x_0 dx - p_0 a \int_0^l x dx = \\ &= p_0 a x_0 l - \frac{1}{2} p_0 a l^2 = p_0 a l \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) \end{aligned} \qquad \textbf{(49)}$$

Quindi, tenendo conto che l'area di contatto è pari ad $A = al$, il risultante delle azioni normali si può scrivere:

$$F_n = p_0 A \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) \qquad \textbf{(50)}$$

Il punto di applicazione della $\vec{F}_n$ può, ora, essere trovato imponendo che questa sia applicata in un punto distante b_x dall'origine O del riferimento prescelto tale che il suo momento rispetto alla cerniera A eguagli la somma dei momenti delle dF_n.
Dovrà essere cioè:

$$F_n b_x = \int_A x dF_n = a p_0 \int_0^l (x_0 - x) x dx = a p_0 \left[x_0 \int_0^l x dx - \int_0^l x^2 dx \right] = \quad \textbf{(51)}$$

$$= a p_0 \left(\frac{1}{2} x_0 l^2 - \frac{1}{3} l^3 \right) = \frac{1}{6} a p_0 l^2 (3x_0 - 2l) \quad \textbf{(51)}$$

Si ha quindi, tenendo conto della (50):

$$b_x = \frac{l}{3} \frac{3x_0 - 2l}{2x_0 - l} \quad \textbf{(52)}$$

La (52), peraltro, deve pure essere l'ascissa del baricentro del trapezio che rappresenta il diagramma delle pressioni al contatto(*) e le cui basi saranno date da:

$$\begin{aligned} a^* &= p_0 x_0 \\ b^* &= p_0 (x_0 - l) \end{aligned} \quad \textbf{(53)}$$

D'altra parte alla risultante $\vec{F}_n$ deve corrispondere il risultante della azioni tangenziali $\vec{F}_t = f\vec{F}_n$ che, sommata alla precedente darà la $\vec{F}$ totale; quest'ultima, per l'equilibrio del pattino, non soggetto ad altre forze, deve avere retta di applicazione passante per A: la distanza b_x è quindi nota e vale:

$$b_x = c + h_1 \tan\varphi$$

Ciò consente di determinare il valore, fin qui incognito, di x_0: dalla (52) si ottiene:

$$x_0 = \frac{l}{3} \frac{3b_x - 2l}{2b_x - l} \quad \textbf{(54)}$$

Per l'equilibrio del braccio O_1A, invece, il modulo della $\vec{F}$ deve essere tale che sia $Fb=C_m$, se si indica con b il suo braccio rispetto alla cerniera O_1. Si può scrivere quindi, tenendo conto della (50):

$$C_m = F.b = \frac{F_n}{\cos\varphi} b = \frac{a p_0 A (x_0 - l/2)}{\cos\varphi} b \quad \textbf{(55)}$$

e da qui ricavare:

(*) Si ricordi che la distanza del baricentro di un trapezio dalle basi non dipende dalla inclinazione dei lati obliqui.

$$p_0 = \frac{2C_m \cos\varphi}{aA(2x_0 - l)b} \tag{56}$$

e con esso l'effettivo diagramma delle pressioni.

Si è in grado ora analizzare le situazioni che si possono verificare al variare dei parametri geometrici del sistema, ricordando che il valore di b_x che compare nella (54) è strettamente legato, oltre che alle condizioni di attrito, alle coordinate del centro della coppia rotoidale A. Si deduce intanto, dalla (54), che, finché la cerniera mobile è posizionata all'interno del pattino (b_x>0), il valore di x_0 sarà positivo se:

$$\frac{b_x - 2l/3}{b_x - l/2} > 0 \tag{57}$$

Ora, poiché $\frac{2l}{3} > \frac{l}{2}$, la (57) sarà verificata solo se $b_x < l/2$ oppure se $b_x > 2l/3$ e si avrà x_0>0; diversamente sarà x_0<0. Nei primi due casi, il diagramma delle pressioni al contatto ha pendenza (56) positiva, e si presenterà quindi come in figura; nel terzo caso la pendenza sarà negativa.

Come caso particolare si può osservare che se $b_x = l/2$ è $x_0 = \infty$ e p_0=0: ciò è ovvio in quanto se il punto di applicazione della F_n cade sulla mezzeria del contatto la distribuzione delle pressioni non può che essere uniforme.

Dalla (54) si può ancora ricavare la condizione per cui il pattino risulti totalmente attivo: quella per cui è $|x_0| > l$. Si ha:

$$x_0 - l = \frac{l}{3}\left(\frac{3b_x - 2l}{2b_x - l} - 3\right) > 0$$

ossia:

$$\frac{l/3 - b_x}{b_x - l/2} > 0 \tag{58}$$

La (58) sarà verificata se $l/3 < b_x < l/2$, intervallo in cui la differenze a numeratore e a denominatore hanno il medesimo segno.

Ricordando che è:

$$b_x = c + fh_1$$

si comprende come, a parità di coefficiente di attrito, la distribuzione delle pressioni al contatto dipende non solo dalla distanza (c) della cerniera mobile dal bordo del pattino ma anche dalla sua altezza (h_1) sul piano di appoggio.

La (55) mostra, inoltre, che, se la posizione della coppia rotoi-

dale A è tale per cui risulta $x_0<l/2$, si verifica, come già visto nel caso trattato in precedenza, la tendenza del pattino ad impuntarsi.

Se, infine, si fosse nel caso in cui la velocità relativa v_r avesse verso opposto, la condizione che la $\vec{F}_t$ applicata al pattino deve comunque compiere lavoro negativo imporrebbe alla $\vec{F}$ di essere inclinata dalla parte opposta; si avrebbe:

$$b_x = c - fh_1$$

e questa differenza potrebbe risultare anche negativa a seconda della posizione della cerniera A. Se ciò accadesse la (54) darebbe $x_0<0$ e la (56) una pendenza negativa per il diagramma delle pressioni(*) .
Data la diversa inclinazione della $\vec{F}$, inoltre, il braccio di questa rispetto alla coppia rotoidale fissa O_1 risulterebbe maggiore e, per la (56) e la (50) si avrebbe una $\vec{F}_n$ minore ed anche una minore potenza perduta, così come si era trovato precedentemente per il pattino con la sola cerniera fissa.

(*) Nella (53) tuttavia sia a* che b*, come deve essere, rimarrebbero positivi.

APPENDICE

SVILUPPI MATEMATICI RIGUARDANTI I FRENI

A) Freni a tamburo ad accostamento rigido.

a1. - Direzione del risultante delle forze normali, $\vec{F}_n$.

Deve essere:

$$\int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} dF_n \ \mathrm{sen}(\vartheta - \gamma) = 0$$

e quindi:

$$a\, p_0 r \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta)\ \ \mathrm{sen}(\vartheta - \gamma)\ d\vartheta = 0$$

Ricordando dalla trigonometria che è:

$$\mathrm{sen}\,\alpha_1\ \cos\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

la funzione integranda si può scrivere:

$$\cos(\vartheta - \beta)\ \mathrm{sen}(\vartheta - \gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(\vartheta - \gamma + \vartheta - \beta) + \mathrm{sen}(\vartheta - \gamma - \vartheta - \beta)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(2\vartheta - \beta - \gamma) + \mathrm{sen}(\beta - \gamma)\right]$$

Sostituendo nell'integrale, avremo allora:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[\mathrm{sen}(2\vartheta - \gamma - \beta) + \mathrm{sen}(\beta - \gamma)\right] d\vartheta = 0$$

ossia:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \mathrm{sen}(2\vartheta - \beta - \gamma)\, d\vartheta + \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \mathrm{sen}(\beta - \gamma)\, d\vartheta = 0$$

Integrando si ottiene allora:

$$-\frac{\cos(2\vartheta - \beta - \gamma)}{2}\Bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} + \operatorname{sen}(\beta - \gamma)\vartheta\,|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta - \gamma) - \cos(-\alpha - \beta - \gamma)\right] + \alpha\ \operatorname{sen}(\beta - \gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha - \beta - \gamma)\right] + 2\alpha\ \operatorname{sen}(\beta - \gamma) = 0$$

Dovrà quindi essere:

$$2\alpha\ \operatorname{sen}(\beta - \gamma) = \cos[\alpha - (\beta + \gamma)] - \cos[\alpha + (\beta + \gamma)]$$

e poiché, dalla trigonometria, si ha ancora:

$$\operatorname{sen}\alpha_1\ \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_{22})\right]$$

si potrà pure scrivere:

$$2\alpha\ \operatorname{sen}(\beta - \gamma) = 2\ \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$$

ossia:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} = \frac{\operatorname{sen}\beta\ \cos\gamma - \cos\beta\ \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta\ \cos\gamma + \cos\beta\ \operatorname{sen}\gamma}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $(\cos\beta\ \cos\gamma)$, si ottiene infine:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{\tan\beta + \tan\gamma}$$

Se poi, a quest'ultima relazione, si applica una volta la regola del componendo, poi dello scomponendo, ed infine si fa il rapporto delle due espressioni ottenute, si giunge a:

$$\frac{\dfrac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}}{\dfrac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}} = \frac{\dfrac{\tan\beta + \tan\gamma + \tan\beta - \tan\gamma}{\tan\beta + \tan\gamma}}{\dfrac{\tan\beta + \tan\gamma - \tan\beta + \tan\gamma}{\tan\beta + \tan\gamma}}$$

ossia, semplificando:

$$\frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\tan\beta}{\tan\gamma}$$

Pertanto l'angolo che definisce la direzione del risultante delle forze normali si ricava da:

$$\tan\gamma = \tan\beta \; \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

Da qui si può rilevare che è anche:

$$(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \qquad \textbf{(2)}$$

e che, quindi, è anche:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \left[1 + \tan^2\beta\frac{(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2}{(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2}\right]^{-1/2}$$

ossia:

$$\frac{1}{\cos^2\gamma} = \frac{(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 + \tan^2\beta(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2}{(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\beta(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos^2\beta(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

e quindi:

$$\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 =$$

$$= (\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) + 2\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos(2\beta) =$$

$$= \alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos(2\beta)$$

In definitiva si ottiene la relazione:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos(2\beta)} \qquad \textbf{(3)}$$

a2. - Modulo del risultante delle forze normali, $\vec{F}_n$.

Il modulo del risultante è dato da:

$$F_{\mathrm{n}} = \mathrm{a\ p_0 r} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta)\ \cos(\vartheta - \gamma)\ d\vartheta$$

Ricordando dalla trigonometria che è:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

si può sviluppare la funzione integranda come:

$$\cos(\vartheta - \beta)\ \cos(\vartheta - \gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma - \beta) + \cos(2\vartheta - \gamma - \beta)\right]$$

ottenendo:

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2}\mathrm{a\ p_0 r} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \left[\cos(\beta - \gamma) + \cos(2\vartheta - \beta - \gamma)\right] d\vartheta$$

Integrando si avrà quindi:

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2}\mathrm{a\ p_0 r}\left\{\cos(\beta - \gamma)\vartheta\,|_{\alpha/2}^{-\alpha/2}\ \left.\frac{\mathrm{sen}(2\vartheta - \beta - \gamma)}{2}\right|_{\alpha/2}^{-\alpha/2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{a\ p_0 r}\left[\mathrm{sen}(\alpha - \beta - \gamma) - \mathrm{sen}(-\alpha - \beta - \gamma) + 2\alpha\cos(\beta - \gamma)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{a\ p_0 r}\left\{\mathrm{sen}\left[\alpha - (\beta + \gamma)\right] + \mathrm{sen}\left[\alpha + (\beta + \gamma)\right] + 2\alpha\cos(\beta - \gamma)\right\}$$

Tuttavia, sviluppando l'espressione entro le parentesi quadre, si ha:

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos(\beta + \gamma) + \alpha\cos(\beta - \gamma) =$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma) + \alpha(\cos\beta\cos\gamma + \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma) =$$

$$= (\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)\cos\beta\cos\gamma + (\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

e pertanto:

$$\mathrm{F_n} = \frac{1}{2}\mathrm{a\ p_0 r}\left[(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)\cos\beta\cos\gamma + (\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma\right]$$

Dalla (2), precedentemente trovata in A-1, possiamo ora ricavare:

$$(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \qquad \textbf{(3)}$$

oppure:

$$(\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = (\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\frac{\tan\beta}{\tan\gamma} \qquad \textbf{(4)}$$

e sostituire l'una o l'altra di queste espressioni in quella di F_n.
Se operiamo con la prima delle due si ottiene:

$$F_n = \frac{1}{2} a\, p_0 r \left[\begin{array}{r} (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\cos\beta\ \cos\gamma + \\ + (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}\operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\gamma \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} a\, p_0 r (\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \left[\cos\beta\ \cos\gamma + \frac{\operatorname{sen}^2\gamma \cos\beta}{\cos\gamma} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} a\, p_0 r (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\left(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma\right)$$

e quindi, in definitiva:

$$F_n = \frac{1}{2} a\, p_0 r (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \qquad \textbf{(5)}$$

Operando invece con la seconda delle due, la (4), si otterrebbe, in modo analogo:

$$F_n = \frac{1}{2} a\, p_0 r (\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \textbf{(6)}$$

identica alla precedente in virtù della (2).

In entrambi i casi possiamo eliminare l'angolo γ per mezzo della (3), ottenendo:

$$F_n = \frac{1}{2} a\, p_0 r \sqrt{\left[\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\alpha \operatorname{sen}\alpha \cos(2\beta)\right]}$$

B) Freni a disco.

1.1 - Risultante , $F_z^{'}$, delle forze normali dovute alle p'.

Si ha:

$$\mathrm{F'}_z = \iint_A dF'_z = \iint_A \mathrm{p}_0 \mathrm{s}\, d\vartheta dr = \mathrm{p}_0 \mathrm{s}\, \vartheta\big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\ r\big|_{r_1}^{r_2} = \mathrm{p}_0 \mathrm{s}\, \alpha\left(\mathrm{r}_2 - r_1\right)$$

Poiché è: $\alpha\left(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1\right) = \mathrm{A}/\mathrm{r}_\mathrm{m}$ si ha:

$$\mathrm{F'}_\mathrm{z} = \mathrm{p}_0 \mathrm{s} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}_\mathrm{m}}$$

1.2 - Punto di applicazione, $\mathrm{B'}_\mathrm{Z}$, del risultante, $F_z^{'}$, delle forze normali dovute alle p'.

Deve essere:

$$\mathrm{F'}_z\ \mathrm{b'}_z = \mathrm{p}_0\ \mathrm{s} \iint_A r\ \cos\vartheta\ dr d\vartheta = \mathrm{p}_0\ \mathrm{s} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\vartheta d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r dr =$$

$$= \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ \mathrm{sen}\vartheta\big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\ \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r_1}^{r_2} = \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\ \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} =$$

$$= \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right) = \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left(r_2 - r_1\right) r_m =$$

$$= \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ \mathrm{A}\ \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

da cui si ricava:

$$\mathrm{b'}_z = \frac{1}{\mathrm{F'}_z}\,\mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ \mathrm{A}\ \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} = \frac{\mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\ \mathrm{A}\ \dfrac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}}{\mathrm{p}_0\ \mathrm{s}\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}_\mathrm{m}}} = \mathrm{r}_\mathrm{m}\ \frac{\mathrm{sen}\left(\alpha/2\right)}{\alpha/2}$$

1.3 - Risultante $F_t^{'}$ delle forze tangenziali dovute alle p'.

$$\mathrm{F'}_t = \iint_A dF'_t \cos\vartheta = \iint_A f dF'_z \cos\vartheta = \iint_A f \mathrm{p}_0 \mathrm{s} \cos\vartheta dr d\vartheta =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\vartheta d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} dr = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \mathrm{sin}\vartheta|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ 2\mathrm{sen}(\alpha/2)(r_2 - r_1)$$

Se poi si tiene conto che è:

$$r_2 - r_1 = \frac{\mathrm{A}}{\alpha\ \mathrm{r_m}}$$

si può scrivere:

$$\mathrm{F'}_t = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ 2\mathrm{sen}(\alpha/2) \frac{\mathrm{A}}{\alpha\ \mathrm{r_m}} = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r_m}} \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

espressione che, ricordando essere:

$$\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r_m}} = \mathrm{F'}_z$$

si può scrivere sinteticamente come:

$$\mathrm{F'}_t = f\,\mathrm{F'}_z \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

1.4 - Punto di applicazione del risultante, $F_t^{'}$, delle forze tangenziali dovute alle p'.

Deve essere:

$$\mathrm{F'}_t\ \mathrm{b'}_t = \iint_A dF'_t r = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s} \iint_A r d\vartheta dr = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r dr =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \alpha \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \alpha\ \mathrm{r_m}(r_2 - r_1) = f\,\mathrm{p}_0 \mathrm{s}\ \mathrm{A} = f\,\mathrm{F'}_z\ \mathrm{r_m}$$

da cui si ha:

$$b'_t = \frac{1}{F'_t} f F'_z r_m = \frac{f F'_z r_m}{f F'_z \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}} = r_m \frac{\alpha/2}{\mathrm{sen}(\alpha/2)}$$

2.1 - Risultante, F''_z, delle forze normali dovute alle p".

$$F''_z = \iint_A p'' dA = \iint_A p_0 \cos(\vartheta - \beta) r dr\, d\vartheta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r\, dr =$$

$$= p_0 \mathrm{sen}(\vartheta - \beta)\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r_1}^{r_2} = p_0 \left[\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2} - \beta\right) + \mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

Ora, poiché per le formule di prostaferesi è:

$$\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2} - \beta\right) + \mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2} + \beta\right) = 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta$$

si può scrivere:

$$F''_z = p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) =$$

$$= p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \left(r_2 - r_1\right) \frac{r_2 + r_1}{2} = p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \left(r_2 - r_1\right) r_m$$

che, essendo $\left(r_2 - r_1\right) r_m = \frac{A}{\alpha}$, diventa:

$$F''_z = p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \frac{A}{\alpha} = p_0 A \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \cos\beta$$

2.1.1 - Caso in cui è $\beta=0$.

$$F''_z = p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \frac{A}{\alpha} = p_0 A \frac{\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

2.1.2 - Caso in cui è $\beta=\pi/2$.

$$F''_z = p_0 2\, \mathrm{sen}(\alpha/2) \cos\beta\, \frac{A}{\alpha} = 0$$

2.2 - Punto di applicazione del risultante, F"$_Z$, delle forze normali dovute alle p" (b"$_Z$=OB"$_Z$).

2.2.1 - Anomalia della retta baricentrica della distribuzione delle p".

Deve essere:

$$M''_{\gamma} = \iint_A dF''_z \, r \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) = 0$$

e quindi:

$$\iint_A p_0 \cos(\vartheta - \beta) r \, dr \, d\vartheta \, r \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) = 0$$

da cui:

$$p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) \, d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = 0$$

ossia:

$$\frac{1}{3} p_0 \left(r_2^3 - r_1^3\right) \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) \, d\vartheta = 0$$

Dovrà essere pertanto:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) \, d\vartheta = 0$$

La soluzione di questo integrale è stata già calcolata in A)-1 e dà quindi luogo al medesimo risultato, ossia:

$$\tan\gamma = \tan\beta \, \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}$$

2.2.2 - Distanza da O del punto B"$_Z$ sulla retta di anomalia γ.

Deve essere:

$$F''_z \, b''_z = p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \cos(\vartheta - \gamma) \, d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr$$

Si è già visto in A)-2 che è:

$$\int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \cos(\vartheta-\beta)\,\cos(\vartheta-\gamma)\,d\vartheta = \frac{1}{2}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

mentre, d'altra parte, è:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2\,dr = \frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

Sarà quindi:

$$\mathrm{F''}_z\,\mathrm{b''}_z = \mathrm{p}_0\,\frac{1}{2}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\;\;\frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

dove, (2.1), è:

$$\mathrm{F''}_z = \mathrm{p}_0 A\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}\cos\beta = \mathrm{p}_0\alpha\;\mathrm{r_m}\left(r_2 - r_1\right)\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}\cos\beta$$

Si può ricavare, pertanto:

$$\mathrm{b''}_z = \frac{\mathrm{p}_0\,\frac{1}{2}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\;\;\frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{\mathrm{p}_0\alpha\;\mathrm{r_m}(r_2 - r_1)\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}\cos\beta} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\frac{1}{\cos\gamma}\;\;\frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{\frac{1}{2}\alpha\left(r_2^2 - r_1^2\right)\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\frac{1}{\cos\gamma}\;\;\frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)\;\;\frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}\;\;\frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{3\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\frac{1}{\cos\gamma} =$$

$$= \frac{(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}\frac{\mathrm{r_p}}{\cos\gamma}$$

avendo posto:

$$\mathrm{r_p} = \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{3\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{2}{3}\frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2\right)}{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)} = \frac{2}{3}\frac{r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2}{\left(r_2 + r_1\right)}$$

All'espressione di r_p può essere data una forma più significativa facendo comparire il raggio medio del pattino, $r_m = (r_1 + r_2)/2$, e la sua larghezza, $\Delta r = r_2 - r_1$.
Moltiplicando e dividendo per 2 l'espressione di r_p si ha:

$$r_p = \frac{1}{6}\frac{4r_2^2 + 4r_1^2 + 4r_1r_2}{r_2 + r_1} = \frac{1}{6}\frac{4r_2^2 + 4r_1^2 + 4r_1r_2 + 2r_1r_2 - 2r_1r_2}{r_2 + r_1} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{3r_2^2 + 6r_1r_2 + 3r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2}{r_2 + r_1} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{3(r_2^2 + 2r_1r_2 + r_1^2) + (r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2)}{r_2 + r_1} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{3(r_2 + r_1)^2 + (r_2 - r_1)^2}{r_2 + r_1} = \frac{1}{2}(r_2 + r_1) + \frac{2}{12}\frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2 + r_1} =$$

$$= r_m + \frac{1}{12}\frac{(\Delta r)^2}{r_m}$$

e quindi, in definitiva:

$$r_p = r_m\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta r}{r_m}\right)^2\right]$$

2**.2.2.1** - Caso in cui è $\beta=0$.

In tal caso sarà anche $\gamma=0$ e quindi $b''_z = \frac{(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)} r_p$

2**.2.2.2** - Caso in cui è $\beta=\pi/2$.

Si è già visto in 2.1.1 che risulta $F''_z=0$; si ha però in questo caso:

$$M_x = \iint_A dF''_z\, r \operatorname{sen}\vartheta = \iint_A p_0 \operatorname{sen}\vartheta\, r\, d\vartheta\, dr\, r \operatorname{sen}\vartheta =$$

$$= p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = p_0\left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\vartheta)\right]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= p_0 \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right]\frac{r_2^3 - r_1^3}{3} =$$

$$= p_0 \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2} \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}$$

Per quanto riguarda l'ultimo fattore di questa espressione, si è già trovato in B-2.2.2 che è:

$$r_p = \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{3\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

e quindi possiamo pure scrivere:

$$\frac{r_2^3 - r_1^3}{3} = r_p \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) = r_p \frac{r_2 + r_1}{2}\left(r_2 - r_1\right) = r_p r_m \left(r_2 - r_1\right) = r_p \frac{A}{\alpha}$$

In definitiva, sostituendo questa nella espressione di M_x, si ottiene:

$$M_x = p_0 \, A \, r_p \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha}$$

2.3 - Risultante, F''_t, delle forze tangenziali dovute alle p".

2.3.1 - Componente di F''_t lungo la retta di anomalia γ.

$$\left[F''_t\right]_1 = \iint_A f dF''_z \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) =$$

$$= f \iint_A p_0 \cos(\vartheta - \beta)\, r\, dr\, d\vartheta \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma) =$$

$$= f p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \operatorname{sen}(\vartheta - \gamma)\, d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r\, dr$$

Essendo nullo il primo dei due integrali, come visto in 2.2.1, sarà $\left[F''_t\right]_1 = 0$.

2.3.1.1 - Se è β=0 sarà anche γ=0 e quindi avremo:

$$\left[F''_t\right]_1 = \iint_A f dF''_z \operatorname{sen}\vartheta = f \iint_A p_0 \cos\vartheta\, r\, dr\, d\vartheta \operatorname{sen}\vartheta =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\; d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r\; dr = f\,\mathrm{p}_0\; \frac{1}{2}\; \mathrm{sen}^2\vartheta\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r^2}{2}\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0\; \frac{1}{2}\; \left[\mathrm{sen}^2(\alpha/2) - \mathrm{sen}^2(\alpha/2)\right] \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 0$$

2.3.1.2 - Se è $\beta=\pi/2$ sarà anche $\gamma=\pi/2$ e quindi:

$$\left[\mathrm{F''_t}\right]_1 = \left[\mathrm{F''_t}\right]_y = \iint_A f dF''_z\, \mathrm{sen}(\vartheta - \pi/2) =$$

$$= f \iint_A \mathrm{p}_0 \cos(\vartheta - \pi/2)\; r\; dr\; d\vartheta \cos\vartheta =$$

$$= f \iint_A \mathrm{p}_0\, \mathrm{sen}\,\vartheta\; r\; dr\; d\vartheta\, \cos\vartheta = f\,\mathrm{p}_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\; d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r\; dr = 0$$

2.3.2 - Componente di $\mathrm{F''_t}$ lungo la normale alla retta di anomalia γ.

$$\left[\mathrm{F''_t}\right]_2 = \iint_A f dF''_z \cos(\vartheta - \gamma) =$$

$$= f \iint_A \mathrm{p}_0 \cos(\vartheta - \beta)\; r\; dr\; d\vartheta \cos(\vartheta - \gamma) =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) \cos(\vartheta - \gamma)\; d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r\; dr$$

Il primo integrale è stato calcolato in 2.2.2, per cui si ha:

$$\left[\mathrm{F''_t}\right]_2 = f\,\mathrm{p}_0\, \frac{\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha}{2} \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\; \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0\, \frac{\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha}{2} \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\; \frac{r_2 + r_1}{2}\left(r_2 - r_1\right) =$$

$$= f\,\mathrm{p}_0\; \mathrm{r_m}\left(r_2 - r_1\right) \frac{\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha}{2}\; \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Ricordando che $r_m\left(r_2 - r_1\right) = \mathrm{A}/\alpha$ e che:

$$F''_z = p_0\ A\ \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}\cos\beta$$

sostituendo si ha:

$$\left[F''_t\right]_2 = f\,\frac{p_0 A}{2\alpha}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\,\frac{F''_z}{\cos\gamma}\ \frac{\alpha/2}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\ \frac{1}{p_0 A} =$$

$$= f\,F''_z\,\frac{\alpha/2}{4(\alpha/2)}\ \frac{\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\ \frac{1}{\cos\gamma}$$

e quindi, in definitiva:

$$\left[F''_t\right]_2 = f\,F''_z\,\frac{\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}\ \frac{1}{\cos\gamma}$$

2.3.2.1 - Se è $\beta=0$ sarà anche $\gamma=0$ e quindi avremo:

$$\left[F''_t\right]_2 = f\,F''_z\,\frac{\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

2.3.2.2 - Se è $\beta=\pi/2$ sarà anche $\gamma=\pi/2$ e quindi:

$$\left[F''_t\right]_2 = \iint_A f\,dF''_z\cos(\vartheta-\pi/2) =$$

$$= f\iint_A p_0\cos(\vartheta-\pi/2)\ r\,dr\,d\vartheta\operatorname{sen}\vartheta =$$

$$= f\,p_0\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta\int_{r_1}^{r_2} r\,dr = f\,p_0\ \frac{\vartheta}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\vartheta)\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\ \frac{r^2}{2}\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= f\,p_0\ \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right]\frac{r_2^2-r_1^2}{2} =$$

$$= f\,p_0\ \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right]\frac{r_2^2-r_1^2}{2} =$$

$$= f\,p_0\ \frac{\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{2\alpha}\,r_m(r_2-r_1) =$$

$$= f\,p_0 A\,\frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{2\alpha}$$

2.4 - Punto di applicazione del risultante, F"$_t$, delle forze tangenziali dovute alle p"; (b"$_t$=OB"$_t$).

Si ha:

$$F"_t\ b"_t = \iint_A f dF"_z\ r = \iint_A f\,p_0 \cos(\vartheta - \beta) r\,d\vartheta\,dr\,r =$$

$$= f\,p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) d\vartheta \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr$$

Ora, tenendo conto che:

$$F"_t = f F"_z \frac{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}\ \frac{1}{\cos\gamma}$$

e che, come si è già ricavato in 2.1, è:

$$p_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos(\vartheta - \beta) d\vartheta = p_0\, 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos\beta = \frac{2F"_z}{r_2^2 - r_1^2}$$

sostituendo, si può ricavare:

$$b"_t = \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos\gamma}{f F"_z (\alpha + \operatorname{sen}\alpha)} f \frac{2F"_z}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr =$$

$$= \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos\gamma}{(\alpha + \operatorname{sen}\alpha)} \left[\frac{2}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]$$

e quindi:

$$b"_t = r_p \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha} \cos\gamma$$

2.4.1 - Se è Se è β=0 sarà anche γ=0 e quindi avremo:

$$b"_t = r_p \frac{4\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha + \operatorname{sen}\alpha}$$

2.4.2 - Se è $\beta=\pi/2$ sarà anche $\gamma=\pi/2$ e quindi:

$$b''_t=0$$

CAPITOLO XV

TRASMISSIONE CON ORGANI FLESSIBILI

SOMMARIO

§ 1. - Struttura delle funi
§ 2. - Proprietà elastiche e flessibilità
§ 3. - Equilibrio di un flessibile libero sospeso agli estremi
§ 4. - Equazioni di equilibrio del flessibile in moto
§ 5. - Trasmissioni di potenza con funi o cinghie
§ 6. - Rapporto di trasmissione
§ 7. - Rendimento
§ 8. - Variazione della tensione lungo i rami liberi del flessibile in moto
§ 9. - Sistemi di forzamento
§ 10. - Rigidezza di funi e cinghie
§ 11. – Carrucole e paranchi

Si dice **flessibile** un organo meccanico che è in grado di reagire esclusivamente a sollecitazioni di trazione, e pertanto capace di assumere la forma del membro con cui è in contatto.

I membri flessibili usati nelle macchine sono le **funi** (gru, paranchi, argani, teleferiche, funicolari, impianti di risalita, ecc.), le **cinghie** (cinghie di trasmissione piatte, trapezoidali, a impronte, ecc.), le **catene** (catene per biciclette, ciclomotori o motociclette, per nastri trasportatori, ecc.).

I membri con cui i flessibili vengono accoppiati sono **carrucole o pulegge**, nel caso di funi e di cinghie, **carrucole o rocchetti dentati,** nel caso delle catene.

Per funi e cinghie il contatto fra i due membri è un **contatto di strisciamento** e pertanto si può ammettere che, in generale, la forza mutua che essi si scambiano è caratterizzata dalle stesse proprietà che si riscon-

trano nel fenomeno dell'attrito.

Per le catene la trasmissione della potenza è affidata alla **spinta mutua** fra un elemento della catena ed il dente del rocchetto cui esso si accoppia.

§ 1.- Struttura delle funi.

Le funi possono essere di fibra vegetale o sintetica, oppure metalliche.

Limitandoci a considerare le funi metalliche e le loro caratteristiche diremo che esse sono costituite da **fili ad elevatissima resistenza** (120Kg/mm^2 per diametri di 2 o 3 mm; 200Kg/mm^2 per diametri di qualche decimo di mm) avvolti ad elica intorno al medesimo asse: l'avvolgimento deve essere fatto **senza produrre torsione** in modo da evitare, cioè, il prodursi di sollecitazioni interne che andrebbero inutilmente a sommarsi ai normali carichi di esercizio.

Ciò si ottiene dando ai fili la forma elicoidale prima che questi si raffreddino (funi preformate o predeformate) e, in tal modo, si ha anche il vantaggio di far sì che l'eventuale rottura di un filo, che avvenga durante l'esercizio, non porta questo a riprendere la posizione rettilinea, con possibile danneggiamento degli organi con cui venisse a contatto.

A seconda della loro formazione, le funi metalliche si distinguono essenzialmente in tre categorie:

1) le funi spiroidali - a semplice avvolgimento
2) le funi a trefoli (cavi piani) - a doppio avvolgimento
3) le funi torticce (gherlini) - a triplice avvolgimento

Le **funi spiroidali** sono costituite da strati concentrici di fili avvolti intorno ad un "anima" costituita da un materiale molto più tenero (ferro ricotto, canapa, carta) il cui scopo è unicamente quello di facilitare l'operazione di avvolgimento del primo strato di fili.

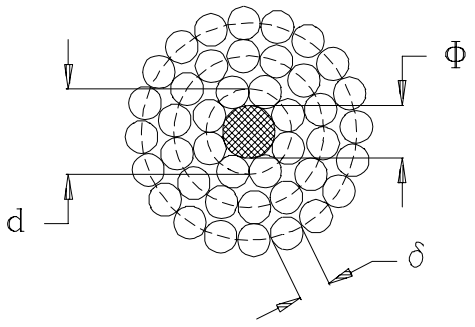


Figura 1

Ogni strato ha 6 fili più dello strato precedente. Infatti (fig.1) se Φ è il diametro dell'anima e δ il diametro del filo, per il primo strato, si potranno disporre, intorno all'anima n_1 fili tale che sia:

$$n_1\delta \cong \pi(\Phi + \delta)$$

mentre sullo strato successivo si potranno disporre n_2 fili tale che sia:

$$n_2\delta \cong \pi(\Phi + 3\delta)$$

Sarà quindi:

$$n_2\delta - n_1\delta \cong \pi(\Phi + 3\delta - \Phi - \delta) \cong 2\pi\delta$$

ed allora:

$$n_2 - n_1 \cong 2\pi \cong 6$$

Le **funi a trefoli** si ottengono avvolgendo a elica attorno all'anima uno o più strati di trefoli (funi spiroidali).
Gli avvolgimenti dei fili sia nei trefoli che nello stesso cavo possono essere nello stesso senso (avvolgimento parallelo o concordante) oppure in senso contrario (avvolgimento crociato o discordante) e ciò dipende dalla destinazione d'uso del cavo stesso.

Le **funi torticce** si ottengono in modo analogo avvolgendo ad elica le funi a trefoli.

§ 2.- Proprietà elastiche e flessibilità.

Consideriamo (fig.2) un tronco di fune spiroidale di lunghezza l e di sezione S, i cui fili di sezione s sono avvolti ad elica con un angolo di inclinazione α (supposto identico per tutti i fili) e supponiamo che sia $S=\Sigma s$.

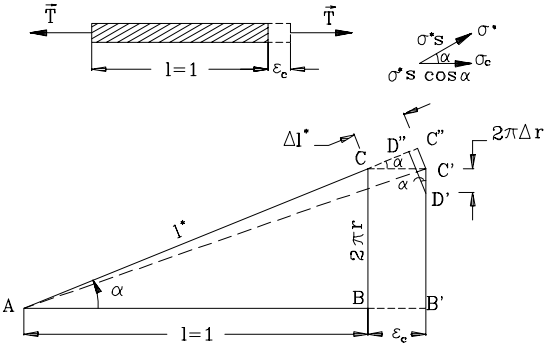


Figura 2

Se il cavo **non è deformato** la lunghezza dei fili che interessano il tratto l del cavo sarà:

$$l^* = AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{l}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

Se il cavo è **sottoposto alla forza di trazione** $\vec{T}$ esso si allungherà di una

quantità Δl, talché la sua lunghezza finale sarà:

$$l + \Delta l = l\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) = l(1 + \varepsilon_c)$$

In corrispondenza il filo subirà l'allungamento:

$$\Delta l^* = \Delta l \cos\alpha = CC'' \qquad \textbf{(2)}$$

e la sua lunghezza finale sarà:

$$l^* + \Delta l^* = l^*\left(1 + \frac{\Delta l^*}{l^*}\right) = l^*(1 + \varepsilon^*)$$

dove ε* è l'**allungamento unitario** del filo che costituisce il cavo. Il suo valore, utilizzando la (1) e la (2), può essere e-spresso come:

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta l^*}{l^*} = \frac{\Delta l \cos\alpha}{l/\cos\alpha} = \frac{\Delta l}{l}\cos^2\alpha = \varepsilon_c \cos^2\alpha$$

mostrando che è:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon^*}{\cos^2\alpha} > \varepsilon^*$$

D'altra parte, indicando con σ* lo sforzo specifico normale in ogni filo di sezione s (inclinato dell'angolo α rispetto all'asse del cavo), ciascuno di essi sarà sottoposto alla tensione $\sigma^* s$, mentre il cavo nel suo complesso sarà sotto posto alla tensione:

$$T = \sum(\sigma^* s \cos\alpha) = \sigma^* \cos\alpha \sum s = \sigma^* S \cos\alpha$$

avendo supposto la sezione del cavo S≈Σs.
Lo **sforzo specifico** nel cavo sarà allora dato da:

$$\sigma_c = \frac{T}{S} = \sigma^* \cos\alpha$$

e si vede quindi che è:

$$\sigma_c < \sigma^*$$

Il **modulo di elasticità** del cavo $E_c = \sigma_c/\varepsilon_c$ può essere ricavato da quello del filo dovendo essere:

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_c/\cos\alpha}{\varepsilon_c \cos^2\alpha} = E_c \frac{1}{\cos^3\alpha}$$

e quindi è:

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{\sigma^* \cos\alpha}{\varepsilon^* / \cos^2\alpha} = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \cos^3\alpha = E^* \cos^3\alpha$$

Il modulo di elasticità del cavo quindi risulta **molto minore** del corrispondente modulo di elasticità del filo.

Se poi si vuol tener conto anche del fatto che il cavo sottoposto a tensione subisce anche una contrazione laterale (riduzione del diametro), si può osservare che ad una variazione del raggio del cavo pari a Δr corrisponderà una diminuzione dell'allungamento del filo pari a:

$$\frac{D''C''}{l^*} = \frac{2\pi\,\Delta r \sin\alpha}{l/\cos\alpha}$$

per cui l'allungamento unitario del filo risulta ora:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_c \cos^2\alpha = \frac{2\pi\,\Delta r \sin\alpha\cos\alpha}{l} =$$

$$= \varepsilon_c \cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2\pi\,\Delta r}{l\,\varepsilon_c}\sin\alpha\right)$$

Definendo come **coefficiente di contrazione laterale** il rapporto:

$$\mu = \frac{2\pi\,\Delta r}{l\varepsilon_c} = 2\pi\,\frac{\Delta r}{\Delta l_c}$$

l'espressione corretta del coefficiente di allungamento del filo sarà:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_c \cos\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) >> \varepsilon_c$$

In corrispondenza si avrà per il modulo di elasticità:

$$E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_c/\cos\alpha}{\varepsilon_c \cos\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} =$$

$$= E_c \frac{1}{\cos^2\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$$

e quindi:

$$E_c = E^* \cos^2\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$$

In tal caso allora il valore del modulo di elasticità del cavo risulta ancora più basso rispetto al valore di quello trovato precedentemente.

Il coefficiente di contrazione laterale, μ, dipende dal tipo di anima impiegata nella costruzione del cavo: sarà ovviamente maggiore se l'anima

è di canapa invece che di metallo.
Inoltre poiché le deformazioni che portano alla diminuzione del diametro sono, almeno in parte, di natura anelastica, ne segue che μ diminuisce col tempo (e quindi con l'anzianità del cavo stesso) facendo crescere il valore del modulo di elasticità .

Nelle applicazioni dinamiche le funi sono soggette a carichi variabili: basti pensare che una fune (o un cavo) avvolta fra due pulegge deve, durante il moto, piegare via via il suo asse secondo la curvatura delle pulegge stesse e successivamente raddrizzarlo due volte ad ogni giro.
Se indichiamo con R il raggio di una delle pulegge, la fune (o il cavo) si opporrà a tale deformazione di flessione con un momento di reazione elastica pari a:

$$M_f = \frac{E_c I}{R} = E_c I \frac{d\Phi}{ds}$$

essendo $I=\Sigma j_i$ il momento d'inerzia della sezione del cavo con j_i momento d'inerzia della sezione del singolo filo.

Per aumentare la vita del cavo, la cui rottura è generalmente dovuta alle sollecitazioni a fatica, è preferibile aumentare l'estensione del contatto fra i fili di uno strato e del successivo, in modo da diminuirne la pressione. Per questo si preferisce avvolgere i fili di strati successivi con lo stesso passo anziché con lo stesso angolo. Importante è anche, sotto questo aspetto, la lubrificazione dei cavi: sia per proteggerli dall'ossidazione sia per migliorarne il mutuo scorrimento dei fili durante la flessione.

Altrettanto importante è il rapporto fra il diametro della puleggia ed il diametro della fune (o del cavo) che ad essa va accoppiata (fig.3.a), così come pure la forma della gola della puleggia. La gola deve essere tale da evitare l'incuneamento della fune e contemporaneamente consentire una superficie d'appoggio convenientemente larga. Generalmente si ha un diametro della gola pari ad 1.06 volte il diametro della fune, mentre le guance formano fra loro un angolo di 40°÷50°.

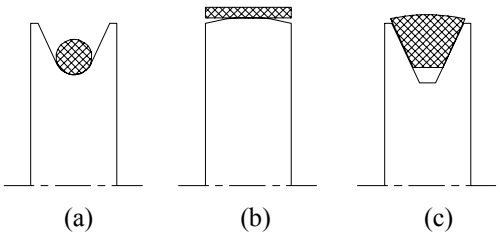


Figura 3

Le cinghie possono essere a sezione rettangolare (generalmente quelle di cuoio o di tessuto gommato) oppure a sezione trapezoidale se di gomma. Quelle a sezione rettangolare (fig.3.b) si accoppiano con pulegge la cui corona è generalmente a botte per dare alla cinghia maggiore stabilità, ossia rendere più difficile lo scarrucolamento.

Quelle a sezione trapezoidale (fig.3.c) si accoppiano a pulegge munite di una corona con scanalatura trapezoidale entro cui la cinghia si incunea esaltando così l'aderenza fra la cinghia e la stessa puleggia; il contatto deve sempre avvenire fra le guance della gola e mai fra il fondo della gola e la cinghia.
L'angolo della gola della puleggia è, pertanto, leggermente minore del corrispondente angolo della cinghia e ciò per tener conto della diminuzione che quest'ultimo subisce a causa dell'allungamento cui la cinghia è sottoposta durante il funzionamento.

§ 3. – Equilibrio di un flessibile libero sospeso agli estremi.

Considerato un tratto di flessibile immobile e sospeso ai suoi estremi H_1 ed H_2.
Prefissato un sistema di riferimento curvilineo di coordinata s, definiamo **tensione** nel flessibile in corrispondenza del punto P la forza che la parte di flessibile che si trova dalla parte delle s crescenti esercita sull'altra parte; e ciò per la continuità del flessibile stesso.

Il vettore tensione $\vec{T}$ sarà tangente alla curva in P e quindi sarà $\vec{T} = T\vec{\tau}$ se $\vec{\tau}$ è il versore tangente in P, positivo nel verso delle s crescenti.
Supponiamo adesso che il flessibile sia sollecitato da forze esterne distribuite lungo la curva funicolare e che sia $\vec{F}$ la corrispondente forza per unità di lunghezza: su un elemento di fune di lunghezza ds si eserciterà quindi una forza pari ad $\vec{F}ds$.

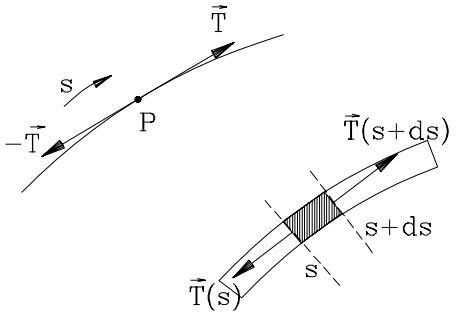


Figura 4

L'equazione di equilibrio dell'elemento ds si scriverà allora:

$$\vec{T}(s + ds) - \vec{T}(s) + \vec{F}ds = 0$$

che, divisa per ds, dà:

$$\frac{\vec{T}(s+ds)-\vec{T}(s)}{ds} + \vec{F} = 0$$

Passando al limite si ottiene:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}+\vec{F}=0 \tag{3}$$

che rappresenta in forma vettoriale l'equazione di equilibrio del flessibile e che deve essere valida per tutti i suoi punti.

Supponiamo adesso che la forza $\vec{F}$ sia solamente quella dovuta soltanto al peso proprio del flessibile stesso e consideriamo che in queste condizioni esso si disporrà nel piano verticale contenente i punti H_1 ed H_2.

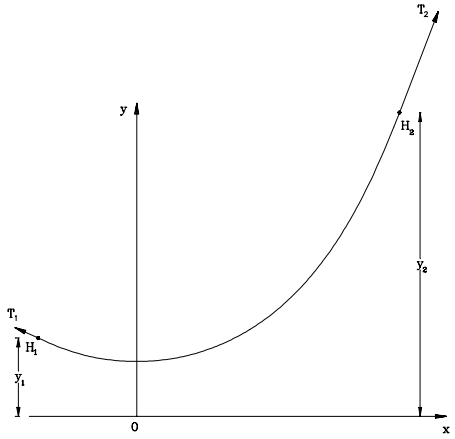


Figura 5

Utilizziamo, quindi, proprio questo piano come piano di riferimento xy con l'asse delle y positivo verso l'alto (fig. 5); in questo riferimento, indicando con q la massa per unità di lunghezza del flessibile, la forza nel generico punto P si ridurrà a $\vec{F}_y=-qg\vec{j}$, mentre la tensione sarà data da:

$$\vec{T}=\left(T\frac{dx}{ds}\right)\vec{i}+\left(T\frac{dy}{ds}\right)\vec{j}$$

L'equazione di equilibrio (3) darà luogo, allora, alle due equazioni scalari:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)&=0\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)-qg&=0\end{aligned} \tag{4}$$

La variabile s, che rappresenta l'arco di funicolare nel piano xy, non è ovviamente indipendente, ma rimane legata alle coordinate x ed y del punto P dalla relazione:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1 \tag{5}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{dx}{ds}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\Big/\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}=1$$

e quindi:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\Big/\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+m^2}\,dx \qquad \textbf{(6)}$$

avendo posto $m=dy/dx$, con il significato di coefficiente angolare della tangente alla curva funicolare nel punto generico.
L'integrazione della prima delle (4) dà:

$$T\frac{dx}{ds}=\cos t=T_0$$

la quale, ci dice che lungo la curva funicolare la componente orizzontale della tensione, T_0, si mantiene costante in ogni punto. D'altra parte questa stessa ci consente di ricavare l'espressione di:

$$T=\frac{T_0}{dx/ds}$$

da sostituire nella seconda delle (4) da cui si ricava:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{T_0\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds}}\right)-qg=T_0\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)-qg=0$$

e quindi, tendo conto della (6):

$$\frac{dm}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{qg}{T_0}dx \qquad \textbf{(7)}$$

Quest'ultima integrata ci dà:

$$\ln\left(\sqrt{1+m^2}+m\right)=\frac{qg}{T_0}x+\text{cost} \qquad \textbf{(8)}$$

dove però la costante di integrazione può anche essere nulla se si trasla l'asse delle y in modo da porre (fig. 5) l'origine del riferimento, x=0, in corrispondenza del punto in cui m=0 ossia dove la funicolare ha tangente orizzontale.
In tal modo la (8) si può scrivere:

$$\sqrt{1+m^2}+m=e^{\frac{qg}{T_0}x} \tag{9'}$$

oppure, prendendo il reciproco:

$$\sqrt{1+m^2}-m=e^{-\frac{qg}{T_0}x} \tag{9"}$$

Sottraendo ora la (9") dalla (9') si ottiene:

$$m=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{qg}{T_0}x}-e^{-\frac{qg}{T_0}x}\right)=\sinh\left(\frac{qg}{T_0}x\right) \tag{10}$$

ossia:

$$dy=\sinh\left(\frac{qg}{T_0}x\right)dx$$

Integrando ancora una volta si ottiene l'equazione della curva funicolare rappresentata da:

$$y=\frac{T_0}{qg}\cosh\left(\frac{qg}{T_0}x\right)+\text{cost}$$

ma anche dalla:

$$y=\frac{T_0}{qg}\cosh\left(\frac{qg}{T_0}x\right) \tag{11}$$

se si trasla l'asse delle x in modo che per x=0 sia $y=T_0/qg$ ed avere così nulla la costante di integrazione.
La (11) è l'equazione della *catenaria*, la curva quindi secondo cui si dispone un flessibile sospeso ai suoi estremi soggetto esclusivamente al proprio peso.

Si può adesso trovare l'espressione che ci dia il variare della tensione lungo i punti del flessibile.
E' stato già ricavato che deve essere:

$$T=T_0\frac{ds}{dx}$$

e quindi, per la (6), sarà:

$$T=T_0\sqrt{1+m^2}$$

dove l'espressione di *m* è quella data dalla (10). Pertanto sarà:

$$T = T_0\sqrt{1+\left[\sinh\left(\frac{qg}{T_0}x\right)\right]^2} = T_0\cosh\left(\frac{qg}{T_0}x\right)$$

che, per la (11), corrisponde a:

$$T = qgy \qquad \textbf{(12)}$$

Vediamo quindi che lungo la funicolare il valore della tensione è proporzionale alla distanza del punto considerato dall'asse delle x, posto a distanza T_0/qg dal punto più basso del flessibile, e che prende anche il nome di *base* della catenaria.

Riprendendo lo schema di fig. 5, possiamo concludere che la differenza di tensione dovuta al dislivello fra i punti di sospensione del flessibile sarà:

$$T_{H_2} - T_{H_1} = qg\left(y_{H_2} - y_{H_1}\right)$$

come si ottiene immediatamente dalla (12) applicata rispettivamente ai punti H_1 ed H_2.

§ 4.- Equazioni di equilibrio del flessibile in moto.

Ipotizziamo adesso che il flessibile sia in moto, facendo l'ipotesi che la sua curva funicolare non varii nel tempo, e che quindi coincide con la traiettoria di tutti i punti del flessibile ed anche che sia punto per punto $d\sigma/dt=0$.

Se è $\vec{v}$ la velocità che compete ad un tratto del flessibile di lunghezza *ds*, esso sarà soggetto anche ad una forza d'inerzia e quindi nell'equazione vettoriale (3) va aggiunto anche questo vettore.

Sarà quindi:

$$d\vec{F}' = -qds\frac{d\vec{v}}{dt} = -qds\frac{d\left(v\vec{\tau}\right)}{dt}$$

ed è:

$$\frac{d\left(v\vec{\tau}\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

essendo (Frenét) $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}$ con *R* è il raggio di curvatura del flessibile nel punto considerato.

Sostituendo, avremo quindi, per l'unità di lunghezza del flessibile:

$$d\vec{F}' = -\left(qv\frac{dv}{ds}\vec{\tau} + q\frac{v^2}{R}\vec{n} \right)$$

dove il termine qv è la portata di massa del flessibile che si può anche ritenere costante rispetto ad s. Con questa considerazione potremo pertanto scrivere:

$$d\vec{F}' = -\left[\frac{d\left(qv^2\right)}{ds}\vec{\tau} + q\frac{v^2}{R}\vec{n} \right] \qquad \textbf{(13)}$$

L'equazione (3) che deve descrivere l'equilibrio del flessibile si dovrà scriverà allora come:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{F} - \frac{d\left(qv^2\right)}{ds}\vec{\tau} - q\frac{v^2}{R}\vec{n} = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

Questa è **l'equazione di equilibrio del flessibile in moto**: deve essere valida punto per punto, ed è una equazione (vettoriale) che rappresenta una condizione necessaria e sufficiente.

Prendiamo ora come piano di riferimento il piano contenente la curva funicolare del flessibile (fig. 6) e fissiamo in corrispondenza del generico punto P, il versore tangente, $\vec{\tau}$, nel verso delle s crescenti, il versore della normale principale, $\vec{n}$, verso il centro di curvatura della curva, ed il versore della binormale, $\vec{b}$, ortogonale ai precedenti.

I primi due termini della precedente equazione (14) scritti secondo questi versori sono i seguenti.

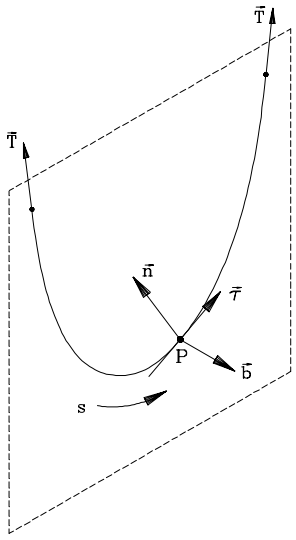


Figura 6

- per la tensione $\vec{T} = T\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{\tau} + T\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{\tau} + \frac{T}{R}\vec{n}$$

- per la forza esterna $\vec{F}$:

$$\vec{F} = F_t\vec{\tau} + F_n\vec{n} + F_b\vec{b}$$

Possiamo allora scrivere la (14), nelle sue componenti, nella forma:

$$\frac{dT}{ds}\vec{\tau} + \frac{T}{R}\vec{n} + F_t\vec{\tau} + F_n\vec{n} + F_b\vec{b} - \frac{d\left(qv^2\right)}{ds}\vec{\tau} - q\frac{v^2}{R}\vec{n} = 0 \qquad \textbf{(15)}$$

che corrisponde alle tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + F_t - \frac{d\left(qv^2\right)}{ds} = 0 \\ &\frac{T}{R} + F_n - q\frac{v^2}{R} = 0 \\ &F_b = 0 \end{aligned}$$

che possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} &\frac{d\left(T - qv^2\right)}{ds} + F_t = 0 \\ &\frac{T - qv^2}{R} + F_n = 0 \\ &F_b = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(16)}$$

delle quali l'ultima ci dice che il piano osculatore alla curva funicolare, se il flessibile è in equilibrio, contiene interamente la forza esterna.

§ 5. - Trasmissioni di potenza con funi o cinghie.

L'applicazione dei flessibili come mezzo per trasmettere potenza si basa sul fenomeno dell'aderenza, quando si tratta di funi o cinghie, oppure sulle forze che si scambiano anello e dente del rocchetto, nel caso delle catene.
Considereremo qui solamente funi o cinghie, e perfettamente flessibili, ossia che non si oppongano in alcun modo a disporsi secondo una linea qualsiasi.
Consideriamo ora lo schema di fig. 7, in cui un flessibile è avvolto su due pulegge: una, motrice, di raggio R_1 ed una, condotta, di raggio R_2, le quali ruotano rispettivamente con le velocità angolari $\vec{\omega}_1$ ed $\vec{\omega}_2$ costanti; immaginiamo di aver sezionato il flessibile in H_1 e in H_2 (inizio e fine della tangenza) sulla puleggia motrice ed in H^*_1 e H^*_2 sulla puleggia condotta, sostituendo rispettivamente le tensioni $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}^*_1$, $\vec{T}^*_2$.
Scelto come verso positivo per le s (crescenti) il verso delle $\vec{\omega}$, e supponendo che sia ω_1 =cost, **l'equilibrio alla rotazione della puleggia motrice** con il tratto di flessibile su di essa avvolto ci dice che deve essere(*):

(*) Si sta trascurando la coppia dovuta al momento risultante delle forze

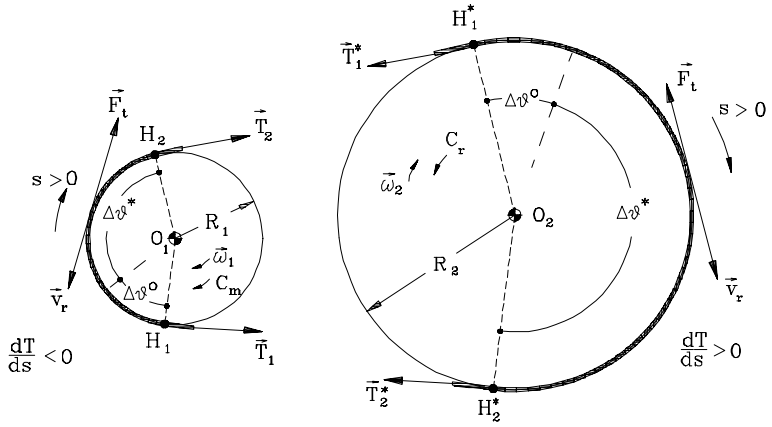


Figura 7

$$C_m - T_1 R_1 + T_2 R_1 = 0$$

da cui:

$$T_1 - T_2 = \frac{C_m}{R_1} \qquad \textbf{(17)}$$

Poiché C_m>0 sarà anche $\vec{T}_1 > \vec{T}_2$, e quindi, nel verso positivo delle s, $\frac{dT}{ds} < 0$.

Se analogamente consideriamo, poi, **l'equilibrio alla rotazione della puleggia condotta,** sempre con l'ipotesi che sia ω_2 =cost, dovremo scrivere:

$$C_r + T_1^* R_2 - T_2^* R_2 = 0$$

da cui:

$$T_2^* - T_1^* = \frac{C_r}{R_2} \qquad \textbf{(18)}$$

ed, essendo ancora C_r>0, sarà anche $\vec{T}_2^* > \vec{T}_1^*$, e quindi, sempre nel verso positivo delle s, $\frac{dT}{ds} > 0$.

---

d'inerzia che sollecita il flessibile: comprensibilmente, può ritenersi quantitativamente trascurabile rispetto alle altre coppie. Lo stesso varrà per l'equilibrio della puleggia condotta.

Ora, se sulla puleggia motrice è $\vec{T}_1 > \vec{T}_2$, e quindi se c'è una variazione di tensione lungo il tratto di flessibile che è in contatto con la puleggia, è presumibile che debba verificarsi scorrimento fra il flessibile, che è un elemento elastico, e la puleggia stessa; e ciò dovrà avvenire fra i punti H_1 ed H_2 che sono gli estremi dell'arco di contatto fra i due membri (arco di abbracciamento).
Ragionando in modo analogo, la stessa cosa dovrà dirsi per la puleggia condotta con riferimento ai punti H_1^* ed H_2^* ed al corrispondente arco di abbracciamento.
Per mezzo delle (16) possiamo cercare, allora, l'andamento delle tensioni che sollecitano il flessibile nei due casi.

Per la puleggia motrice, essendo $\vec{T}_2 < \vec{T}_1$**,** lo scorrimento del flessibile dovrà avvenire con una velocità relativa (del flessibile rispetto alla puleggia) $\vec{v}^{(r)} < 0$ per cui, nei punti del contatto dove ciò avviene, ci deve essere necessariamente una $\vec{F}_t > 0$ agente sul flessibile.
Pertanto si potrà scrivere:

$$F_t = + f \mid F_n \mid \qquad \textbf{(19)}$$

Per la puleggia condotta, essendo $\vec{T}_2^* > \vec{T}_1^*$**,** lo scorrimento del flessibile dovrà avvenire con una velocità relativa (del flessibile rispetto alla puleggia) $\vec{v}^{(r)} > 0$ per cui, nei punti del contatto dove ciò avviene, ci deve essere necessariamente una $\vec{F}_t < 0$ agente sul flessibile.
In questo caso sarà allora:

$$F_t = - f \mid F_n \mid \qquad \textbf{(20)}$$

Compendiando questi due risultati, la prima delle (16), , si potrà scrivere allora come:

$$\frac{d\left(T - qv^2\right)}{ds} \pm f \mid F_n \mid = 0$$

scegliendo il segno superiore per la motrice, l'inferiore per la condotta.
Fatte queste premesse, avremo per la **puleggia motrice,** le due equazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{d\left(T - q\,v^2\right)}{ds} + f \mid F_n \mid = 0 \\ &\frac{T - q\,v^2}{R_1} + F_n = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

Dalla seconda di queste si ha:

$$F_n = -\frac{1}{R_1}(T - q v^2)$$

da cui, ammettendo, come è di norma, che sia $T>qv^2$,(*) si ha:

$$|F_n| = \frac{1}{R_1}(T - q v^2)$$

Quest'ultima sostituita nella prima delle (21) ci dà:

$$\frac{d(T - q v^2)}{ds} + \frac{f}{R_1}(T - q v^2) = 0$$

Ponendo $T' = T - qv^2$ e tenendo conto che è $ds = R_1 d\vartheta$, possiamo ancora scrivere:

$$\frac{1}{R_1}\frac{dT'}{d\vartheta} + \frac{f}{R_1}T' = 0$$

Possiamo quindi integrare l'equazione:

$$\frac{dT'}{d\vartheta} + fT' = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

fra gli estremi H_1 (dove è $T=T_1$) ed H_2 (dove è $T=T_2$).
Scriveremo:

$$\frac{dT'}{T'} = -f\,d\vartheta$$

ossia:

$$\ln T'\Big|_{T_1'}^{T_2'} = -f\vartheta\Big|_{H_1}^{H_2}$$

ottenendo, dopo aver ripristinato le variabili originarie:

$$\frac{T_2 - q v^2}{T_1 - q v^2} = e^{-f\Delta\vartheta} \qquad \textbf{(23)}$$

essendo $\Delta\vartheta$ l'estensione dell'**arco di abbracciamento** $\overset{\leftarrow}{H_1 H_2}$.
Questa è la legge di variazione delle tensioni nel flessibile avvolto sulla puleggia motrice, che conferma peraltro come la tensione sia decrescente nel verso positivo delle s.

(*) Significa che l'azione sull'elemento ds dovuta alla tensione è maggiore di quella dovuta alla forza d'inerzia.

Ripetendo l'analogo procedimento per la **puleggia condotta**, sulla quale sarà valida la (20), si otterrà:

$$\frac{T_2^* - q\,v^2}{T_1^* - q\,v^2} = e^{f\Delta\vartheta} \qquad \textbf{(24)}$$

che conferma invece come la tensione sia crescente nel verso positivo delle s lungo il corrispondente arco di abbracciamento $\overleftrightarrow{H_1^* H_2^*}$.

Le due leggi (23) e (24), trovate ammettendo una $\vec{F}_t \neq 0$, saranno valide, ovviamente, lungo un arco entro il quale si verifica effettivamente lo scorrimento ed entro il quale, di conseguenza, si ha, da punto a punto, una variazione della tensione.
D'altra parte, i limiti imposti all'integrazione ammettono implicitamente che la variazione di tensione, e quindi lo scorrimento, si verifica in tutti i punti del contatto compresi fra H_1 ed H_2 sulla motrice, e fra H_1^* ed H_2^* sulla condotta.

Ma questo non può essere vero per qualsiasi condizione di funzionamento: trattandosi di un accoppiamento di forza deve necessariamente esistere una ulteriore equazione di equilibrio del tipo $f(T_1, T_2, P) = 0$ che coinvolga sia le tensioni T_1 e T_2 che una azione esterna di chiusura della coppia, P.
Di conseguenza uno scorrimento esteso a tutto l'arco di abbracciamento della puleggia motrice può esistere in una sola condizione di funzionamento, quella in cui siano contemporaneamente verificate le tre equazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{T_2 - q\,v^2}{T_1 - q\,v^2} = e^{-f\Delta\vartheta} \\ &\frac{C_m}{R_1} = T_1 - T_2 \\ &f(T_1, T_2, P) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(25)}$$

ed in cui il valore di C_m non può variare.
Infatti risolvendo le prime due delle (25) per T_1 e T_2 si ha:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{C_m}{R_1}\frac{1}{1 - e^{-f\Delta\vartheta}} + qv^2 \\ T_2 &= \frac{C_m}{R_1}\frac{e^{-f\Delta\vartheta}}{1 - e^{-f\Delta\vartheta}} + qv^2 \\ f(T_1, T_2, P) &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(25')}$$

e quindi se i valori di T_1 e T_2 sono già definiti dalla terza equazione ci può

essere un solo valore di C_m che soddisfi contemporaneamente le prime due.

Questa conclusione potrebbe fare insorgere dubbi circa la correttezza dell'ipotesi di scorrimento avanzata per giustificare la variazione delle tensioni.

Ma lo scorrimento non può non esserci.

Infatti, per la continuità del moto, la portata di massa del flessibile attraverso una generica sezione Σ deve essere costante; deve essere cioè:

$$q\, dl = q_0\, dl_0$$

essendo dl_0 il valore di dl quando T=0.

Ma, a sua volta, è anche:

$$dl = dl_0(1+\varepsilon_c) = dl_0\left(1+\frac{T}{E_c S}\right)$$

che, divisa per dt, dà:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl_0}{dt}\left(1+\frac{T}{E_c S}\right)$$

ossia:

$$v = v_0\left(1+\frac{T}{E_c S}\right)$$

Questo fa vedere che la velocità dei punti del flessibile cresce al crescere della tensione nel punto; quindi poiché la velocità dei punti sulla puleggia si mantiene costante (ωR) avremo lungo il contatto una $\vec{v}^{(r)} \neq 0$ e necessariamente anche una $\vec{F}_t \neq 0$.

Lo scorrimento deve quindi esserci.

Non ci resta che concludere che, in condizioni normali di funzionamento, non tutto l'arco di abbracciamento è anche arco di scorrimento; ma che l'arco di abbracciamento risulti suddiviso in un arco di aderenza $\Delta\vartheta_0$ ed in un arco di scorrimento elastico $\Delta\vartheta^*$, di modo tale che, in ogni caso, sia sempre:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_0 + \Delta\vartheta^* \qquad \textbf{(26)}$$

Lungo l'arco $\Delta\vartheta_0$, quindi la velocità del flessibile dovrà essere uguale alla velocità della puleggia.

Tale arco, sulla puleggia motrice ha inizio nel punto H_1 dove, infatti:

- non può essere $v_1 > \omega_1 R_1$;

se così fosse, infatti, la velocità relativa del flessibile rispetto alla puleggia

sarebbe $v^{(r)} = (v_1-\omega_1 R_1) > 0$, orientata quindi nel verso delle s crescenti, e si avrebbe allora $F_t<0$ e di conseguenza $dT/ds>0$, ossia una tensione crescente nel verso positivo delle s.
Ciò significherebbe che la v_1, già maggiore di $\omega_1 R_1$ in H_1, da quel punto in avanti, con il crescere della tensione, crescerebbe ancora secondo il verso delle s crescenti: si avrebbe quindi scorrimento globale lungo tutto l'arco di abbracciamento; peraltro, contrariamente a quanto trovato prima, avremmo $T_2>T_1$.
- non può essere $v_1< \omega_1 R_1$;
se così fosse, infatti, la velocità relativa del flessibile rispetto alla puleggia sarebbe $v^{(r)} = (v_1-\omega_1 R_1) < 0$, orientata quindi nel verso delle s decrescenti; si avrebbe allora $F_t>0$ e di conseguenza $dT/ds<0$, ossia una tensione decrescente nel verso positivo delle s.
Ciò significherebbe che la v_1, già minore di $\omega_1 R_1$ in H_1, da quel punto in avanti continuerebbe a diminuire lungo l'arco di abbracciamento restando quindi sempre al di sotto del valore di $\omega_1 R_1$; avremmo di nuovo scorrimento globale.

Non resta che concludere che la velocità del punto del flessibile a contatto con la puleggia motrice in H_1 sarà:

$$v_1 = \omega_1 R_1 = v_0\left(1+\frac{T_1}{E_c S}\right) \qquad \textbf{(27)}$$

Ragionando in modo analogo per ciò che riguarda il punto del flessibile a contatto con la puleggia condotta in H_1^* si potrà concludere che la sua velocità deve essere:

$$v_1^* = \omega_2 R_2 = v_0^*\left(1+\frac{T_1^*}{E_c S}\right) \qquad \textbf{(28)}$$

In definitiva, se non ci si trova nelle condizioni limite dello scorrimento globale, l'equazione delle tensioni sul flessibile avvolto sulla puleggia motrice deve essere scritta come:

$$\frac{T_2 - q v^2}{T_1 - q v^2} = e^{-f\Delta\vartheta^*} \qquad \textbf{(29)}$$

e quella delle tensioni sul flessibile avvolto sulla puleggia condotta come:

$$\frac{T_2^* - q v^2}{T_1^* - q v^2} = e^{f\Delta\vartheta^*} \qquad \textbf{(30)}$$

con $\Delta\vartheta^* \leq \Delta\vartheta$ in entrambi i casi.

§ 6. - Rapporto di trasmissione.

Se il flessibile non fosse deformabile avremmo $\varepsilon_c=0$ e quindi, per la (27) e per la (28), $v=v_0$.
Ne seguirebbe:

$$v_1 = v_1^* = v_0 = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

per cui il rapporto di trasmissione sarebbe semplicemente:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Ma poiché il flessibile è deformabile dovremo scrivere meglio:

$$\frac{v_1^*}{v_1} = \frac{\omega_2 R_2}{\omega_1 R_{1l}} = \frac{v_{H_1^*}}{v_{H_1}} = \frac{v_0\left(1+\dfrac{T_1^*}{E_c S}\right)}{v_0\left(1+\dfrac{T_1}{E_c S}\right)}$$

da cui:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}\frac{\left(1+\dfrac{T_1^*}{E_c S}\right)}{\left(1+\dfrac{T_1}{E_c S}\right)} \qquad \textbf{(31)}$$

Per piccoli dislivelli fra i punti H_2 ed H_1^*, ossia per trasmissioni corte o in cui sia comunque trascurabile la variazione di tensione fra i capi del ramo libero del flessibile dovuta ad una differenza di quota fra le due pulegge (v. §3), possiamo pure porre $\vec{T}_1^* \cong \vec{T}_2$ e scrivere di conseguenza:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}\frac{\left(1+\dfrac{T_2}{E_c S}\right)}{\left(1+\dfrac{T_1}{E_c S}\right)} < \frac{R_1}{R_2} \qquad \textbf{(31')}$$

essendo $\vec{T}_2 < \vec{T}_1$.

§ 7. - Rendimento.

Il rapporto fra potenza utile e potenza motrice equivale al rendimento della trasmissione.
Si potrà scrivere pertanto:

$$\eta = \frac{C_r \omega_2}{C_m \omega_1} = \frac{C_r}{C_m} \frac{v_1^* / R_2}{v_1 / R_1} = \frac{C_r}{C_m} \frac{R_1}{R_2} \frac{\left(1 + \dfrac{T_2}{E_c S}\right)}{\left(1 + \dfrac{T_1}{E_c S}\right)} =$$

$$= \frac{R_2 \left(T_2^* - T_1^*\right)}{R_1 \left(T_1 - T_2\right)} \frac{R_1}{R_2} \frac{\left(1 + \dfrac{T_2}{E_c S}\right)}{\left(1 + \dfrac{T_1}{E_c S}\right)}$$

ossia, semplificando:

$$\eta = \frac{(T_2^* - T_1^*)}{(T_1 - T_2)} \frac{\left(1 + \dfrac{T_2}{E_c S}\right)}{\left(1 + \dfrac{T_1}{E_c S}\right)} \qquad \textbf{(32)}$$

Si può pure ammettere che sia $\left(\vec{T}_2^* - \vec{T}_1^*\right) \cong \left(T_1 - T_2\right)$ e quindi scrivere in definitiva:

$$\eta \cong \frac{\left(1 + \dfrac{T_2}{E_c S}\right)}{\left(1 + \dfrac{T_1}{E_c S}\right)} \qquad \textbf{(33)}$$

In realtà, mentre l'aver posto $\vec{T}_1 \cong \vec{T}_2^*$ e $\vec{T}_2 \cong \vec{T}_1^*$ è lecito solamente quando i dislivelli sono piccoli, è invece ottima l'approssimazione, come si vedrà nel successivo paragrafo, quando si pone $\left(\vec{T}_2^* - \vec{T}_1^*\right) \cong \left(T_1 - T_2\right)$ e in particolar modo se $R_1 \approx R_2$.

§ 8. - Variazione della tensione lungo i rami liberi del flessibile in moto.

Supponiamo che le due pulegge siano collocate ad una certa distanza ed che fra i loro centri si abbia pure un certo dislivello.
Entrambi i rami liberi, ossia i tratti di flessibile, quello compreso fra i punti H_1 ed H_2^* e quello compreso fra i punti H_2 ed H_1^*, risulteranno soggetti ad una forza esterna corrispondente unicamente al peso del flessibile: ogni tratto di lunghezza ds sarà soggetto, cioè, ad una forza $\vec{F} = -qg\vec{j}$ le cui componenti secondo i versori $\vec{\tau}$ ed $\vec{n}$ saranno (fig. 8):

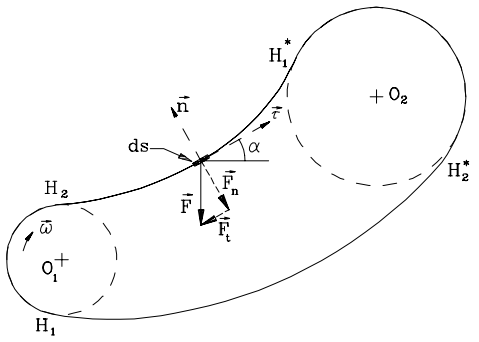


Figura 8

$$\vec{F}_t = \vec{F} \times \vec{\tau} = -qg \sin\alpha \, \vec{\tau}$$
$$\vec{F}_n = \vec{F} \times \vec{n} = -qg \cos\alpha \, \vec{n}$$

avendo indicato con α l'angolo della tangente nel punto rispetto all'orizzontale.
Le equazioni di equilibrio (16) si scriveranno, allora, come:

$$\frac{d\left(T - qv^2\right)}{ds} - qg \sin\alpha = 0$$
$$\frac{T - qv^2}{\rho} - qg \cos\alpha = 0$$

essendo ρ il raggio di curvatura del flessibile nel punto considerato.
Se poi riteniamo che sia v=cost, possiamo anche porre $T'=T-qv^2$ e $dT'/ds = dT/ds$ per scrivere quindi:

$$\frac{dT'}{ds} - qg \sin\alpha = 0$$
$$\frac{T'}{\rho} - qg \cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(34)}$$

che sono del tutto analoghe alle equazioni di equilibrio (4) del flessibile immobile e sollecitato solamente dal proprio peso.
Infatti, essendo $ds = \rho \, d\alpha$, le (34) si scrivono:

$$\frac{dT'}{\rho} = qg \sin\alpha \; d\alpha$$
$$\frac{T'}{\rho} = qg \cos\alpha$$

per cui, facendo il rapporto si ottiene:

$$\frac{dT'}{T'} = \tan\alpha \; d\alpha$$

che integrata dà:

$$\ln T' = -\ln\cos\alpha + \text{cost} = \ln\left(\frac{\text{c}}{\cos\alpha}\right)$$

ossia:

$$T'\cos\alpha = \text{c} = T'\frac{dx}{ds} = T_0$$

che è la medesima condizione trovata al §3.
Inoltre dalla prima delle (34) si ha pure:

$$\frac{dT'}{ds} = qg\sin\alpha = qg\frac{dy}{ds}$$

che integrata dà immediatamente la (12):

$$T' = qgy \qquad \textbf{(35)}$$

facendo le medesime ipotesi del §3 circa la scelta del riferimento.
Ciò vuol dire che, anche se il flessibile è in moto, ciascun ramo libero si disporrà secondo una catenaria omogenea (fig. 9) il cui vertice P_0 (il punto più basso in cui la tensione sarà T'_0), disterà dalla base della quantità:

$$y_0 = \frac{T'_{0'}}{qg}$$

Per mezzo della (35) possiamo quindi scrivere la differenza fra le tensioni esistenti nel ramo più teso fra i punti H_1 ed H_2^* come:

$$T_2^* - T_1 = qg(y_{H_2^*} - y_{H_1})$$

e per il ramo meno teso,

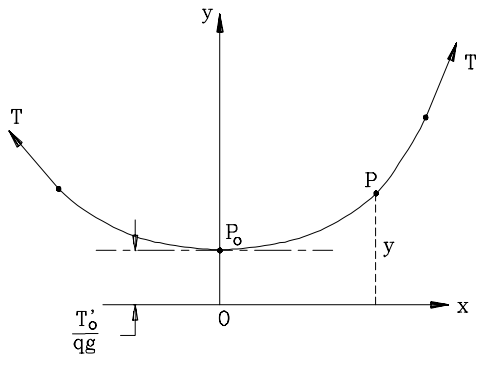


Figura 9

fra i punti H_2 ed H_1^*, come:

$$T_1^* - T_2 = qg(y_{H_1^*} - y_{H_2})$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni precedenti si ha:

$$(T_2^* - T_1^*) - (T_1 - T_2) = qg\left[(y_{H_2^*} - y_{H_1^*}) - (y_{H_1} - y_{H_2})\right]$$

il cui secondo membro può ritenersi nullo se i diametri delle due pulegge non sono notevolmente diversi.
Si può quindi concludere che sia anche:

$$|(T_2^* - T_1^*)| \cong |(T_1 - T_2)| \qquad \textbf{(36)}$$

§ 9. - Sistemi di forzamento.

Per il calcolo vero e proprio delle tensioni esistenti nei singoli tratti del flessibile è necessario prendere in considerazione il modo in cui viene generata nel flessibile la tensione di forzamento iniziale, quella che occorre a garantire la chiusura della coppia.

I modi per ottenere ciò sono essenzialmente tre:

a) Puleggia a sopporto oscillante (fig. 10).

Una delle due pulegge, per es. la motrice, è montata su un braccio che può ruotare intorno alla coppia rotoidale fissa O_1 per effetto del peso complessivo mg supposto agente in G.
Tale rotazione è impedita dalla presenza del flessibile avvolto sulla stessa puleggia.

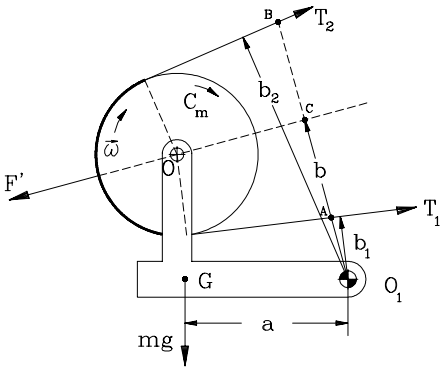


Figura 10

Possiamo scrivere l'equilibrio del sistema sopporto+puleggia+flessibile+ motore (motore supposto solidale al supporto*) sottoposto all'azione delle forze mg, T_1, T_2, ed F', essendo quest'ultima il risultante delle forze d'inerzia che sollecita il tratto di flessibile lungo l'arco di abbracciamento α.

* In tal modo la coppia C_m è azione interna al sistema.

Ora, ciascun tratto di flessibile ds è sollecitato dalla forza d'inerzia la cui espressione (13) è stata già calcolata nelle due componenti normale e tangenziale $d\vec{F}_n'$ e $d\vec{F}_t'$.
La distribuzione delle componenti normali è certamente una distribuzione radiale di vettori tutti del medesimo modulo per cui il risultante avrà certamente come retta di applicazione una retta che passa per il punto O e che divide in due parti eguali l'arco di abbracciamento; il modulo sarà dato dalla somma delle componenti delle $d\vec{F}_n'$ aventi quindi la direzione di tale asse di simmetria, essendo necessariamente nulla la somma delle componenti ad esso perpendicolari. Prendendo questo stesso asse come riferimento, scriveremo allora:

$$\vec{F}'_n = -q\frac{v^2}{R_1}R_1\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\vartheta\, d\vartheta = -qv^2\,2\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \textbf{(37)}$$

Per quanto riguarda, invece, il risultante delle $d\vec{F}_t'$, questo, risultando dell'ordine di grandezza di v_2-v_1, può essere trascurato in quanto quantitativamente piccolo rispetto al valore delle altre tensioni.
Allora, con riferimento alla fig. 9, l'equilibrio alla rotazione di tutto il sistema intorno al punto O_1 si scrive come:

$$mga - T_1 b_1 - T_2 b_2 - F'_n\, b = 0 \qquad \textbf{(38)}$$

dove b è il braccio del risultante $\vec{F}_n'$ che vale:

$$b = \frac{b_1 + b_2}{2\sin\alpha/2} \qquad \textbf{(39)}$$

Infatti è:

$$(b + BC)\sin\alpha/2 = b_2$$
$$(b - AC)\sin\alpha/2 = b_1$$

e quindi sommando, e tenendo conto che, data la simmetria, è AC=BC, si ha proprio la (39).
Sostituendo nella (38) la (37) e la (39) si ricava pertanto:

$$mga - T_1 b_1 - T_2 b_2 + qv^2(b_1 + b_2) = 0 \qquad \textbf{(40)}$$

D'altra parte, per l'equilibrio della puleggia con il suo tratto di flessibile avvolto, dovrà sempre essere:

$$C_m - T_1 R_1 + T_2 R_1 = 0 \qquad \textbf{(41)}$$

Allora, risolvendo il sistema delle due equazioni (40) e (41):

$$T_1 b_1 + T_2 b_2 = mga + qv^2 (b_1 + b_2)$$
$$T_1 - T_2 = \frac{C_m}{R_1} \qquad \textbf{(42)}$$

si ha:

$$T_1 (b_1 + b_2) = \frac{C_m}{R_1} b_2 + mga + qv^2 (b_1 + b_2)$$
$$T_2 = T_1 - \frac{C_m}{R_1}$$

e quindi:

$$T_1 = mg \frac{a}{b_1 + b_2} + qv^2 + \frac{C_m}{R_1} \frac{b_2}{b_1 + b_2}$$
$$\textbf{(43)}$$
$$T_2 = mg \frac{a}{b_1 + b_2} + qv^2 - \frac{C_m}{R_1} \frac{b_2}{b_1 + b_2}$$

Note che siano la T_1 e la T_2, l'ampiezza dell'arco di scorrimento elastico $\Delta\theta^*$ ($\leq \Delta\theta$) si ricava dalla:

$$\frac{T_2 - q v^2}{T_1 - q v^2} = e^{-f\Delta\vartheta^*} \qquad \textbf{(44)}$$

Si possono allora considerare due casi:
- quello in cui la C_m cresce mentre la v si mantiene costante; in tal caso la seconda delle (42) mostra che cresce la differenza fra le tensioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, ossia (fig. 11) $\mathbf{T}_1$ cresce mentre la $\mathbf{T}_2$ diminuisce e per questo, si desume dalla (44), cresce anche l'arco di scorrimento elastico $\Delta\vartheta^*$ e quest'ultimo crescerà al crescere della C_m finché non avrà raggiunto il massimo valore possibile, $\Delta\vartheta$, oltre il quale si avrebbe lo scorrimento globale del flessibile sulla puleggia: la trasmissione non avverrebbe più in moto ordinato e tutta la potenza in eccesso si perderebbe in attrito.

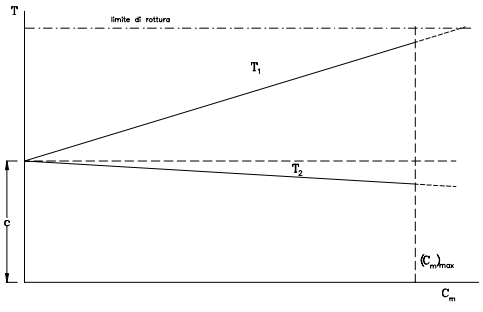


Figura 11

- quello in cui la C_m rimane costante mentre cresce la velocità, v, del flessibile; in questo caso le T_1 e T_2 (43) crescono entrambe della stessa quantità e resteranno costanti pertanto le differenze $T_1 - qv^2$ e $T_2 - qv^2$: pertanto nella (44) il rapporto rimane costante e non varia quindi l'arco di scorrimento elastico, $\Delta\vartheta^*$, che quindi risulta fissato solo dal valore di C_m.
Di fatto, l'incremento contemporaneo della T_1 e della T_2 avrà come conseguenza l'allungamento di tutto il flessibile, allungamento che sarà compensato da un incremento dell'interasse fra puleggia motrice e puleggia condotta (il cui asse di rotazione è fisso) per effetto della rotazione del sopporto intorno ad O_1.
Il limite di funzionamento per tale dispositivo è dunque lo scorrimento globale che si verifica superando il valore di coppia massima, oppure, ovviamente, l'interruzione della trasmissione se la T_1 dovesse raggiungere il valore della tensione di rottura del flessibile prima del verificarsi dello scorrimento globale.

b) Puleggia con rullo tenditore (fig.12).

Consideriamo l'equilibrio alla rotazione dell'equipaggio mobile che porta il rullo tenditore e che è sottoposto all'azione del carico esterno (mg) ed alla reazione vincolare, T, nella coppia rotoidale mobile O, oltre che alla reazione vincolare in O_1; dovrà essere:

$$Tb = mga$$

da cui:

$$T = mg\frac{a}{b} \qquad \textbf{(45)}$$

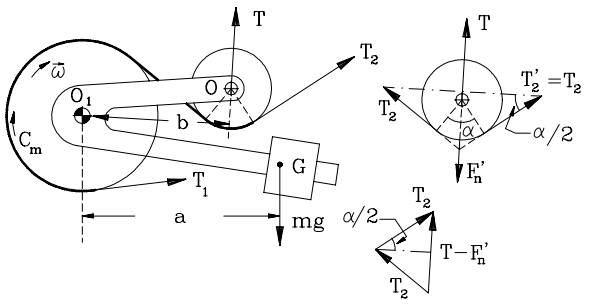


Figura 12

Per l'equilibrio del rullo con il tratto di flessibile in contatto con esso, sottoposto in O alla T e poi alle forze T_2 e T'_2 ed F'_n (*) ad esso applicate dal tratto di flessibile su cui esso poggia, occorre che sia, per l'equilibrio dei momenti rispetto al centro O del rullo :

$$T_2 r - T_2' r = 0 \qquad \textbf{(46)}$$

ed anche, per l'equilibrio alla traslazione:

(*) Formalmente risulta, ovviamente, identica alla (37).

$$T = T_2 \sin\frac{\alpha}{2} + T_2' \sin\frac{\alpha}{2} - qv^2 2\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \textbf{(47)}$$

Si ha dalla (46) che è T_2=T'$_2$ e di conseguenza dalla (47):

$$T = 2\left(T_2 - qv^2\right)\sin\left(\alpha/2\right) \qquad \textbf{(47')}$$

Sostituendo in questa ultima il valore di T indicato in (45) si ottiene l'espressione della T_2, ossia:

$$T_2 = \frac{mga}{2b\sin\left(\alpha/2\right)} + qv^2 \qquad \textbf{(48)}$$

Si trova pertanto che il valore di questa tensione è indipendente dalla coppia motrice C_m mentre è funzione solamente del carico esterno e della velocità del flessibile.
Inoltre, dovendo sempre essere per l'equilibrio della puleggia:

$$C_m = \left(T_1 - T_2\right)R_1$$

è immediato ricavare l'espressione dell'altra tensione:

$$T_1 = T_2 + \frac{C_m}{R_1} = \frac{mga}{2b\sin\left(\alpha/2\right)} + qv^2 + \frac{C_m}{R_1} \qquad \textbf{(49)}$$

che risulta quindi completamente definita.
Si vede allora che, se cresce la C_m mentre la v=cost, la T_2 rimane costante ma la T_1 cresce linearmente.
Ugualmente, (44), crescerà il valore dell'arco di scorrimento elastico fino a quando, in corrispondenza del valore massimo di C_m, l'arco di scorrimento elastico non avrà assunto il valore dell'intero arco di abbracciamento.
Anche qui, come nel caso precedente, mantenendosi costante la C_m e facendo crescere invece la velocità del flessibile, la T_1 e la T_2 aumentano della stessa quantità con il conseguente aumento della lunghezza complessiva del flessibile stesso.
L'allungamento del flessibile, sia che consegua all'aumento della coppia e quindi per l'incremento della sola T_1, sia che dipenda invece dall'aumento della velocità sarà compensato da una rotazione del rullo e del suo equipaggio intorno ad O_1 e verso il basso; si verifica, quindi, un'altra circo-

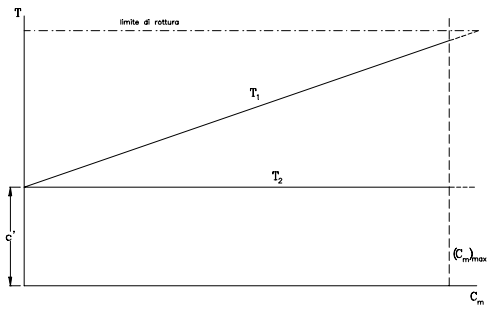


Figura 13

stanza: quella di un conseguente aumento dell'arco di abbracciamento del flessibile ($\Delta\vartheta$) che rallenterà il raggiungimento delle condizioni di scorrimento globale.
Questo rappresenta sicuramente un vantaggio, ma solo se si può essere certi che il concomitante aumento della T_1 non porti al superamento del carico di rottura del flessibile stesso.
Se si volesse tener conto di questa circostanza, tuttavia, le relazioni prima trovate necessitano di opportune correzioni che tengano conto sia del coefficiente di allungamento del flessibile come pure del contemporaneo incremento, sul rullo, dell'angolo α.

E' buona norma, infine, che il rullo sia montato sul ramo meno teso per evitare inutili sovrapposizioni di sollecitazioni, e che il sistema sia disposto in modo tale da avere il ramo più teso dal lato inferiore: proprio perché più teso esso avrà una freccia minore e se ne avvantaggia quindi il valore dell'arco di abbracciamento.

c) Forzamento iniziale (fig.14)

A flessibile fermo, una delle due pulegge viene allontanata dall'altra e poi bloccata in modo da lasciare il flessibile sottoposto preventivamente ad una determinata tensione.
Indicando con T_0 il valore di questa tensione iniziale, cerchiamo le relazioni che legano le tensioni di esercizio, la T_1 e la T_2, alla T_0.

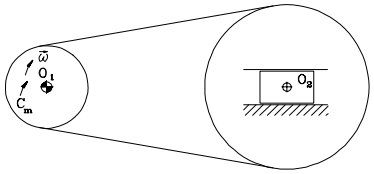


Figura 14

Sia l* la lunghezza del flessibile smontato e sia Δl_0 l'allungamento da esso subito quando, una volta montato, sia sottoposto alla T_0 raggiungendo di conseguenza la lunghezza finale:

$$l_0 = l^* + \Delta l_0$$

In condizioni di esercizio e sottoposto quindi alle T_1 e T_2 esso subisce un allungamento Δl di modo tale che la sua lunghezza finale sarà:

$$l = l^* + \Delta l$$

Sottraendo la prima dalla seconda si ottiene:

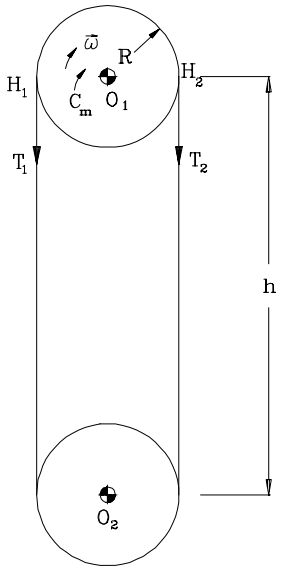


Figura 15

$$l - l_0 = \Delta l - \Delta l_0 = 0$$

e ciò è vero in quanto la lunghezza complessiva del flessibile in condizioni di esercizio non può essere diversa dalla lunghezza che raggiunge in condizioni di precarico.
Pertanto dovrà essere:

$$\Delta l = \Delta l_0 \qquad \textbf{(50)}$$

Con questa condizione cerchiamo i valori di T_1 e T_2 nel caso in cui le due pulegge (fig. 15) abbiano lo stesso raggio R e siano disposte verticalmente (per non dover tener conto della inflessione del flessibile dovuta al proprio peso) essendo poi h la distanza fra i centri di rotazione.
Sarà:

$$\Delta l_0 = \varepsilon\, l_0 = \frac{T_0}{ES}\left(2h + 2\pi\, R\right) = \frac{2\,T_0}{ES}\left(h + \pi\, R\right) \qquad \textbf{(51)}$$

Supponiamo poi, che i tratti di flessibile avvolti sulle pulegge siano sottoposti ad una tensione media pari a $(T_1+T_2)/2$ [il che è approssimato a meno di termini in $(f\Delta\vartheta)^3$]; ed allora potremo scrivere:

$$\Delta l = \frac{T_1}{ES}h + \frac{T_2}{ES}h + \frac{T_1 + T_2}{2ES}2\pi\, R = \frac{T_1 + T_2}{ES}\left(h + \pi\, R\right) \qquad \textbf{(52)}$$

Eguagliando la (51) e la (52) si ottiene quindi:

$$T_1 + T_2 = 2T_0 \qquad \textbf{(53)}$$

e cioè:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \qquad \textbf{(54)}$$

Poiché anche in questo caso dovrà poi essere:

$$T_1 - T_2 = \frac{C_m}{R} \qquad \textbf{(55)}$$

risolvendo il sistema delle (53) e (55) si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \frac{C_m}{2R} \\ T_2 &= T_0 - \frac{C_m}{2R} \end{aligned} \qquad \textbf{(56)}$$

In questo caso, quindi, si vede che le tensioni variano linearmente con la C_m, l'una in crescita, l'altra in diminuzione, e con lo stesso coefficiente

di proporzionalità.
Le variazioni di T_1 e T_2 per effetto di un incremento della coppia motrice (fig. 16) avranno quindi un andamento simmetrico rispetto al valore di T_0 .
Ovviamente esse finiranno per essere limitate dal verificarsi dello scorrimento globale così come è imposto dalla (44), anche in questo caso; purché, naturalmente, in quelle condizioni il valore della T_1 sia ancora al di sotto del limite di rottura del flessibile.

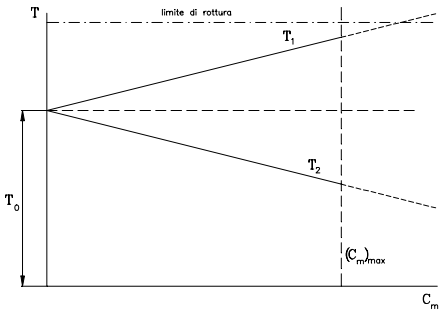


Figura 16

Se, tenendo costante la C_m, si fa aumentare il valore della velocità del flessibile si raggiungerà ugualmente la condizione di scorrimento globale. Si vede dalle (25'), ponendo $\Delta\vartheta^*$ al posto di $\Delta\vartheta$, la T_1 e la T_2 si incrementano della stessa quantità lasciando costante (55) la loro differenza; dovrà pure restare costante (53) la loro somma. Il rapporto (44) si modifica indicando un aumento dell'arco di scorrimento elastico.
Infatti, se poniamo $X = qv^2$, possiamo scrivere:

$$Y = \frac{T_1 - X}{T_2 - X} = e^{f\Delta\vartheta^*}$$

da cui derivando e tenendo conto delle (25'):

$$\frac{dY}{dX} = \frac{T_1' - T_2'}{(T_2 - X)^2} = \frac{C_m}{R(T_2 - X)^2} > 0$$

Si conclude quindi che la funzione Y(X) cresce al crescere della velocità del flessibile e quindi deve crescere anche l'ampiezza dell'arco di scorrimento elastico $\Delta\vartheta^*$.

§ 10. - Rigidezza di funi e cinghie.

Per quanto classificata fra gli organi flessibili, una fune o una cinghia presenta sempre una certa rigidezza, in parte elastica (dovuta alla deformazione elastica degli elementi costituenti) e in parte anelastica (dovuta all'attrito interno per mutuo scorrimento degli stessi elementi).

Consideriamo, a titolo di esempio, il caso di una fune che si av-

volge su una puleggia di raggio R, in moto con velocità angolare $\vec{\omega}$, e che sia sottoposta soltanto alle tensioni $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$.

Se la fune fosse perfettamente flessibile essa si disporrebbe (fig. 17) secondo la linea tratteggiata, iniziando il contatto con la puleggia nel punto H_1.

Se, invece, ci riferiamo ad una fune reale, occorre considerare che nel punto H_1, dove dovrebbe iniziare il contatto, la curvatura del flessibile avrebbe una variazione discontinua dal valore 0 al valore 1/R e che tale variazione richiederebbe che venisse applicato un momento pari al momento di reazione elastica della fune.

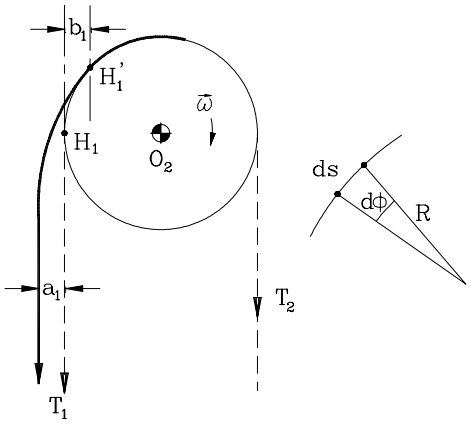


Figura 17

Questo vale:

$$M_f = EI\frac{d\Phi}{ds} = EI\frac{1}{R} \qquad \textbf{(57)}$$

dove E è il modulo di elasticità normale della fune, ed I il momento d'inerzia (di figura) della sua sezione retta.

Deve quindi concludersi che la configurazione del flessibile di cui sopra è impossibile: con il contatto in H_1, sul ramo di fune interessato non agisce alcuna forza capace di produrre alcun momento; la $\vec{T}_1$, l'unica agente sulla fune, non ha momento rispetto ad H_1 e quindi non è in grado di far variare la sua curvatura.

Dobbiamo allora ammettere che il ramo interessato (fig.17) si scosti dalla posizione ideale di una certa quantità a_1, in modo tale che il contatto si porti asintoticamente nel punto H'_1, spostato della quantità b_1 rispetto ad H_1.

Se si suppone che tale scostamento sia dovuto soltanto all'effetto della rigidezza elastica, la determinazione dei valori di a_1 e di b_1 può essere fatta considerando che allo scostamento a_1 corrisponde un maggior lavoro (perduto) che la $\vec{T}_1$ deve compiere pari a:

$$dL_w = T_1 a_1 \omega\, dt \qquad \textbf{(58)}$$

il quale deve uguagliare il lavoro di deformazione necessario a far sì che un tratto di fune lungo ds=Rωdt che deve avvolgersi sulla puleggia passi, nello stesso tempo dt, , dalla curvatura nulla alla curvatura 1/R.

Tale lavoro vale:

$$dL_{def} = \frac{1}{2} M_f d\Phi$$

dove è (57):

$$d\Phi = \frac{M_f}{EI} ds = \frac{M_f}{EI} R d\vartheta = \frac{M_f}{EI} R\omega\, dt$$

per cui, sostituendo:

$$dL_{def} = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI} R\omega\, dt \qquad \textbf{(59)}$$

Uguagliando i due lavori, (58) e (59), si ha:

$$T_1 a_1 = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI} R \qquad \textbf{(60)}$$

da cui:

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI} \frac{R}{T_1} \qquad \textbf{(61)}$$

Tenendo conto della (57), si ottiene infine:

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{EI} \left(\frac{EI}{R} \right)^2 \frac{R}{T_1} = \frac{1}{2} \frac{EI}{RT_1} \qquad \textbf{(62)}$$

Il valore di b_1 si può ricavare considerando il momento della $\vec{T}_1$ rispetto al punto H'_1.
Questo vale:

$$M_f = T_1 (a_1 + b_1)$$

e quindi:

$$T_1 = \frac{M_f}{a_1 + b_1} = \frac{EI}{R(a_1 + b_1)}$$

da cui, tenendo conto della (62):

$$a_1 + b_1 = \frac{EI}{RT_1} = 2a_1$$

e ciò vuol dire che è $b_1 = a_1$.

Quanto sopra si può ripetere, ovviamente, anche per il ramo in u-

scita dalla puleggia: sottoposto alla $\vec{T}_2$, esso si scosterà dalla configurazione ideale di una quantità a_2.
Poiché le caratteristiche della fune sono le medesime, possiamo concludere, tenendo conto della (60), che sarà:

$$T_2 a_2 = T_1 a_1 \qquad \textbf{(63)}$$

Ma, come già si è visto al § 2, un flessibile presenta anche, in certa misura, della rigidezza di tipo anelastico.

Volendo tener conto anche dell'effetto di questo tipo di rigidezza (fig.18), dobbiamo ammettere che per deformare il ramo di fune che va ad avvolgersi sulla puleggia occorrerà un lavoro maggiore, mentre per riportare nella configurazione rettilinea il ramo di flessibile che ne esce il lavoro necessario dovrà essere minore di quello prima previsto e ciò in quanto, in uscita, mentre il lavoro di deformazione elastica viene integralmente restituito (la fune tenderebbe a riprendere la configurazione rettilinea), il lavoro speso per la deformazione anelastica non viene più restituito (la fune tenderebbe a mantenere la curvatura assunta).

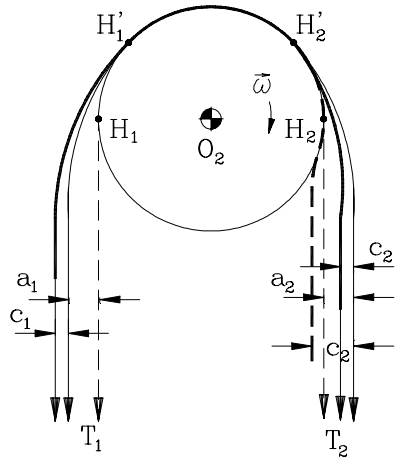


Figura 18

A ciò deve corrispondere: in ingresso, un maggior momento flettente complessivo e quindi uno scostamento rispetto alla configurazione ideale maggiore di a_1; in uscita un minor momento flettente complessivo e quindi uno scostamento minore di a_2.
In definitiva, detti c_1 e c_2 gli scostamenti corrispondenti alla rigidezza anelastica, gli scostamenti complessivi della fune dalla posizione ideale saranno $(a_1+c_1)>a_1$ nell'avvolgimento e $(a_2-c_2)<a_2$ nello svolgimento.
I valori di a_1, c_1, a_2 e c_2, e quindi degli scostamenti complessivi, dipendono essenzialmente dalla qualità del materiale che costituisce la fune e dalla sua età. In particolare è anche possibile (fig. 18) che sia $c_2>a_2$ e che, in uscita, il flessibile assuma la configurazione indicata con la linea tratteggiata.

Tenendo conto degli scostamenti indicati, l'equilibrio alla rotazione della puleggia è dato, allora, dalla relazione:

$$T_1(R + a_1 + c_1) - T_2(R + a_2 - c_2) = 0$$

ossia:

$$(T_2 - T_1)R - (T_1 c_1 + T_2 c_2) + T_2 a_2 - T_1 a_1 = 0$$

ma anche, tenendo conto della (63):

$$(T_2 - T_1)R - (T_1 c_1 + T_2 c_2) = 0 \qquad \textbf{(64)}$$

La stessa (64), se moltiplicata per ωdt, evidenzia i termini del lavoro motore: $T_2 R\omega\, dt$; del lavoro resistente utile: $-T_1 R\omega\, dt$, e del lavoro perduto per effetto dell'avvolgimento e dello svolgimento della fune sulla puleggia: $-(T_1 c_1 + T_2 c_2)\omega\, dt$.
Quest'ultimo termine si trova generalmente espresso anche come:

$$\frac{dL_p}{dt} = -\omega\,(T_1 c_1 + T_2 c_2) = -\omega\, R\left(T_1 \frac{c_1}{R} + T_2 \frac{c_2}{R}\right) \qquad \textbf{(65)}$$

sotto forma, cioè, di potenza perduta ed evidenziando i rapporti caratteristici dell'accoppiamento fune-puleggia.

Le quantità c_1/R e c_2/R sono di difficilissima deduzione teorica; per i cavi più comuni e nelle ordinarie condizioni di funzionamento vale con buona approssimazione la formula sperimentale:

$$\frac{c_1}{R} = \frac{c_2}{R} = b\left(\frac{\delta}{D}\right)^n \qquad \textbf{(66)}$$

dove è *b*=cost, δ il diametro del cavo, *D* il diametro della puleggia ed *n* un esponente >1.
La formula proposta dal Giovannozzi è:

$$\frac{c}{R} = 0.56\left(\frac{\delta}{D}\right)^{\frac{4}{3}}$$

§ 11. – Carrucole e paranchi.

Quanto si è visto nel precedente paragrafo consente di trovare, in condizioni reali, la relazione che intercorre fra il carico Q da sollevare e la forza P necessaria per tale azione negli apparecchi di sollevamento.

a. Carrucola fissa.

La puleggia della carrucola (fig 19) abbia raggio R e sia d il diametro del perno; sia poi f il coefficiente d'attrito nella coppia rotoidale. Sia infine Q il carico da sollevare e P la forza da impiegare allo scopo.
Nella fase di sollevamento di Q, il verso di rotazione è orario e quindi sarà $Q \equiv T_1$ e $P \equiv T_2$.
Le forze agenti sulla puleggia sono, la P, la Q, e la reazione vincolare Φ tangente al cerchio d'attrito in O_1 e direzione parallela alle altre forze.

L'equilibrio alla rotazione della puleggia stessa, tenendo conto anche della (64), si scriverà:

$$P(R-c)-Q(R+c)-\Phi\frac{d}{2}\sin\varphi=0$$

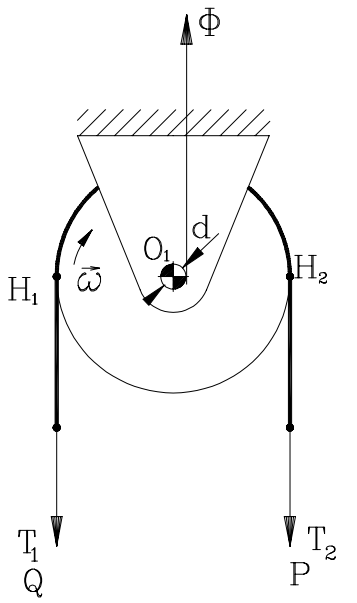


Figura 19

Poiché per l'equilibrio alla traslazione deve essere $\Phi = P + Q$, avremo, dividendo per R:

$$P\left(1-\frac{c}{R}\right)-Q\left(1+\frac{c}{R}\right)-(P+Q)\frac{d}{2R}\sin\varphi=0$$

Sarà allora:

$$P\left(1-\frac{c}{R}-\frac{d}{2R}\sin\varphi\right)-Q\left(1+\frac{c}{R}+\frac{d}{2R}\sin\varphi\right)=0$$

e quindi:

$$P=Q\frac{1+\frac{c}{R}+\frac{d}{2R}\sin\varphi}{1-\frac{c}{R}-\frac{d}{2R}\sin\varphi}=KQ \qquad \textbf{(67)}$$

Il coefficiente K che, evidentemente, è maggiore dell'unità si presenta come il fattore di moltiplicazione che, tenendo conto di tutte le perdite, fa crescere il valore della tensione sul ramo di uscita rispetto al valore della tensione sul ramo di ingresso.
Il suo valore, legato non solo alle caratteristiche fisiche del flessibile ma

anche al rapporto geometrico dell'accoppiamento, assume valori che orientativamente possono oscillare fra 1.02 e 1.08 per funi vegetali, ma, per funi d'acciaio, il limite superiore può crescere anche di molto specialmente se si mantiene alto il rapporto d/R (K= 1.2 ÷ 2.8 e oltre).

E' immediato verificare che, in assenza di perdite (c=0; φ=0) si avrà K=1, e quindi P=P_i=Q.

D'altra parte, considerando il flessibile perfettamente aderente alla puleggia, è pure immediato trovare la velocità di sollevamento di Q in funzione della velocità di P.

$$v_Q = v_{H_1} = \omega R = v_{H_2} = v_P$$

Quindi è τ=1.

L'espressione del rendimento si può pure ricavare facilmente.

Se si considera che in assenza di perdite (η=1) è $L_u=(L_m)_i$ e quindi si può scrivere:

$$\eta = \frac{(L_m)_i}{L_m} = \frac{P_i}{P} = \frac{Q}{KQ} = \frac{1}{K}$$

b. Carrucola mobile.

In questo caso (fig. 20) uno dei due rami del flessibile è fissato a telaio, all'altro è applicata la forza P di sollevamento; il carico Q è applicato all'asse di rotazione della puleggia.

Per la (67) la relazione fra le tensioni sulla fune è data da:

$$P = K\Phi$$

mentre, per l'equilibrio alla traslazione, deve essere:

$$Q = P + \Phi$$

Sarà quindi:

$$P(K+1) = KQ$$

ossia:

$$P = \frac{K}{K+1}Q \qquad \textbf{(68)}$$

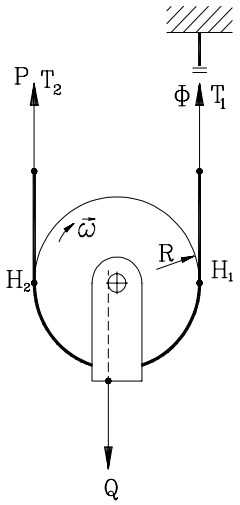


Figura 20

Inoltre, considerando che il punto H_1 è il centro di rotazione istantaneo della puleggia, è anche:

$$v_P = v_{H_2} = 2v_Q$$

e ciò vuol dire che il carico si solleverà a velocità dimezzata rispetto alla velocità con cui si trae la fune.
Il rendimento si ottiene considerando che, in assenza di perdite (K=1), dalla (68) si ha P_i=Q/2; quindi sarà:

$$\eta = \frac{(L_m)_i}{L_m} = \frac{P_i}{P} = \frac{Q/2}{KQ/(K+1)} = \frac{K+1}{2K}$$

c. Paranco esponenziale.

E' una combinazione di n carrucole mobili (fig. 21) disposte in modo che il ramo di fune di trazione di ciascuna costituisca il "carico" da sollevare da parte della precedente.

A questa disposizione può eventualmente aggiungersi, come in figura, una (n+1)-esima carrucola fissa che consenta di avere il tiro verso il basso.
Numerando le carrucole mobili dal basso verso l'alto, in base alla (68) si ha:

$$T_n = \frac{K}{K+1} T_{n-1}$$

Tenendo conto che T_0=Q, si avrà quindi per sostituzione:

$$T_n = \left(\frac{K}{K+1}\right)^n Q$$

Per la presenza della carrucola fissa dovrà ancora essere (67):

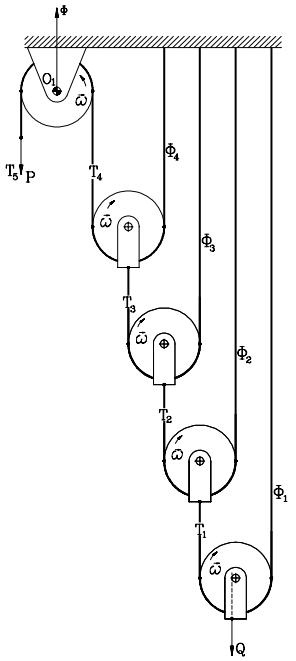


Figura 21

$$P = KT_n = K\left(\frac{K}{K+1}\right)^n Q = \frac{K^{(n+1)}}{(K+1)^n} Q \qquad \textbf{(69)}$$

Analogamente, per quanto riguarda le velocità dei singoli rami, dovrà essere:

$$v_n = 2v_{n-1}$$

e quindi, ancora per sostituzione, e tenendo conto che $v_0=v_Q$ e che $v_P=v_n$, si ottiene:

$$v_P = 2^n v_Q$$

Considerando che, per K=1, è $P_i=Q/2^n$, si può pure scrivere il rendimento che risulta:

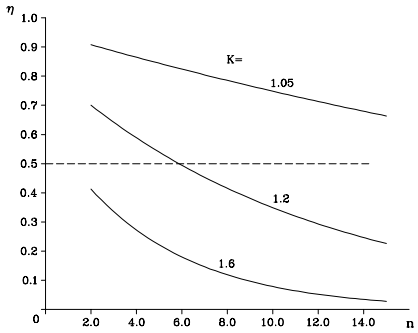


Figura 22

$$\eta = \frac{P_i}{P} = \frac{Q}{2^n}\frac{(K+1)^n}{K^{(n+1)}}\frac{1}{Q} = \frac{(K+1)^n}{2^n K^{(n+1)}} \qquad \textbf{(70)}$$

La struttura di questa espressione suggerisce che il numero delle carrucole mobili che si possono utilizzare in un dispositivo di questo tipo non può essere eccessivamente elevato: il rendimento decade rapidamente a valori molto bassi, come mostra la fig. 22, dove la (70) è diagrammata per tre diversi valori di K.

d. Paranchi

Un paranco è un dispositivo di sollevamento costituito da un bozzello superiore, fissato a telaio, di cui fanno parte una o più carrucole coassiali e folli sul loro asse, e di un bozzello inferiore costituito in modo analogo,a cui viene applicato il carico Q da sollevare. La fune, che avvolge ordinatamente tutte le carrucole, ha un capo che può essere fissato indifferentemente al bozzello superiore o al bozzello inferiore; l'altro capo è destinato alla trazione.

A seconda della disposizione delle carrucole, la trazione P sarà esercitata in verso concorde all'azione del carico oppure in verso discorde.

In fig. 23 è raffigurato un paranco con 6 carrucole, con trazione P concorde al carico Q ed il ramo finale del flessibile fissato al bozzello superiore.

Le tensioni nei diversi rami del flessibile che si avvolgono sulle *n* carrucole sono esprimibili

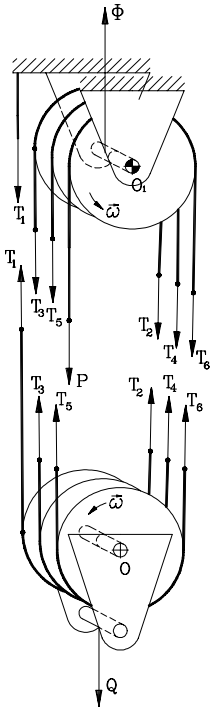


Figura 23

come:

$$T_{i+1} = KT_i$$

con $i=1\div n$ e con $T_{n+1}=P$.
Per cui è:

$$P = K^n T_1 \tag{71}$$

Inoltre per l'equilibrio alla traslazione del bozzello inferiore deve essere:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_1^n T_i = \left(K^{n-1} + \cdots + K + 1\right) T_1 = \\ &= \frac{K^n - 1}{K - 1} T_1 \end{aligned} \tag{72}$$

Sostituendo la (72) nella (71) si ricava allora:

$$P = \frac{K^n (K-1)}{K^n - 1} Q \tag{73}$$

Per ciò che riguarda le velocità, si può osservare che, in ogni singola carrucola del bozzello mobile, il ramo uscente ha una velocità:

$$v_{2i} = 2\omega R - v_{2i-1}$$

mentre la velocità del carico Q è analogamente:

$$v_Q = \omega R - v_{2i-1}$$

Eliminando ωR si ha quindi:

$$v_{2i} = v_{2i-1} + 2v_Q$$

D'altra parte in ogni singola carrucola del bozzello fisso le velocità dei due rami sono le stesse e quindi $v_{2i-1} = v_{2i-2}$.
Si può allora scrivere:

$$v_{2i} = v_{2i-2} + 2v_Q$$

con $i=1\div n/2$.
Tenendo presente che $v_1=0$ e che $v_{n+1}=v_P$, si ricava:

$$v_P = \frac{n}{2}\left(2v_Q\right) = nv_Q \tag{74}$$

Infine, per K=1, la (73) consente di ricavare il rapporto fra tensioni in condizioni ideali; si ottiene (72):

$$P_i = \frac{1}{n} Q$$

per cui il rendimento si scrive:

$$\eta = \frac{P_i}{P} = \frac{Q}{n} \frac{K^n - 1}{K^n (K-1)} \frac{1}{Q} = \frac{K^n - 1}{n K^n (K-1)} \qquad \textbf{(75)}$$

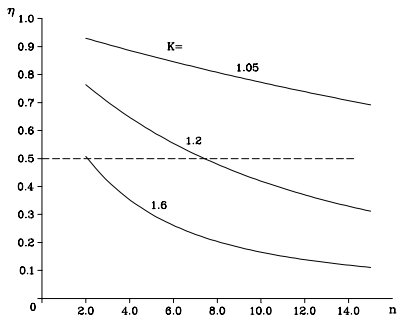


Figura 24

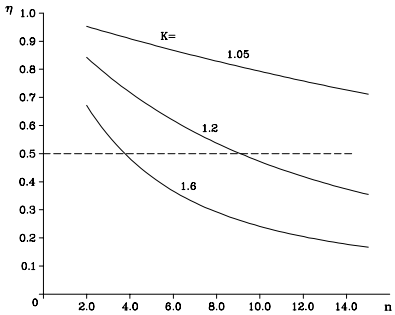


Figura 25

Con il medesimo procedimento si ottengono le relazioni per il caso in cui il paranco, con *n* carrucole, abbia il tiro, P, in verso discorde rispetto a quello del carico Q.
La (72) andrà scritta come:

$$Q = \sum_1^n T_i + P = \sum_1^n T_i + K^n T_1 = \left(K^n + \cdots + K + 1\right) T_1 = \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1} T_1$$

e si otterrà pertanto:

$$P = \frac{K^n (K-1)}{K^{n+1} - 1} Q \qquad \textbf{(73')}$$

e poi:

$$\eta = \frac{P_i}{P} = \frac{Q}{n+1} \frac{K^{n+1} - 1}{K^n (K-1)} \frac{1}{Q} = \frac{K^{n+1} - 1}{(n+1) K^n (K-1)} \qquad \textbf{(75')}$$

Nelle figure in alto sono riportati, per alcuni valori di K, i diagrammi che mostrano come diminuisce il rendimento del paranco al crescere del numero delle carrucole: per il caso in cui P e Q abbiano lo stesso verso (fig. 24) e per il caso in cui il verso di P è discorde dal verso di Q (fig. 25).

Valgono anche qui, quindi le medesime considerazioni fatte a proposito del paranco esponenziale.

e. Paranco Weston

E' costituito (fig. 26) da un bozzello superiore fisso che porta due carrucole di raggio diverso R_1 ed R_2 e solidali fra loro, e da un bozzello inferiore mobile, cui è applicato il carico Q, con un'unica carrucola di raggio R.

Dei rami terminali del flessibile, quello uscente dalla carrucola di raggio maggiore del bozzello superiore è destinato al tiro, P, per il sollevamento del carico, l'altro (ramo morto) è libero e soggetto esclusivamente al peso proprio, indicato con T_0 in figura, e quindi ad una tensione che può anche essere trascurata rispetto alle altre.

Il flessibile impiegato in questo tipo di paranco è generalmente una catena, ma potrebbe essere impiegata anche una fune se, al posto della carrucola di raggio R_1, si impiega un tamburo su cui la fune venga avvolta un numero di volte sufficiente(*) ad evitarne lo slittamento.

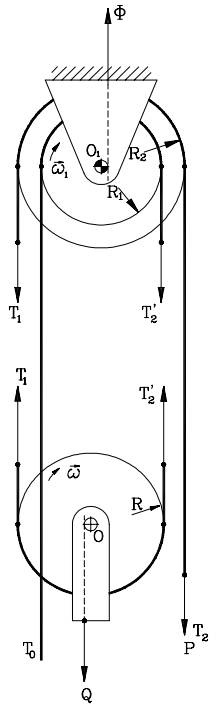


Figura 26

Per l'equilibrio del bozzello inferiore deve essere:

$$T_1 = KT'_2$$
$$T_1 + T'_2 = Q$$

da cui si ricavano:

$$T_1 = \frac{K}{K+1}Q \qquad T'_2 = \frac{1}{K+1}Q \qquad \textbf{(76)}$$

Consideriamo ora l'equilibrio alla rotazione del bozzello superiore.

Avendosi qui due carrucole di diverso raggio e solidali fra loro, non è possibile l'utilizzo diretto del coefficiente K per mettere in relazione le tensioni sui rami che si avvolgono con le tensioni sui rami che

(*) Per la prima delle (25), in cui, data la bassa velocità di rotazione, può essere trascurato il termine qv^2, si può scrivere $T_0 = T_2' e^{-f 2\pi n}$. Trascurando il $\ln T_0$ rispetto al $\ln T'_2$, si ricava quindi $n = \ln(T_2'/T_0)/(2\pi f)$.

si svolgono.
Dovremo invece scrivere, sia pure trascurando la T_0, l'equilibrio dei momenti applicati al bozzello.
Avremo allora:

$$P(R_2 - c) + T_2'(R_1 - c) - T_1(R_2 + c) - \Phi\frac{d}{2}\sin\varphi = 0$$

Ed essendo $\Phi = P + T_2' + T_1$:

$$PR_2\left(1 - \frac{c}{R_2} - \frac{d}{2R_2}\sin\varphi\right) + T_2' R_1\left(1 - \frac{c}{R_1} - \frac{d}{2R_1}\sin\varphi\right) + \\ - T_1 R_2\left(1 + \frac{c}{R_2} + \frac{d}{2R_2}\sin\varphi\right) = 0$$

Ora, poiché i raggi delle due carrucole non sono verosimilmente troppo diversi fra loro, si può pure ammettere di considerare uguali i coefficienti fra parentesi dei primi due termini, potendo così scrivere:

$$PR_2 + T_2' R_1 = T_1 R_2 K_2$$

ed anche:

$$PR_2 + T_2' R_1 = T_1 R_2 K$$

se, essendo $R_1<R<R_2$, consideriamo pure che sia $K_2 \cong K$.
In tal modo, sostituendovi le (76), si ottiene:

$$PR_2 + QR_1\frac{1}{K+1} = QR_2\frac{K^2}{K+1}$$

e quindi:

$$P = \frac{K^2 - \frac{R_1}{R_2}}{K+1}Q \qquad \textbf{(77)}$$

che dà, appunto, la relazione fra il carico da sollevare ed il tiro da esercitare allo scopo.
In assenza di perdite, e cioè per K=1, si avrebbe:

$$P_i = \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{2}Q \qquad \textbf{(78)}$$

e pertanto, per il rendimento vale:

$$\eta = \frac{P_i}{P} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{K+1}{K^2 - \dfrac{R_1}{R_2}}\frac{1}{Q} = \frac{K+1}{2}\frac{1 - \dfrac{R_1}{R_2}}{K^2 - \dfrac{R_1}{R_2}} \qquad \textbf{(79)}$$

Per determinare la velocità con cui si solleva il carico Q sarà sufficiente considerare che, in assenza di perdite, devono essere le medesime potenza motrice potenza utile, ossia deve essere: $P_i v_P = Q v_Q$.

Da qui:

$$\frac{v_Q}{v_P} = \frac{P_i}{Q}$$

e quindi per la (78):

$$v_Q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)v_P \qquad \textbf{(80)}$$

In figura 27 è mostrato come varia (77) il rapporto P/Q al variare del rapporto fra i raggi delle pulegge del bozzello superiore e per diversi valori di K; allo stesso modo in figura 28 è mostrato come varia il rendimento (79).

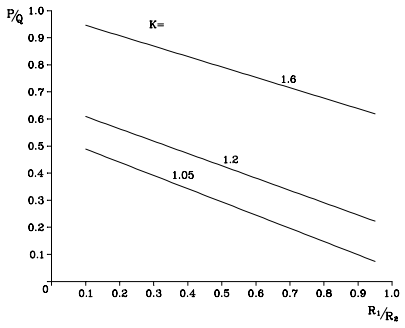


Figura 27

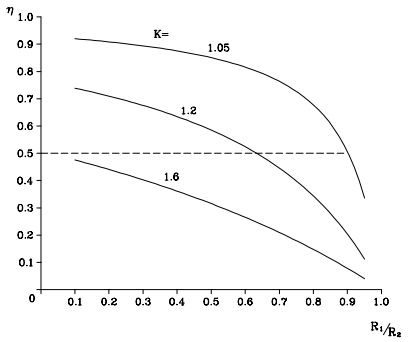


Figura 28

CAPITOLO XVI

GEOMETRIA DELLE MASSE

SOMMARIO

1 - Baricentro
2 - Calcolo del baricentro di un sistema continuo
3 - Momento d'inerzia
4 - Teorema di Huygens
5 - Ellissoide d'inerzia
6 - Momenti principali d'inerzia

I corpi che, nell'ambito della meccanica applicata, entrano a far parte di un sistema sono sempre dei corpi reali e perciò corpi pesanti; possiedono, cioè, oltre ad una caratteristica estensiva, che ne definisce la forma, anche una caratteristica intensiva legata alla *quantità di materia* che riempie quella forma.

Tale quantità di materia è la **massa** del corpo in questione; essa viene definita come $m = \rho V$ dove ρ è la densità (massa volumica) del materiale di cui il corpo è costituito e V il suo volume

In meccanica, quindi, un sistema sarà sempre costituito da un certo numero di masse, una nel caso più semplice.

§ 1.- Baricentro.

Si definisce baricentro di un corpo un punto di esso in cui è possibile supporre concentrata l'intera sua massa *m*; la conoscenza della sua posizione è di fondamentale importanza perché permette di semplificare i problemi dinamici consentendo, per taluni aspetti, di trattare un corpo esteso come se fosse un unico punto pesante avente appunto massa m.

Per trovare, in termini analitici, la posizione del baricentro si può immaginare il corpo, di massa totale m, suddiviso in masse elementari dm corrispondenti ciascuna ad un suo punto P; in ciascun punto P può pensarsi applicato un vettore di modulo dm, e tali vettori siano tutti paralleli ad un'unica direzione e concordi (si faccia riferimento, per semplicità, ad un corpo pesante). In tal modo la massa totale m sarà rappresentata dal risultante del sistema di vettori paralleli così definito, ed il baricentro G sarà il punto di applicazione del risultante.

E' valido in tali condizioni il teorema di Varignon, e quindi, fissato un arbitrario punto O, il risultante dei momenti dei singoli vettori di intensità dm deve risultare eguale al momento del risultante applicato in G.

Deve essere cioè:

$$(G-O)=\frac{\int_V dm(P-O)}{\int_V dm}=\frac{\int_V dm(P-O)}{m} \qquad \textbf{(1)}$$

Se il punto O coincide con l'origine di un riferimento cartesiano, le coordinate di G saranno allora date da:

$$x_G=\frac{\int_V x dm}{m}; \qquad y_G=\frac{\int_V y dm}{m}; \qquad z_G=\frac{\int_V z dm}{m}; \qquad \textbf{(2)}$$

Le proprietà di cui gode il baricentro sono, per quanto sopra, le medesime di cui gode un sistema di vettori paralleli.

In particolare:

- *la posizione di G è sempre interna alla superficie che delimita l'estensione del corpo*: tutti i vettori elementari sono, infatti, concordi e quindi il punto di applicazione del loro risultante non può essere se non interno ai punti di applicazione dei singoli vettori dm;
- *la posizione di G dipende solamente dalla distribuzione della massa* e non dalla "qualità" del materiale da cui il corpo è costituito: G non cambia se tutti i dm vengono moltiplicati per una costante;
- *se la forma del corpo è* tale da poterla assimilare ad *una superficie* (trascurandone lo spessore) *il punto G starà su quella superficie*;
- *se* può essere assimilata ad *una linea G starà su quella linea*;
- *se la forma* del corpo *ammette un piano di simmetria oppure un asse di simmetria, il punto G si troverà su quel piano oppure su quell'asse di simmetria*.

Quanto detto si può applicare, in maniera del tutto analoga, anche a sistemi di più corpi pervenendo, quando occorra, alla determina-

zione del corrispondente baricentro. E' valida cioè per il baricentro la proprietà distributiva. Si comprende, infatti, come il medesimo criterio che ha portato alla determinazione del punto G nel caso di un unica massa è applicabile tal quale a sistemi di due o più masse m_i; basterà scrivere la (1) come:

$$(G-O)=\frac{\sum_i m_i(G_i-O)}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i(G_i-O)}{m} \qquad \textbf{(3)}$$

dove i punti G_i sono i baricentri delle singole masse m_i.

§ 2.- Calcolo del baricentro di un sistema continuo.

Se indichiamo con ρ la massa volumica (massa per unità di volume) del corpo in esame e con V il suo volume, la sua massa m sarà data da $m=\rho V$.
In forma elementare, se il valore di ρ è sempre il medesimo in ogni punto del corpo, sarà $dm=\rho dV$. Quando quest'ultima espressione è valida (corpi omogenei) è possibile sostituirla nella (1) ottenendo:

$$(G-O)=\frac{\rho\int_V dV(P-O)}{\rho\int_V dV}=\frac{\int_V dV(P-O)}{V} \qquad \textbf{(1')}$$

le coordinate di G, se O coincide con l'origine del riferimento cartesiano, saranno:

$$x_G=\frac{\int_V xdV}{V};\qquad y_G=\frac{\int_V ydV}{V};\qquad z_G=\frac{\int_V zdV}{V}; \qquad \textbf{(2')}$$

Analogamente, se la forma del corpo è assimilabile ad una superficie si avrà:

$$(G-O)=\frac{\rho\int_S dS(P-O)}{\rho\int_V dS}=\frac{\int_S dS(P-O)}{S} \qquad \textbf{(1")}$$

e corrispondentemente:

$$x_G = \frac{\int_S x dS}{S}; \qquad y_G = \frac{\int_S y dS}{S}; \qquad z_G = \frac{\int_S z dS}{S}; \qquad \textbf{(2")}$$

Se infine è assimilabile ad una linea:

$$(G-O) = \frac{\rho \int_l ds(P-O)}{\rho \int_V ds} = \frac{\int_l ds(P-O)}{l} \qquad \textbf{(1''')}$$

con le corrispondenti coordinate:

$$x_G = \frac{\int_l x ds}{l}; \qquad y_G = \frac{\int_l y ds}{l}; \qquad z_G = \frac{\int_l z ds}{l}; \qquad \textbf{(2''')}$$

Si vede, pertanto, che per i corpi omogenei, il calcolo della posizione del baricentro si riduce, secondo i casi, al calcolo di un integrale di volume, di superficie, o di linea.

Da quanto esposto in questo e nel precedente paragrafo è facile dedurre che quando il corpo ha una forma complessa, non facilmente assimilabile a geometrie semplici, e tale, quindi, da rendere complicato il calcolo dei relativi integrali, la via più agevole per il calcolo del baricentro potrà essere quella di scomporlo preventivamente in parti di forma geometrica semplice di cui calcolare separatamente i baricentri; il punto G dell'intero corpo si otterrà come baricentro delle masse parziali concentrate nei punti prima trovati.

Similmente, se il corpo presenta una o più parti "vuote", è anche lecito operare il calcolo sull'intero corpo come se fosse tutto "pieno" e poi considerare i vuoti come se fossero masse "negative".

Di contro, per le forme semplici, non sarà nemmeno necessario il calcolo integrale ma si potrà giungere al medesimo risultato attraverso considerazioni geometriche.

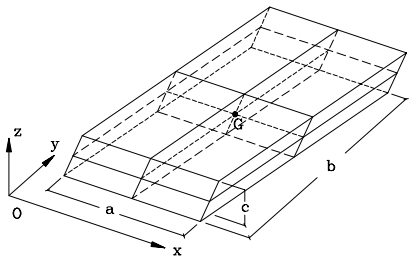


Figura 1

Per una **piastra rettangolare**, ad esempio, o più in generale per un **prisma** (fig.1), le cui altezze siano a, b, c, si può subito osservare che i tre piani passanti per i punti medi dei lati opposti sono tre piani di simmetria e pertanto il baricentro corrisponderà al punto di intersezione di questi.

In un riferimento cartesiano con origine in un vertice, le coordinate di G saranno quindi:

$$x_G = \frac{a}{2}; \qquad y_G = \frac{b}{2}; \qquad x_G = \frac{c}{2}; \tag{3}$$

Per un **prisma a basi triangolari** (fig.2) il piano σ parallelo alle basi e passante per il punto medio dell'altezza è certamente un piano di simmetria del solido e lo si può scegliere come piano coordinato xy: questo taglia il prisma in un triangolo i cui vertici siano i punti P_1, P_2, P_3. Il baricentro del prisma starà allora sul baricentro di questo triangolo.

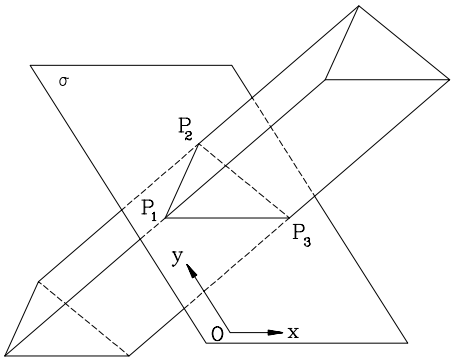


Figura 2

Il baricentro del triangolo si trova (fig.3) sull'intersezione delle tre mediane in quanto ciascuna è retta diametrale coniugata alla direzione del lato ad essa relativa.

Tale punto di intersezione dista da ciascun lato di un terzo della rispettiva altezza e quindi le coordinate del baricentro saranno:

$$x_G = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$
$$y_G = \frac{1}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right) \tag{4}$$

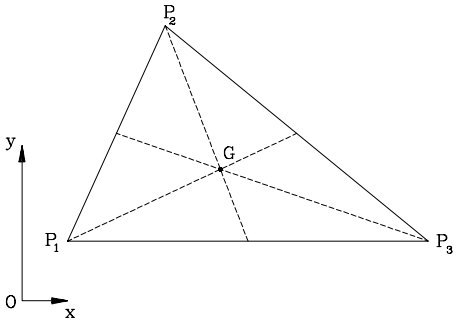


Figura 3

Il **baricentro di un quadrangolo** qualunque (fig.4) può essere determinato come baricentro di due semimasse concentrate nei baricentri dei due triangoli in cui esso è diviso da una diagonale. Sia il quadrangolo ABCD diviso dalla diagonale BD nei due triangoli ABD e BCD. Le mediane del triangolo ABD si intersecano in G' e questo sarà il baricentro di detto triangolo; le mediane di BCD si intersecano in G" e questo sarà il baricentro del secondo triangolo.

Possiamo quindi pensare a due masse, proporzionali alle rispettive aree di ABD e BCD, concentrate in G' e in G" e concludere che il baricentro del quadrangolo deve stare proprio sulla congiungente G'G".

A conclusioni del tutto analoghe si perviene considerando l'altra diagonale, AC, ed i triangoli ACD e ABC. Troveremo i baricentri di questi ultimi in G''' e in G''''. Il baricentro del quadrangolo deve quindi trovarsi anche sulla congiungente G'''G''''.
Ne segue che il punto di intersezione dei due segmenti G'G" e G'''G'''' è proprio il baricentro della figura.

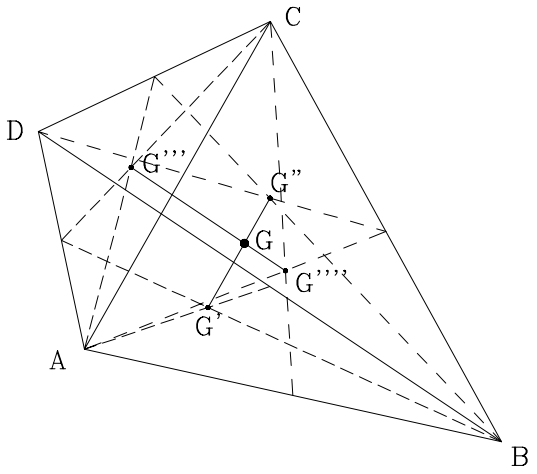


Figura 4

Il **baricentro di un trapezio** può essere trovato in modo analogo a quello visto per il quadrangolo. Risulta tuttavia di più semplice esecuzione la seguente (fig.5).
Si consideri il trapezio ABCD la cui base maggiore sia AB=a e la base minore CD=b e la cui altezza sia h. Si traccia la congiungente MN dal punto medio M di AB al punto medio N di DC.
Tale retta è retta coniugata alla direzione delle basi e quindi il baricentro G del trapezio deve stare su MN. Si porta sul prolungamento della base minore (per esempio da C) il segmento CS=a'=a, e sul prolungamento della base maggiore (da parte opposta) il segmento AR=b'=b. La retta RS taglia in G il segmento MN.

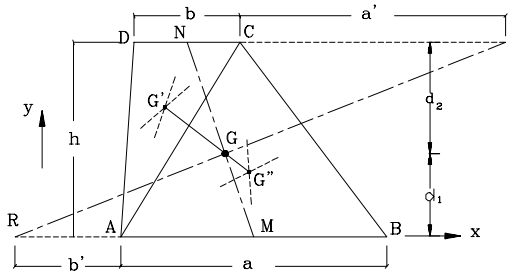


Figura 5

Per dimostrarlo, consideriamo i baricentri G' e G" dei due triangoli ADC e ABC ottenuti tagliando il trapezio con la diagonale AC. In G' ed in G" possiamo pensare concentrate le due masse corrispondenti alle aree rispettivamente di ADC e di ABC e di valore:

$$m' \cap \frac{1}{2} bh \quad m'' \cap \frac{1}{2} ah \tag{5}$$

mentre la massa totale del trapezio sarà data da:

$$m \cap \frac{1}{2}(a+b)h \tag{6}$$

Per la proprietà distributiva del baricentro sarà allora:

$$G - O = \frac{\frac{1}{2}bh(G'-O) + \frac{1}{2}ah(G''-O)}{\frac{1}{2}(a+b)h} = \frac{b(G'-O) + a\left(g''-O\right)}{a+b} \tag{7}$$

essendo O un punto qualunque del piano che possiamo pensare per comodità un punto qualsiasi della base maggiore.
Allora, se indichiamo con d_1 la distanza dalla base maggiore di G, e indichiamo con d'_1 e d''_1 quelle dei punti G' G" che sono date rispettivamente da:

$$d'_1 = \frac{2}{3}h \quad d''_1 = \frac{1}{3}h$$

la (7) può essere scritta come:

$$d_1 = y_G = \frac{\frac{2}{3}bh + \frac{1}{3}ah}{a+b} = \frac{1}{3}h\frac{2b+a}{a+b} \tag{8}$$

Analogamente se indichiamo con d_2 la distanza di G dalla base minore, e con d'_2 e d''_2 quelle dei punti G' G", date rispettivamente da:

$$d'_2 = \frac{1}{3}h \quad d''_2 = \frac{2}{3}h$$

la (7) può essere scritta come:

$$d_2 = h - y_G = \frac{\frac{1}{3}bh + \frac{2}{3}ah}{a+b} = \frac{1}{3}h\frac{b+2a}{a+b} \tag{9}$$

Facendo il rapporto fra la (8) e la (9) si ottiene:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2b+a}{b+2a} = \frac{b+\frac{1}{2}a}{a+\frac{1}{2}b} \tag{10}$$

il che giustifica la costruzione indicata.

Infatti, i due triangoli GRM e GNS sono simili, ed il secondo membro della (10) esprime il rapporto fra le basi, MR=b'+AM ed NS=a'+NC, dei due triangoli e le corrispondenti altezze.

In un riferimento cartesiano con origine in A la (8) è proprio l'espressione della y_G.

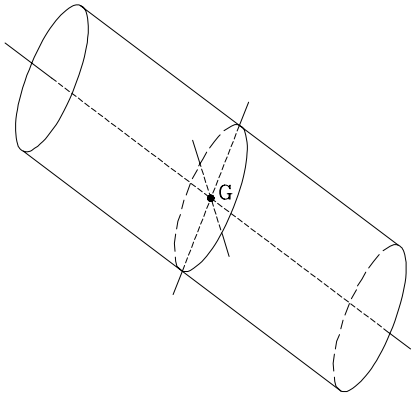


Figura 6

Il **baricentro di un cilindro** a basi circolari (fig.6) si trova nel punto medio dell'asse che congiunge i centri delle basi. Infatti, tale asse è asse di simmetria per tutte le circonferenze definite dai piani paralleli alle basi; tra questi piani, il piano passante per il punto medio di tale asse è ancora un piano di simmetria del cilindro.

§ 3.- Momento d'inerzia.

Si definisce **momento d'inerzia rispetto ad una generica retta r** di una massa m concentrata in un punto P, il prodotto:

$$J = md^2 \tag{11}$$

dove d è la distanza del punto P dalla retta r.
La quantità così definita è evidentemente una quantità scalare, e quindi se il sistema è costituito da n masse concentrate, la (51) può essere correttamente scritta come:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i d_1^2 \tag{12}$$

Si può definire allora anche il **raggio d'inerzia** δ :

$$\delta^2 = \frac{J}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i d_1^2}{m} \tag{13}$$

che rappresenta la distanza dalla retta r del punto in cui dovrebbe essere concentrata tutta la massa m del sistema per dar luogo allo stesso momento d'inerzia J.

Per un sistema continuo ed omogeneo la (12) diventa del tipo:

$$J = \int r^2 dm \qquad \textbf{(12')}$$

Le dimensioni di un momento d'inerzia, come si deduce dalla stessa definizione, sono quelle di [Kgm^2].
A seconda che la forma della massa, supposta omogenea, sia tale per cui siano trascurabili due, una o nessuna dimensione, il momento d'inerzia si calcolerà con una delle formule:

$$J = \rho \int_l r^2 ds; \qquad J = \rho \int_S r^2 dS; \qquad J = \rho \int_V r^2 dV; \qquad \textbf{(14)}$$

e si riduce quindi, a seconda dei casi, ad un integrale di linea, di superficie o di volume.
Nelle (14) ρ è la densità del materiale di cui la massa è costituita ed r sta a indicare la distanza di ogni punto del sistema dalla retta prescelta.

In modo analogo si definisce il **momento d'inerzia polare** ovvero momento d'inerzia del sistema rispetto ad un punto; in tal caso le distanze che intervengono sono quelle dei singoli punti del sistema dal punto scelto come polo.

Nella meccanica dei continui ricorre talvolta la necessità di utilizzare il **momento d'inerzia di figura**, ossia il momento d'inerzia rispetto ad una retta di una superficie piana (priva di massa).
Esso è quindi definito da:

$$I = \int_S r^2 dS \qquad \textbf{(15)}$$

ed ha, a differenza del precedente momento d'inerzia di massa, le dimensioni di [m^4].

§ 4.- Teorema di Huygens.

Una volta definito il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad una retta r, è di particolare interesse rilevare come esso varia al variare della scelta di detta retta.

Cominciamo a considerare il caso in cui al posto della retta r si voglia considerare **una retta r' parallela alla r** ed a distanza d da questa.

Per semplicità di calcolo scegliamo (fig.7) la retta r passante per il baricentro G del sistema; gli assi cartesiani siano tali per cui z coincida con la retta r ed il piano zx contenga la retta r'.
Con tale scelta degli assi, la distanza del generico punto P del sistema dalla retta r sarà data da:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ed il momento d'inerzia rispetto alla retta r, quindi, da:

$$J_r = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \qquad \textbf{(16)}$$

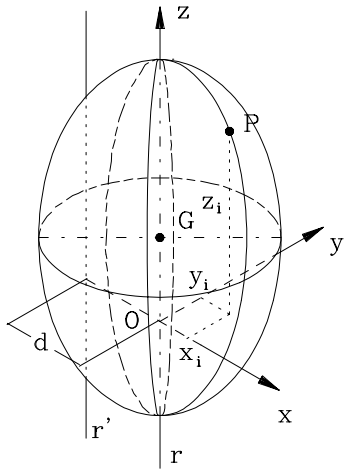


Figura 7

D'altra parte, il momento d'inerzia rispetto alla retta r', si scriverà:

$$J_{r'} = \rho \int_V [(x-d)^2 + y^2] dV \qquad \textbf{(17)}$$

Se ora sviluppiamo la (17) otteniamo:

$$\begin{aligned} J_{r'} &= \rho \int_V (x^2 - 2dx + d^2 + y^2) dV = \\ &= \rho \int_V (x^2 + y^2) dV + d^2 \rho \int_V dV + 2\rho d \int_V x dV \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

In questa l'ultimo termine è certamente nullo per avere scelto il baricentro proprio sull'asse z (cfr. 2'), mentre il primo è proprio la (16).
Si ha allora che la (18) equivale a:

$$J_{r'} = J_r + m d^2 \qquad \textbf{(19)}$$

che rappresenta il **teorema di Huygens** per il quale *il momento di inerzia di un sistema rispetto ad una retta r' è uguale al momento di inerzia rispetto ad una sua parallela r baricentrica aumentato del prodotto della massa totale del sistema per il quadrato della distanza fra le due rette*.

§ 5.- Ellissoide d'inerzia.

Consideriamo adesso le variazioni che subisce il momento di inerzia di un sistema rispetto ad una retta r quando questa si fa variare in una stella di centro O.

Scelto lo stesso punto O come origine del riferimento cartesiano (fig.8), la generica retta sarà individuata dai suoi coseni direttori α, β, γ; al generico punto del sistema, P_i, corrisponderà sulla retta r il punto Q_i, piede della perpendicolare ad essa condotta da P_i, che definisce quindi la distanza del generico punto P_i da r che indichiamo con r_i.

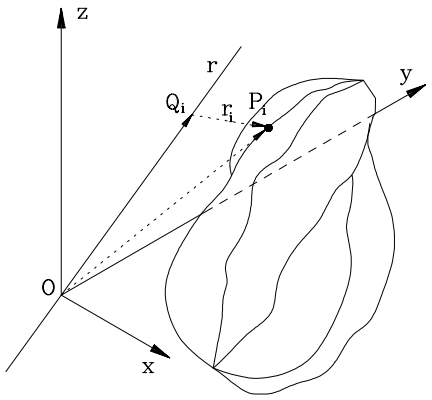


Figura 8

L'espressione analitica di questa distanza sarà data da:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= (P_i - O)^2 - (Q_i - O)^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(20)}$$

Sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\alpha^2 x_i^2 + \beta^2 y_i^2 + \gamma^2 z_i^2) + \\ &- (2\alpha\beta\, x_i y_i + 2\beta\gamma\, y_i z_i + 2\alpha\gamma\, x_i z_i) \end{aligned} \qquad \textbf{(20')}$$

la quale, riordinata, e tenendo conto che è $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, si può mettere nella forma:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= (1-\alpha^2)x_i^2 + (1-\beta^2)y_i^2 + (1-\gamma^2)z_i^2 + \\ &\quad - 2\alpha\beta\, x_i y_i - 2\alpha\gamma\, x_i z_i - 2\beta\gamma\, y_i z_i = \\ &= (\beta^2+\gamma^2)x_i^2 + (\alpha^2+\gamma^2)y_i^2 + (\alpha^2+\beta^2)z_i^2 + \\ &\quad - 2\alpha\beta\, x_i y_i - 2\alpha\gamma\, x_i z_i - 2\beta\gamma\, y_i z_i = \\ &= (y_i^2+z_i^2)\alpha^2 + (x_i^2+z_i^2)\beta^2 + (x_i^2+y_i^2)\gamma^2 + \\ &\quad - 2y_i z_i \beta\gamma - 2x_i z_i \alpha\gamma - 2x_i y_i \alpha\beta \end{aligned} \qquad \textbf{(20")}$$

Sostituendo questa espressione nella (12') si ottiene in definitiva:

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta \qquad \textbf{(21)}$$

dove sono stati introdotti i coefficienti:

$$A = \int \left(y_i^2 + z_i^2\right) dm \quad B = \int \left(x_i^2 + z_i^2\right) dm \quad C = \int \left(x_i^2 + y_i^2\right) dm \quad \textbf{(22)}$$

che sono evidentemente i **momenti di inerzia del sistema rispetto agli assi x, y, z,** ed i coefficienti:

$$A' = \int y_i z_i dm \quad A' = \int x_i z_i dm \quad A' = \int x_i y_i dm \quad \textbf{(23)}$$

che prendono il nome di **prodotti di inerzia o momenti di deviazione** e che sono i momenti centrifughi dello stesso rispetto ai piani coordinati della stessa terna Oxyz: rispettivamente i piani xz e xy, yz e xy, yz e xz.
Sia le (22) che le (23), come si vede, dipendono solamente dalla distribuzione della massa del sistema e non dall'orientamento della retta r. La (21) quindi dipende, per dato sistema, solamente dai parametri di direzione della retta r prescelta e si presta ad una comoda interpretazione geometrica.

Immaginiamo di calcolare il valore di J di un dato sistema corrispondente ad ogni possibile orientazione della retta r, ossia per ogni possibile terna α, β, γ, e di individuare su ciascuna di essa, e nei due versi, il punto L che abbia da O una distanza pari a:

$$(L - O)^2 = \frac{1}{J} \quad \textbf{(24)}$$

Le coordinate del punto L saranno date da:

$$x = \overline{OL}\,\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{J}} \quad y = \overline{OL}\,\beta = \frac{\beta}{\sqrt{J}} \quad z = \overline{OL}\,\gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{J}} \quad \textbf{(25)}$$

e sarà quindi:

$$\alpha = x\sqrt{J} \quad \beta = y\sqrt{J} \quad \gamma = z\sqrt{J} \quad \textbf{(26)}$$

Sostituendo nella (21) i valori di α, β, γ qui ricavati, si ottiene:

$$J = AJx^2 + BJy^2 + CJz^2 - 2A'Jzy - 2B'Jxz - 2C'Jxy$$

ossia:

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2A'yz - 2B'xz - 2C'xy = 1 \quad \textbf{(27)}$$

che è il luogo dei punti L che soddisfano la (24).
Questa, essendo la distanza OL un valore finito, rappresenta un ellissoide, che prende il nome di **ellissoide d'inerzia** del sistema relativo al punto O.
Trattandosi della equazione di un ellissoide, la (27) può trasformarsi in una espressione più semplice scegliendo come terna di assi ortogonali proprio gli assi dell'ellissoide x', y', z': si ottiene in questo modo, con

l'annullarsi dei momenti di deviazione, la forma:

$$A_0 x'^2 + B_0 y'^2 + C_0 z'^2 = 1 \qquad \textbf{(28)}$$

Gli assi dell'ellissoide, ossia gli assi di tale nuovo riferimento, si chiamano **assi principali d'inerzia** del sistema, ed i coefficienti A_0, B_0, C_0 prendono il nome di **momenti principali d'inerzia** del sistema relativi al punto O.

Se poi come punto O si sceglie il baricentro G del sistema si parlerà di **ellissoide centrale d'inerzia** e di **assi centrali d'inerzia** del sistema.

Occorre tuttavia aver ben chiaro che una terna di assi può essere baricentrica ma non essere terna principale d'inerzia; oppure può essere terna principale d'inerzia ma non essere terna centrale d'inerzia.

Per le applicazioni pratiche è bene tener presente le seguenti proprietà:

- se il sistema ammette *un piano di simmetria ogni retta normale ad esso è uno degli assi principali d'inerzia*.
- se il sistema ammette *due piani di simmetria ortogonali la retta loro intersezione è un asse principale d'inerzia*; e *due normali, uscenti da un punto di tale intersezione e contenute dai due piani di simmetria sono pure assi principali d'inerzia*.
- *gli assi principali d'inerzia relativi ad un punto O che appartenga ad un asse centrale sono paralleli agli assi centrali d'inerzia*.

Se il sistema è tale per cui due dei coefficienti della (28) risultano uguali, $A_0=B_0$, $A_0=C_0$, oppure $B_0=C_0$, l'ellissoide è un ellissoide rotondo ed il sistema prende il nome particolare di **sistema giroscopico**.

§ 5.- Momenti principali d'inerzia.

Come si deduce dalle (14), il calcolo dei momenti d'inerzia, per i corpi omogenei, analogamente a quanto già visto per il caso del calcolo dei baricentri, si riduce essenzialmente, a seconda dei casi, alla risoluzione di integrali di linea, di superficie o di volume.

Quando il corpo ha una forma geometrica semplice il calcolo non presenta particolari difficoltà, in particolar modo se la sua forma è tale da presentare piani o assi di simmetria. Per tale motivo sarà anche conveniente riferirsi a rette passanti per il baricentro del corpo ed anche ad assi principali d'inerzia: la combinazione del teorema di Huygens e della (21) consente poi di passare al valore del momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi.

Per un **parallelepipedo retto**, si è già visto che il baricentro G coincide con il punto intersezione dei tre piani mediani e tali piani sono

piani di simmetria. Gli assi centrali d'inerzia, allora, saranno proprio le rette intersezione di tali piani presi a due a due.

Assumendo tali assi come assi coordinati con origine in G, e chiamando a, b, e c la lunghezza degli spigoli, paralleli rispettivamente a x, y, z, le equazioni delle sei facce assumono la forma:

$$x = \pm\frac{a}{2} \quad y = \pm\frac{b}{2} \quad z = \pm\frac{c}{2} \tag{29}$$

mentre l'elemento di volume corrispondente all'intorno del generico punto P sarà:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dxdydz \quad \therefore \quad m = \rho\, abc$$

Le (22) si scriveranno allora:

$$A = \rho\int_V (y^2 + z^2)dm = \rho\int_V (y^2 + z^2)dxdydz$$
$$B = \rho\int_V (x^2 + z^2)dm = \rho\int_V (x^2 + z^2)dxdydz$$
$$C = \rho\int_V (x^2 + y^2)dm = \rho\int_V (x^2 + y^2)dxdydz$$

che si risolvono in:

$$A = \rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}(y^2 + z^2)dz = m\frac{b^2 + c^2}{12}$$
$$B = \rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}(x^2 + z^2)dz = m\frac{a^2 + c^2}{12} \tag{30}$$
$$C = \rho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}(x^2 + y^2)dz = m\frac{a^2 + b^2}{12}$$

Per un **cilindro circolare retto**, di raggio R ed altezza h, il baricentro G, come visto, coincide con il punto medio della congiungente i centri delle basi; tale congiungente è asse di simmetria come pure sono assi di simmetria due qualsiasi assi per G perpendicolari fra loro nel piano ortogonale a detta congiungente. In virtù di tali condizioni, fissata una terna ortogonale con origine in G e asse z coincidente con l'asse del cilindro, possiamo subito concludere, che i momenti centrali d'inerzia rispetto agli assi x ed y saranno uguali.

Il calcolo, in tal caso, è più agevole utilizzando un sistema di coordinate cilindriche ρ, θ, z, legate a quelle cartesiane dalle relazioni:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

In tal modo il punto generico P risulta individuato dal piano, perpendicolare all'asse, parallelo all'asse z, che lo contiene, e, su questo, dalla sua distanza r dall'asse e dalla anomalia θ di detto raggio r.
Utilizzando tali coordinate si avrà quindi per l'elemento di massa nell'intorno di P:

$$dm = \rho dV = \rho r d\vartheta dr dz \quad \therefore \quad m = \rho \pi r^2 h$$

Le (22) ci daranno in questo caso:

$$A = B = \rho \int (y^2 + z^2) dm = \rho \int_V (r^2 sin^2 \vartheta + z^2) r\, dr\, d\vartheta\, dz$$
$$C = \rho \int (x^2 + y^2) dm = \rho \int_V (r^2 sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta) r\, dr\, d\vartheta\, dz$$

e cioè:

$$\begin{aligned} A = B &= \rho \int_0^R dr \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} (r^2 sin^2 \vartheta + z^2) r\, d\vartheta \\ C &= \rho \int_0^R dr \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} r^2 r\, d\vartheta \end{aligned} \qquad \textbf{(31)}$$

Si ottiene quindi, in definitiva:

$$A = B = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) \quad C = \frac{m}{2} R^2 \qquad \textbf{(32)}$$

Da questo risultato si vede che per un cilindro omogeneo il momento d'inerzia rispetto al suo asse varia linearmente con la sua altezza (m ∩ h) mentre il momento centrale d'inerzia rispetto ad un diametro varia con il cubo di h.

Si deduce anche che per un **disco sottile**, in cui lo spessore sia trascurabile (h=0), il momento d'inerzia diametrale è la metà del momento d'inerzia rispetto all'asse per il suo centro e perpendicolare al suo piano.

CAPITOLO XVII

LE AZIONI D'INERZIA

SOMMARIO

1 - Principio di d'Alembert.
2 - Risultante delle forze d'inerzia.
3 - Momento risultante delle forze d'inerzia.
4 - Azioni d'inerzia nel manovellismo di spinta.
5 - Equilibramento del monocilindro.
6 - Equilibramento dei pluricilindri.
7 - Applicazioni.

§ 1. - Principio di d'Alembert.

Dal postulato di Galileo (XI - §3) discende che un punto materiale, sollecitato da più forze, è in equilibrio solo se la loro risultante è uguale a zero. Di contro, allora, se le forze che agiscono su un punto materiale hanno risultante nulla esse formano un sistema equilibrato.

Supponendo ora un sistema materiale in movimento di cui facciano parte i punti P_i, il prodotto, cambiato di segno, della massa m_i del punto P_i per la sua accelerazione $\vec{a}_i$, ossia:

$$\vec{F}_{i'} = - m_i \vec{a}_i \qquad \textbf{(1)}$$

prende il nome di *forza d'inerzia* del punto P_i, e permette di scrivere la condizione d'equilibrio del punto P_i, a seconda del tipo di forze che si vogliono mettere in evidenza, sotto la forma:

$$\vec{F}_i^{(a)} + \vec{\Phi}_i + \vec{F}_{i'} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

oppure sotto la forma:

$$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_{i'} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Dalla (2) e dalla (3) derivano i due enunciati, equivalenti, del **principio di d'Alembert,** che afferma che *durante il moto di un sistema materiale si fanno equilibrio, istante per istante, la forza attiva, la forza reattiva e la forza d'inerzia che agiscono su ciascun punto del sistema*, oppure anche che, *durante il moto di un sistema materiale si fanno equilibrio, istante per istante, la forza esterna, la forza interna e la forza d'inerzia che agiscono su ciascun punto del sistema*,

L'importanza di tale principio sta nel fatto che un'impostazione dinamica viene automaticamente ridotta ad un'impostazione statica, a patto di avere preventivamente calcolato le forze d'inerzia.

§ 2.- Risultante delle forze d'inerzia.

Il calcolo del risultante delle forze d'inerzia, per un sistema di punti materiali, valendo per ciascuno di essi la (1), si riduce al calcolo della somma:

$$\vec{F}' = -\sum_i m_i \vec{a}_i \qquad \textbf{(4)}$$

Alla (4) è possibile dare anche una forma diversa, forma che consente una semplificazione del calcolo.

Possiamo intanto definire per ogni punto materiale del sistema, il prodotto della sua massa per la sua velocità, come *quantità di moto*:

$$\vec{Q}_i = m_i \vec{v}_i \qquad \textbf{(5)}$$

Per l'intero sistema, la *quantità di moto risultante* sarà:

$$\vec{Q} = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \textbf{(6)}$$

Sappiamo inoltre che, in virtù della definizione di baricentro, deve pure essere:

$$\sum_i m_i (P_i - O) = m(G - O) \qquad \textbf{(7)}$$

avendo indicato con G il baricentro del sistema, con O un qualsiasi punto

arbitrariamente scelto come polo per la riduzione delle forze, e con m la massa dell'intero sistema.
Se deriviamo la (7) rispetto al tempo, nell'ipotesi che la massa del sistema non muti, (m=cost), otteniamo:

$$\sum_i m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_O) = m(\vec{v}_G - \vec{v}_O) \qquad \textbf{(8)}$$

ossia:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_G = \vec{Q} \qquad \textbf{(9)}$$

E possiamo intanto osservare che la quantità di moto $\vec{Q}$ del sistema non dipende dall'essere il prescelto polo O, fisso o mobile.

Riprendendo ora l'espressione (4) del risultante delle forze d'inerzia, vediamo che è anche:

$$\vec{F}' = -\sum_i m_i \vec{a}_i = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \qquad \textbf{(10)}$$

e quindi, per la (9):

$$\vec{F}' = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt}(m\vec{v}_G) \qquad \textbf{(11)}$$

Se ne conclude che il risultante delle forze d'inerzia è esprimibile come la derivata rispetto al tempo della quantità di moto del sistema, cambiata di segno.
Se poi il sistema è tale per cui è lecito supporre che sia m=cost, potremo ancora scrivere al posto della (11):

$$\vec{F}' = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = -m\vec{a}_G \qquad \textbf{(12)}$$

concludendo che, in tal caso, il calcolo della accelerazione del baricentro del sistema materiale è sufficiente per trovare il risultante delle forze d'inerzia.

§ 3. - Momento risultante delle forze d'inerzia.

Come in tutte le distribuzioni vettoriali anche la distribuzione delle forze d'inerzia di un sistema materiale può, in generale, dar luogo oltre che

ad un risultante anche ad un momento risultante. Il momento risultante delle forze d'inerzia sarà allora pari alla somma dei momenti di tutte le $\vec{F}'_i$ rispetto ad un generico polo O.
Sarà cioè:

$$\vec{M}'_O = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}'_i = -\sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i \qquad \textbf{(13)}$$

Definiamo ancora, per ogni punto del sistema materiale il *momento della quantità di moto*, ossia:
$(\vec{K}_O)_i = (P_i - O) \wedge \vec{Q}_i = (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$
e quindi, per l'intero sistema, il *momento risultante delle quantità di moto*:

$$\vec{K}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{Q}_i = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \qquad \textbf{(14)}$$

Derivando la (14) rispetto al tempo, nella ipotesi che sia m=cost, otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_o}{\mathrm{dt}} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i$$

ossia:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{K}_o}{\mathrm{dt}} &= -\vec{v}_o \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \\ &= \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i - \vec{v}_o \wedge \vec{Q} \end{aligned} \qquad \textbf{(15)}$$

Confrontando la (15) con la (13), si trova allora:

$$\vec{M}'_O = -\frac{\mathrm{d}\vec{K}_O}{\mathrm{dt}} - \vec{v}_O \wedge \vec{Q} \qquad \textbf{(16)}$$

che è l'espressione più generale del momento risultante delle forze d'inerzia, peraltro, per la (9), esprimibile anche come:

$$\vec{M}_O = -\frac{\mathrm{d}\vec{K}_O}{\mathrm{dt}} - \vec{v}_O \wedge m\vec{v}_G \qquad \textbf{(16')}$$

Ovviamente, alla (16) o alla (16') è applicabile la formula di trasposizione dei momenti, per cui, se è stato calcolato il momento risultante rispetto ad un polo O_1 ed occorra quello rispetto al polo O, sarà:

$$\vec{M}'_O = \vec{M}'_{O_1} + (O - O_1) \wedge \vec{F}' \qquad \textbf{(17)}$$

Infatti se riprendiamo l'espressione del momento della quantità di moto com'è stata già definita in (14):

$$\vec{K}_O = \sum_i \left(P_i - O\right) \wedge \vec{Q}_i = \sum_i \left(P_i - O\right) \wedge m_i \vec{v}_i$$

ed applichiamo a questo vettore, la formula di trasposizione che consente il cambiamento del polo, possiamo scrivere:

$$\vec{K}_O = \sum_i \left(P_i - O\right) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \left[\left(P_i - O_1\right) + \left(O_1 - O\right)\right] \wedge m_i \vec{v}_i =$$

$$= \sum_i \left(P_i - O_1\right) \wedge m_i \vec{v}_i + \left(O_1 - O\right) \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i = \qquad \textbf{(18)}$$

$$= \vec{K}_{O_1} + \left(O_1 - O\right) \wedge \vec{Q}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene poi:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d\vec{K}_{O_1}}{dt} + \left(\vec{v}_{O_1} - \vec{v}_O\right) \wedge \vec{Q} + \left(O_1 - O\right) \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

ossia:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{v}_O \wedge \vec{Q} = \vec{M}'_O = \frac{d\vec{K}_{O_1}}{dt} + \vec{v}_{O_1} \wedge \vec{Q} + \left(O - O_1\right) \wedge \vec{F}'$$

che è proprio la (17).
Se poi come polo era stato scelto il baricentro G del sistema, la stessa (17) si riduce a:

$$\vec{M}'_O = -\frac{d\vec{K}_G}{dt} \; + \; (G - O) \wedge \vec{F}' \qquad \textbf{(17')}$$

Dalla (17) o dalla (17') si deduce che se la retta contenente i due poli è parallela al risultante delle forze d'inerzia si annulla il secondo termine della somma a secondo membro e quindi il momento risultante delle forze d'inerzia rimane invariato.

Ancora dalla (10') si deduce, in particolare, che, allorché si sceglie come polo un punto fisso, per il quale sarà ovviamente $\vec{v}_O = 0$, oppure si sceglie come polo il baricentro del sistema, per cui sarà $\vec{v}_O = \vec{v}_G$, il secondo termine della somma a secondo membro della 10' stessa (o della 10) sarà nullo e l'espressione del momento risultante delle forze d'inerzia si riduce a:

$$\vec{M}'_O = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \quad \text{oppure a:} \quad \vec{M}'_G = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

Resta da vedere quale espressione si può dare al **momento delle quantità di moto nel caso di un corpo rigido**.

Possiamo osservare che, per ogni punto P_i del rigido, e se A è un

punto dello stesso, è lecito scrivere:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)$$

per cui, considerando la sommatoria estesa a tutti i punti del rigido, la (14) può essere scritta come:

$$\vec{K}_A = \sum (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum (P_i - A) \wedge m_i \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A) \right] =$$
$$= \sum m_i (P_i - A) \wedge \vec{v}_A + \sum (P_i - A) \wedge \vec{\omega} \wedge m_i (P_i - A)$$

e per la (7), e risolvendo il doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{K}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A +$$
$$+ \sum m_i (P_i - A)^2 \vec{\omega} - \sum \left[m_i (P_i - A) \times \vec{\omega} \right] (P_i - A) \qquad \textbf{(19)}$$

Riferiamo adesso il moto del rigido ad un sistema di assi di versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, e con origine in A.
Avremo, per il vettore velocità angolare del rigido:

$$\vec{\omega} = p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1$$

se p, q, r sono le componenti di questo rispetto ai versori della terna prescelta; e poi anche:

$$P_i - A = x_i \vec{i}_1 + y_i \vec{j}_1 + z_i \vec{k}_1$$

per la posizione del generico punto del rigido.
Consideriamo separatamente gli ultimi due termini della precedente espressione (19) del momento della quantità di moto.
Avremo per il primo dei due:

$$\sum m_i (P_i - A)^2 \vec{\omega} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1) \qquad \textbf{(20)}$$

e per il secondo:

$$\sum \left[m_i (P_i - A) \times \vec{\omega} \right] (P_i - A) =$$
$$= \sum m_i (x_i p + y_i q + z_i r)(x_i \vec{i}_1 + y_i \vec{j}_1 + z_i \vec{k}_1) =$$
$$= \sum m_i (x_i^2 p + x_i y_i q + x_i z_i r)\vec{i}_1 + \qquad \textbf{(21)}$$
$$+ \sum m_i (x_i y_i p + y_i^2 q + y_i z_i r)\vec{j}_1 +$$
$$+ \sum m_i (x_i z_i p + y_i z_i q + z_i^2 r)\vec{k}_1$$

Sottraendo la (21) dalla (20), così come indica la (19), otteniamo:

$$\begin{aligned}\sum m_i\left(P_i-A\right)^2\omega-\sum\left[m_i\left(P_i-A\right)\times\omega\right]\left(P_i-A\right)=\\ =\sum m_i\left[\left(y_i^2+z_i^2\right)p-x_iy_iq-x_iz_ir\right]\vec{i}_1+\\ +\sum m_i\left[\left(x_i^2+z_i^2\right)q-x_iy_ip-y_iz_ir\right]\vec{j}_1+\\ +\sum m_i\left[\left(x_i^2+y_i^2\right)r-x_iz_ip-y_iz_iq\right]\vec{k}_1\end{aligned} \qquad \textbf{(22)}$$

Ora, poiché i componenti della rotazione, p, q, r, sono indipendenti dai singoli punti che costituiscono il rigido, nella (22) si può porre:

$$A=\sum m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)=\int_S\left(y^2+z^2\right)dm$$

$$B=\sum m_i\left(x_i^2+z_i^2\right)=\int_S\left(x^2+z^2\right)dm$$

$$\mathrm{C}=\sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=\int_S\left(x^2+y^2\right)dm$$

$$A'=\sum m_iy_iz_i=\int_S yz\,dm$$

$$B'=\sum m_ix_iz_i=\int_S xz\,dm$$

$$C'=\sum m_ix_iy_i=\int_S xy\,dm$$

che altro non sono se non i momenti d'inerzia del rigido, A, B, C, rispetto agli assi della terna di versori $\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$, ed i momenti di deviazione A', B', C'.

L'espressione completa del momento risultante delle quantità di moto si può allora scrivere come:

$$\begin{aligned}\vec{K}_A=m(G-A)\wedge\vec{v}_A+\\ +(Ap-B'q-C'r)\vec{i}_1+\\ +(Bq-C'p-A'r)\vec{j}_1+\\ +(Cr-A'q-B'p)\vec{k}_1\end{aligned} \qquad \textbf{(23)}$$

Si vede subito che:

- se si sceglie come origine della terna ausiliaria di versori $\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$, un punto fisso o coincidente con il baricentro del rigido il primo termine a secondo membro della (23) si annulla;
- se si sceglie inoltre come orientazione di tale terna quella degli assi principali d'inerzia del rigido, si annullano anche i momenti di deviazione A',

B', C', e si ottiene l'espressione più semplice:

$$\vec{K}_A = Ap\vec{i} + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1 \qquad \textbf{(24)}$$

dove compaiono allora solamente i momenti principali d'inerzia del rigido e le componenti della sua velocità angolare.

Per il modo in cui si è giunti alla sua espressione, possiamo interpretare il primo termine della (23) come il momento della quantità di moto che il rigido, con la sua massa concentrata in G, avrebbe nel moto traslatorio del punto A, e la restante parte come il momento risultante della quantità di moto del sistema nel moto rispetto al punto A.
Con questa intesa, la (23) può allora essere scritta in forma sintetica come:

$$\vec{K}_A = \vec{K}_A^{(r)} + m(G - A) \wedge \vec{v}_A \qquad \textbf{(25)}$$

e, ancora, se come origine della terna ausiliaria è stato scelto proprio il baricentro del rigido, si ha semplicemente:

$$\vec{K}_G = \vec{K}_G^{(r)} \qquad \textbf{(25')}$$

Alla derivata del momento della quantità di moto si può ancora dare una particolare espressione.
Utilizzando, per brevità, la forma (24), dovremmo scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{K}_A^{(r)}}{\mathrm{dt}} = Ap\dot{\vec{i}}_1 + Bq\dot{\vec{j}}_1 + Cr\dot{\vec{k}}_1 + Ap\frac{d\vec{i}_1}{dt} + Bq\frac{d\vec{j}_1}{dt} + Cr\frac{d\vec{k}_1}{dt} \qquad \textbf{(26)}$$

Si distinguono allora chiaramente: i primi tre termini che si riferiscono alla variazione del modulo dei componenti della velocità angolare del rigido; gli ultimi tre che tengono conto della variazione di direzione dei versori degli assi della terna ausiliaria.
Per le formule di Poisson è:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_1$$

e quindi è anche:

$$Ap\frac{d\vec{i}_1}{dt} + Bq\frac{d\vec{j}_1}{dt} + Cr\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \left(Ap\vec{i}_1 + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1 \right) = \vec{\omega} \wedge \vec{K}_A$$

Indicando sinteticamente con $\dot{\vec{K}}_A$ la parte relativa ai primi tre termini, la (26) si può pure scrivere come:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{K}_A}{\mathrm{dt}} = \dot{\vec{K}}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_A \qquad \textbf{(27)}$$

e l'espressione del momento risultante delle forze d'inerzia diventa:

$$\vec{M}'_A = -\dot{\vec{K}}_A - \vec{\omega} \wedge \vec{K}_A + (A - G) \wedge m\vec{a}_A$$

Ovviamente se si sceglie come polo il baricentro G si ha semplicemente:

$$\vec{M}'_G = -\dot{\vec{K}}_G - \vec{\omega} \wedge \vec{K}_G \qquad \textbf{(27')}$$

che corrisponde alla (16') quando vi si sia tenuto conto della coincidenza di G con il polo O.

§ 4.- Azioni d'inerzia nel manovellismo di spinta.

Sia dato un manovellismo di spinta (fig.1) la cui manovella abbia lunghezza r_1 e sia l la lunghezza della biella; il baricentro G della biella si trovi a distanza l_1 dal piede di biella, B, ed l_2 dal bottone di manovella, A; siano inoltre m_m, m_b, ed m_s rispettivamente le masse della manovella, della biella e dello stantuffo, comprendendo in esso anche le masse ad esso connesse ed in moto alternativo.

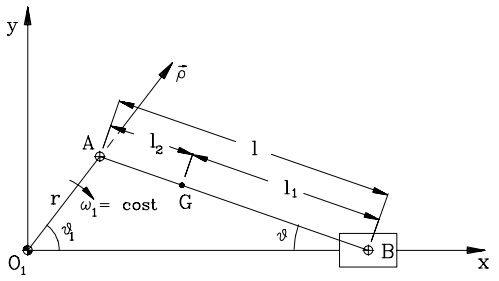


Figura 1

Facendo l'ipotesi che il moto della manovella avvenga con velocità angolare ω_1=cost, cerchiamo le azioni di inerzia che sollecitano ciascuno dei suoi membri (manovella, stantuffo, biella) in modo da avere il quadro delle sollecitazioni sul meccanismo al variare della configurazione.
Consideriamo, anzitutto, un riferimento cartesiano con origine nel centro di rotazione della manovella O_1 ed asse x lungo la direzione del moto del piede, indicando inoltre con ϑ_1 il valore istantaneo dell'angolo di manovella e con ϑ l'analogo della biella sull'asse delle x.

a) - Manovella.

Osserviamo subito che si tratta di un membro rigido in moto piano intorno ad un punto fisso e con velocità angolare costante; da quest'ultima circostanza segue che è $\vec{\omega}_1 = 0$.

Per quanto concerne il calcolo delle azioni d'inerzia dovrà essere, come già visto:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= -m_m \vec{a}_G \\ \vec{M}'_{O_1} &= -\dot{\vec{K}}_{O_1} - \vec{\omega} \wedge \vec{K}_{O_1} \end{aligned} \qquad \textbf{(28)}$$

Possiamo subito concludere che sarà certamente nullo il momento risultante delle forze d'inerzia: infatti nella seconda delle (28), scegliendo come riferimento solidale al rigido il riferimento baricentrico con origine anch'esso in O_1 e versori $\vec{\rho}$ orientato come la manovella e $\vec{k}_1 \equiv \vec{k}$, si avrebbe:

$$\vec{K}_{O_1} = Cr\,\vec{k}_1 = C\,\omega_1 \vec{k}_1$$

e di conseguenza:

$$\vec{M}'_{O_1} = -\dot{r}\,\vec{k}_1 - \omega_1 \vec{k} \wedge \vec{K} = 0 \qquad \textbf{(29)}$$

Il primo termine è nullo perché è ω_1=cost, il secondo perché i due vettori risultano paralleli.

Per quanto riguarda il calcolo del risultante delle forze d'inerzia, se si indica con r_G la distanza del baricentro della manovella da O_1, l'accelerazione del punto G_m è data da:

$$\vec{a}_{G_m} = -\omega_1^2 r_G\ \vec{\rho}$$

e quindi per la prima delle (28):

$$\vec{F}' = -m_m \vec{a}_{G_m} = m_m \omega_1^2 r_G\ \vec{\rho} \qquad \textbf{(30)}$$

ossia, secondo lo schema di fig.1, una forza disposta istante per istante secondo la direzione della manovella stessa e quindi ruotante con essa.

Tuttavia se ipotizziamo, come è di norma, che la manovella sia staticamente equilibrata, ossia che la sua forma e quindi la sua distribuzione di massa sia tale per cui il baricentro stia sull'asse di rotazione, anche la (30) è nulla, essendo r_G=0.

b) Stantuffo (e masse connesse, in moto traslatorio)

Poiché il moto della massa m_m è traslatorio sarà comunque p=q=r=0 e quindi sarà comunque nullo, come è ovvio, il momento risultante delle forze d'inerzia.
Il risultante delle forze d'inerzia sarà dato da:

$$\vec{F}' = -m_s \vec{a}_{G_s} = -m_s \vec{a}_B = -m_s \ddot{x}_B \vec{i} \qquad \textbf{(31)}$$

Cominciamo a calcolare, quindi, l'accelerazione del piede di biella B; la legge dello spostamento è data da:

$$x_B = r_1 \cos\vartheta_1 + l \cos\vartheta \qquad \textbf{(32)}$$

mentre è anche:

$$l \sin \vartheta = -r_1 \sin \vartheta_1 \tag{33}$$

e, introducendo l'*obliquità della biella*, ossia il rapporto $\lambda = r_1 / l$, ricaviamo dalla (33):

$$\sin \vartheta = -\lambda \sin \vartheta_1 \tag{34}$$

che, sostituita nella (32), ci dà:

$$x_B = r_1 \cos \vartheta_1 + l\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta_1} \tag{35}$$

che è l'espressione **esatta** dello *spostamento del piede di biella* al variare dell'angolo di manovella.
Un'espressione più comoda della (35) si ottiene sostituendo al radicale i primi due termini del suo sviluppo in serie di Mac Laurin,(*) ottenendo, in tal modo, l'espressione in seconda approssimazione che è più semplice da trattare e la cui bontà sarà sufficiente se per l'obliquità della biella sarà $\lambda<1/3$.
Con tale sostituzione sarà:

$$\begin{aligned} x_B &= r_1\left[\cos \vartheta_1 + \frac{l}{r_1}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \vartheta_1\right)\right] = \\ &= r_1\left[\cos \vartheta_1 + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \vartheta_1\right)\right] \end{aligned} \tag{36}$$

Derivando la (36) otteniamo l'espressione della *velocità del piede*, ossia:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B = \dot{x}_B \vec{i} &= -r_1\left(\sin \vartheta_1 \omega_1 + \frac{1}{2}\lambda \sin 2\vartheta_1 \omega_1\right)\vec{i} = \\ &= -r_1 \omega_1\left(\sin \vartheta_1 + \frac{\lambda}{2}\sin 2\vartheta_1\right)\vec{i} \end{aligned} \tag{37}$$

e derivando una seconda volta, nella ipotesi che sia $\omega_1 = \text{cost}$, si ha finalmente l'espressione dell'accelerazione del piede di biella che vale:

$$\vec{a}_B = -r_1 \omega_1^2 \left(\cos \vartheta_1 + \lambda \cos 2\vartheta_1\right)\vec{i} \tag{38}$$

Il risultante delle forze d'inerzia che sollecita lo stantuffo sarà allora dato da:

(*) $\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$

$$\vec{F}'_s = -m_s \vec{a}_B = m_s r_1 \omega_1^2 \left(\cos\vartheta_1 + \lambda \cos 2\vartheta_1\right)\vec{i} \qquad \textbf{(39)}$$

e quindi una forza disposta secondo la guida del moto, variabile nel tempo secondo l'angolo di manovella ϑ_1.
A secondo membro della (39) compaiono due termini: uno in ϑ_1, l'altro in $2\vartheta_1$; poiché $\vartheta_1 = \omega_1 t$ l'espressione (39) corrisponde alla somma dei componenti di due vettori rotanti, il secondo dei quali ruota con velocità doppia del primo. Per questo ai due termini si dà, al primo, il nome di **componente del primo ordine e componente del second'ordine**, al secondo.

c) Biella.

La biella ha un moto rototraslatorio ed il suo atto di moto, quindi, avviene, per ogni configurazione, intorno al punto C, centro della rotazione istantanea.

Per il calcolo del risultante delle forze d'inerzia, cerchiamo anzitutto l'accelerazione del baricentro. Per il teorema di Rivals deve essere:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{G,A} \qquad \textbf{(40)}$$

così come deve essere pure:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B,A} \qquad \textbf{(41)}$$

e, in queste è:

$$a_{G,A} = l_2\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

$$a_{B,A} = l\sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

con i due vettori $\vec{a}_{G,A}$ e $\vec{a}_{B,A}$ paralleli fra loro, essendo allineati i punti A, G, e B.
E' lecito pertanto scrivere:

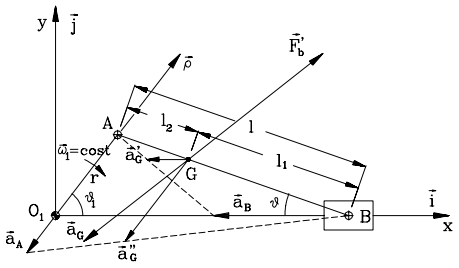


Figura 2

$$\frac{a_{G,A}}{a_{B,A}} = \frac{AG}{AB} = \frac{l_2}{l}$$

e poiché $\vec{a}_{G,A}$ e $\vec{a}_{B,A}$ sono paralleli vale anche:

$$\vec{a}_{G,A} = \frac{l_2}{l}\vec{a}_{B,A} \qquad \textbf{(42)}$$

Sostituendo la (42) nella (40) avremo, allora:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{G,A} = \vec{a}_A + \frac{l_2}{l}\vec{a}_{B,A} = \vec{a}_A + \frac{l_2}{l}\left(\vec{a}_B - \vec{a}_A\right)$$

ossia:

$$\vec{a}_G = \left(1 - \frac{l_2}{l}\right)\vec{a}_A + \frac{l_2}{l}\vec{a}_B = \frac{l_1}{l}\vec{a}_A + \frac{l_2}{l}\vec{a}_B = \vec{a}'_G + \vec{a}''_G \qquad \textbf{(43)}$$

La costruzione del vettore $\vec{a}_G$ può allora essere fatta, come in fig. 2 partendo dai vettori $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_B$ e costruendo i vettori proporzionali $\vec{a}'_G$ ed $\vec{a}''_G$ da sommare fra loro come nella (43).

Il risultante delle forze d'inerzia che sollecitano la biella, si potrà allora scrivere come:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_b &= -m_b\left(\vec{a}'_G + \vec{a}''_G\right) = -\left(m_b \frac{l_1}{l}\vec{a}_A + m_b \frac{l_2}{l}\vec{a}_B\right) = \\ &= -\left(m'_b\,\vec{a}_A + m''_b\,\vec{a}_B\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(44)}$$

Si vede cioè che, ai fini del calcolo del risultante delle forze d'inerzia, la massa complessiva, m_b, della biella può pensarsi scomposta in due masse ridotte, m'_b ed m''_b, proporzionali rispettivamente alle distanze del baricentro, G, da B e da A, ed applicate nei punti A e B.

Sostituendo nella (44) le espressioni di $\vec{a}_A = -r_1\omega_1^2\,\vec{\rho}$ e di $\vec{a}_B$ (v. sopra), si ha:

$$\vec{F}'_b = r_1\omega_1^2\left[m'_b\,\vec{\rho} + m''_b\left(\cos\vartheta_1 + \lambda\cos 2\vartheta_1\right)\vec{i}\right] \qquad \textbf{(44')}$$

e, tenendo conto che $\vec{\rho} = \cos\vartheta_1\,\vec{i} + \operatorname{sen}\vartheta_1\,\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \left[\vec{F}'_b\right]_x &= r_1\omega_1^2\left[m_b\cos\vartheta_1 + \lambda\, m''_b\cos 2\vartheta_1\right]\vec{i} \\ \left[\vec{F}'_b\right]_y &= r_1\omega_1^2 m'_b\operatorname{sen}\vartheta_1\,\vec{j} \end{aligned} \qquad \textbf{(45)}$$

Il medesimo risultato poteva ottenersi anche ragionando in termini analitici.
Sarebbe stato da scrivere:

$$\begin{aligned} x_G &= r_1\cos\vartheta_1 + l_2\cos\vartheta = r_1\cos\vartheta_1 + l_2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\vartheta_1} \\ y_G &= r_1\sin\vartheta_1 + l_2\sin\vartheta = r\sin\vartheta_1 - l_2\lambda\sin\vartheta_1 \end{aligned}$$

In seconda approssimazione, queste diventano:

$$\begin{aligned} x_G &= r_1\cos\vartheta_1 + l_2\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\vartheta_1\right) \\ y_G &= r_1\sin\vartheta_1\left(1 - \frac{l_2}{l}\right) = r_1\frac{l_1}{l}\sin\vartheta_1 = \lambda\, l_1\sin\vartheta_1 \end{aligned}$$

Derivando due volte rispetto al tempo, sempre con l'ipotesi che sia $\vec{\omega}_1 = \text{cost}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\left[\vec{a}_G\right]_x &= \ddot{x}_G = -r_1\omega_1^2\left[\cos\vartheta_1 + \lambda\frac{l_2}{l}\cos 2\vartheta_1\right]\vec{i}\\ \left[\vec{a}_G\right]_y &= \ddot{y}_G = -\lambda\, l_1\omega_1^2 sen\vartheta_1\ \vec{j}\end{aligned} \qquad \textbf{(46)}$$

che sono le componenti dell'accelerazione del punto G secondo i due assi.
Ad esse corrisponderanno le due componenti del risultante delle forze d'inerzia:

$$\left[\vec{F}'_b\right]_x = -m_b\ddot{x}_G = r_1\omega_1^2 m_b\left[\cos\vartheta_1 + \lambda\frac{l_2}{l}\cos 2\vartheta_1\right]\vec{i}$$

$$\left[\vec{F}'_b\right]_y = -m_b\ddot{y}_G = m_b\frac{r_1}{l}l_1\omega_1^2 sen\vartheta_1\ \vec{j}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\left[\vec{F}'_b\right]_x &= r_1\omega_1^2\left[m_b\cos\vartheta_1 + \lambda\, m''_b\cos 2\vartheta_1\right]\vec{i}\\ \left[\vec{F}'_b\right]_y &= \mathrm{r}_1\omega_1^2 m'_b\, sen\vartheta_1\ \vec{j}\end{aligned} \qquad \textbf{(45)}$$

confermando il risultato già ottenuto partendo dalla forma vettoriale.

Per quanto concerne il *momento risultante delle forze d'inerzia* scegliamo (fig.3) come terna ausiliaria un sistema di assi baricentrici solidali alla biella stessa, di versori $\vec{i}_1$ e $\vec{j}_1$, con origine per es. in A. Calcoliamo quindi il momento rispetto al baricentro, G, della biella.

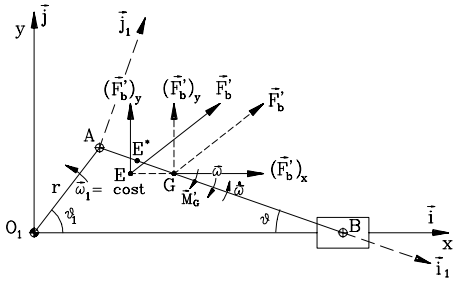


Figura 3

In tal modo si può utilizzare la (27') scrivendo:

$$\vec{M}'_G = -\dot{\vec{K}}_G - \vec{\omega}\wedge\vec{K}_G \qquad \textbf{(47)}$$

D'altra parte, detto J_b il momento d'inerzia della biella rispetto all'asse per G perpendicolare al piano del moto, e tenuto conto che, poiché detto moto è piano, sarà p=q=0 ed r=ω, l'espressione del momento delle quantità di moto si riduce a:

$$\vec{K}_G = Cr\vec{k}_1 = J_b\omega\,\vec{k}_1 \qquad \textbf{(48)}$$

mostrando che il secondo termine della (47) è nullo per il parallelismo dei due vettori.
Il momento risultante delle forze d'inerzia sarà dato allora da:

$$\vec{M}'_G = -\dot{\vec{K}}_G = -J_b \omega \vec{k}_1 \tag{49}$$

Ora, per il calcolo della accelerazione angolare della biella calcolata, derivando la (34), avremo:

$$\omega \cos\vartheta = -\omega_1 \lambda \cos\vartheta_1$$

da cui:

$$\omega = -\omega_1 \lambda \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta} = -\omega_1 \lambda \frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\vartheta_1}} \tag{50}$$

Poiché nel radicale a denominatore della (50) il sottraendo è certamente molto piccolo rispetto all'unità ($\lambda<1/3$), si può accettare con buona approssimazione che sia:

$$\omega \cong -\omega_1 \lambda \cos\vartheta_1 \tag{51}$$

Derivando ancora, avremo quindi:

$$\omega \cong \omega_1^2 \lambda \ \mathrm{sen}\,\vartheta_1 \tag{52}$$

e quindi, sostituendo questa espressione nella (49) si ottiene:

$$\vec{M}'_G = -J_b \lambda \ \omega_1^2 \ \mathrm{sen}\,\vartheta_1 \ \vec{k}_1 \tag{53}$$

che rappresenta l'espressione finale del momento risultante delle forze d'inerzia che sollecitano la biella del manovellismo.

Il sistema del risultante (45) e del momento risultante (53) può anche essere ricondotto ad un unico vettore $\vec{F}'_b$ applicato in un altro punto della biella, tale che il momento di trasporto sia proprio $\vec{M}'_G$. Allo scopo è sufficiente spostare il punto di applicazione della $\left[\vec{F}'_b\right]_y$ lungo la retta di applicazione della $\left[\vec{F}'_b\right]_x$, di modo che resti comunque nullo il momento di quest'ultima componente.
Il nuovo punto di applicazione di $\vec{F}'_b$ sarà dato dal segmento:

$$\begin{aligned} EG &= \frac{M_G}{\left[F'_b\right]_y} = -\frac{J_b \lambda \ \omega_1^2 \ \mathrm{sen}\,\vartheta_1}{m'_b \ r_1 \omega_1^2 \ \mathrm{sen}\,\vartheta_1} = -\frac{J_b \lambda}{m'_b \ r_1} = \\ &= -\frac{J_b l r_1}{m_b l_1 l r_1} = -\frac{J_b}{m_b l_1} \end{aligned} \tag{54}$$

In tal modo l'effetto complessivo della $\vec{F}'_b$ applicata in E è quello del precedente sistema di vettori.

D'altra parte, poiché a $\lambda<1$ corrisponde anche un angolo ϑ_1 molto piccolo, il punto E può farsi coincidere con il punto E* sulla stessa biella e si vede così che quest'ultima può essere considerata (fig. 4) come un pendolo composto sospeso nel punto B di lunghezza ridotta:

$$l^* = EB^* = BG + GE^* = \\ = l_1 + \frac{J_b}{m_b l_1} = l_1 + \frac{\Delta^2}{l_1} \qquad \textbf{(55)}$$

di cui il punto E* è il centro di oscillazione e Δ il giratore d'inerzia che è rappresentato da:

$$\Delta = \sqrt{\frac{J_b}{m_b}}$$

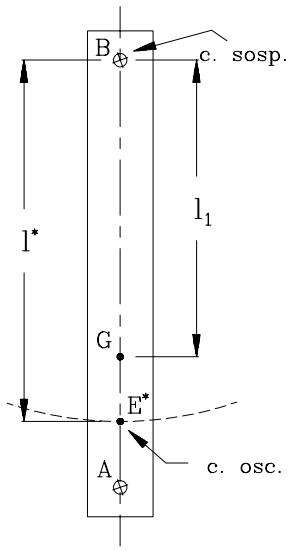


Figura 4

§ 3. - Equilibramento delle forze d'inerzia nel monocilindro.

Le espressioni trovate per le azioni d'inerzia che sollecitano il manovellismo, come si è visto, sono tutte funzioni di tipo sinusoidale della coordinata lagrangiana ϑ_1, e quindi del tempo; è quindi inevitabile che ciò comporterà l'insorgere di vibrazioni che risulteranno se non dannose, per lo meno fastidiose sotto vari aspetti.
Ci si pone quindi il problema del cosiddetto *equilibramento delle forze d'inerzia* al fine di far sì che nel loro insieme il sistema di tali forze risulti un sistema o totalmente equilibrato, o equilibrato almeno in parte.

Esaminiamo il caso del manovellismo considerato al § precedente, nella ipotesi che la sua manovella sia di per sé staticamente equilibrata.

Sommando insieme i componenti delle forze d'inerzia che sollecitano la biella (45) e lo stantuffo (39) secondo i versori degli assi coordinati si ha:

$$\begin{aligned}[F']_x &= r_1\omega_1^2\left[\left(m_s + m_b\right)\cos\vartheta_1 + \lambda\left(m_s + m''_b\right)\cos 2\vartheta_1\right] \\ [F']_y &= r_1\omega_1^2 m'_b \operatorname{sen}\vartheta_1\end{aligned} \tag{56}$$

dove, di nuovo, si evidenziano i termini corrispondenti alle **forze d'inerzia del I ordine** (in $\cos\vartheta_1$)**,** e quelli corrispondenti alle **forze d'inerzia del II ordine** (in $\cos 2\vartheta_1$).

Supponiamo, ora, di aggiungere, solidalmente alla manovella, una massa (massa equilibratrice m_e, tale che il suo baricentro si trovi alla distanza r_e dall'asse di rotazione, e situata dalla parte opposta al bottone di manovella.

La sua presenza darà luogo sul manovellismo ad ulteriori forze d'inerzia; l'accelerazione del suo baricentro vale, nel riferimento già adottato:

$$\vec{a}_{G_e} = \omega_1^2 r_e\ \vec{\rho}$$

e quindi le componenti di forza d'inerzia che si aggiungono sui due assi sono:

$$\begin{aligned}\left[F'_e\right]_x &= -r_e\omega_1^2 m_e\cos\vartheta_1 \\ \left[F'_e\right]_y &= -r_e\omega_1^2 m_e\operatorname{sen}\vartheta_1\end{aligned} \tag{57}$$

Sommando le (57) alle (56), si otterrà allora:

$$\begin{aligned}[F']_x &= r_1\omega_1^2\left[\left(m_s + m_b - \frac{r_e}{r_1}m_e\right)\cos\vartheta_1 + \lambda\left(m_s + m''_b\right)\cos 2\vartheta_1\right] \\ [F']_y &= r_1\omega_1^2\left(m'_b - \frac{r_e}{r_1}m_e\right)\operatorname{sen}\vartheta_1\end{aligned} \tag{58}$$

e da qui si vede che, assegnando opportuni valori ad m_e e ad r_e si possono modificare le componenti del I ordine, sia sull'asse x che sull'asse y; se per esempio si pone:

$$m_e = \left(m_s + m_b\right)\frac{r_1}{r_e}$$

le (58) diventano:

$$\begin{aligned}[F']_x &= r_1\omega_1^2\lambda\left(m_s + m''_b\right)\cos 2\vartheta_1 \\ [F']_y &= -r_1\omega_1^2\left(m''_b + m_s\right)\operatorname{sen}\vartheta_1\end{aligned} \tag{59}$$

ottenendo quindi il completo equilibramento delle forze d'inerzia del I ordine lungo l'asse delle x, mentre la componente lungo l'asse delle y sarà e ruotata di 180° e di intensità che potrebbe essere maggiore o mi-

nore rispetto alla precedente, a seconda dei valori delle masse in giuoco[(*)] .
Se invece si pone:

$$m_e = m'_b \frac{r_1}{r_e}$$

si ha dalle (58):

$$\begin{aligned} [F']_x &= r_1\omega_1^2\left(m_s + m''_b\right)\left(\cos\vartheta_1 + \lambda\ \cos 2\vartheta_1\right) \\ [F']_y &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(59')}$$

e si vede che si annulla la componente lungo l'asse delle y e rimane attenuata la componente del I ordine lungo l'asse delle x ($m''_b<m_b$).
In effetti, in tal modo, si è annullata la componente di tipo centrifugo quella che si evidenzia se si riscrivono le (56) separando il componente della forza d'inerzia secondo la direzione della manovella di versore $\vec{\rho}$ da quello avente la direzione della guida del moto di versore $\vec{i}$. Dalla (39) e dalla (44') si ricava, infatti:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_c &= r_1\omega_1^2 m'_b\ \vec{\rho} \\ \vec{F}'_a &= r_1\omega_1^2\left(m_s + m''_b\right)\left(\cos\vartheta_1 + \lambda\ \cos 2\vartheta_1\right)\vec{i} \end{aligned} \qquad \textbf{(60)}$$

dove la prima delle due è chiaramente un componente di tipo centrifugo, la seconda un componente di tipo alterno di I e II ordine.

L'utilizzo dell'uno o l'altro tipo di equilibramento è legato alla disposizione effettiva del manovellismo monocilindro ma soprattutto a scelte costruttive; potrebbe tenersi presente che la componente della forza d'inerzia secondo l'asse verticale è in genere più fastidiosa di quella secondo l'asse orizzontale.

Per quanto riguarda la forza d'inerzia del II ordine è impossibile riuscire ad eliminarla con procedure di questo tipo: tale componente equivale infatti a quella di una massa che ruota con velocità doppia di quella della manovella e si può eliminare quindi solo attraverso dispositivi aggiuntivi che prevedano un rapporto di trasmissione 2:1.

§ 4.- Equilibramento dei pluricilindri.

Il problema dell'equilibramento dei pluricilindri non differisce,

(*) Se $m_s < m'_b - m''_b$, ossia se $m_s < m_b(l_1 - l_2)/l$, l'intensità risulta minore (pistoni in lega leggera).

in linea di principio, da quello analizzato per un monocilindro; ciò che occorre verificare in questo caso è se l'avere più manovellismi (tutti identici), con manovelle rotanti attorno ad un unico asse e solidali fra loro (*albero a manovelle*), renda necessario o meno l'aggiunta di masse equilibratrici.
La procedura è quella di sommare vettorialmente (o secondo due assi) le componenti delle forze d'inerzia, sia del primo che del secondo ordine, di pertinenza di ciascun cilindro.
Nel far ciò occorrerà tener conto, ovviamente, della geometria complessiva del pluricilindro: in particolare dell'angolo di sfasamento, β, fra le manovelle, e della disposizione angolare degli assi del moto dei singoli manovellismi, assi che possono appartenere allo stesso piano (cilindri in linea) oppure a 2 piani diversi (disposizione a V) ma anche a più piani (motori stellari); occorrerà pure tener presente che gli assi del moto risulteranno comunque distanziati fra loro, nella direzione dell'asse z, per il fatto che i singoli cilindri - e parti adiacenti - hanno dimensioni non nulle.

Se si tratta di pluricilindri facenti parte di motori alternativi, la relazione che da' lo sfasamento angolare fra i cicli termodinamici è $\phi=\pi$ t/n, dove t vale 2 o 4 a seconda che si tratti di motore a due o a quattro tempi (del ciclo termodinamico), e dove n è il numero dei cilindri del motore; quando si tratta di pluricilindri in linea questo valore corrisponde all'angolo di sfasamento, β, fra le manovelle.

A titolo di esempio, consideriamo alcuni casi di pluricilindri in linea.
Per comodità poniamo nelle (60) $m_c=m'_b$ ed $m_a=m_s+m''_b$ e scriviamo:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_c &= r_1\omega_1^2 m_c\,\vec{\rho} \\ \vec{F}'_a &= r_1\omega_1^2 m_a\left(\cos\vartheta_1 + \lambda\,\cos 2\vartheta_1\right)\vec{i} \end{aligned} \qquad \textbf{(61)}$$

Risulta intanto evidente che, tutte le volte che la distribuzione angolare delle manovelle intorno all'asse di rotazione risulterà simmetrica, si potrà dire che l'albero nel suo complesso non è solamente equilibrato staticamente ma anche dinamicamente equilibrato nel senso che risulta $\vec{F}'_c = 0$.

A) Bicilindro in linea a due tempi (fig.5)

Per n=2 e t=2, l'angolo fra le due manovelle risulta $\beta=\phi=\pi\cdot 2/2=\pi$, e quindi l'albero nel suo complesso risulta staticamente e dinamicamente equilibrato $\left[\vec{F}'_c = 0\right]$.

Dalle (61) avremo, separando le forze alterne del I e del II ordine:

$$[F']_a^I = r_1\omega_1^2 m_a\left[\cos\vartheta_1 + \cos(\vartheta_1 + \pi)\right] = 0$$

$$[F']_a^{II} = r_1\omega_1^2 m_a\lambda\left[\cos 2\vartheta_1 + \cos 2(\vartheta_1 + \pi)\right] = 2r_1\omega_1^2 m_a\lambda\ \cos 2\vartheta_1$$

Le componenti del I ordine risultano quindi equilibrate senza dover ricorrere alla aggiunta di masse equilibratrici (contrappesatura).

Tuttavia le forze in questione non hanno la medesima retta di applicazione; essendo gli assi dei cilindri distanziati saremo quindi in presenza di una coppia con asse momento perpendicolare all'asse di rotazione dell'albero: conviene quindi che ciascuna manovella sia equilibrata individualmente in modo da annullare l'effetto di tale coppia.

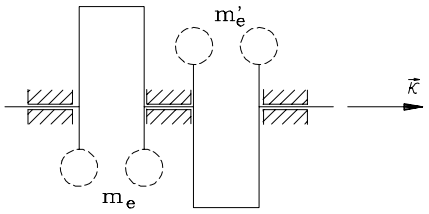


Figura 5

B) Bicilindro in linea a quattro tempi (fig. 6)

Per n=2 e t=4, l'angolo fra le due manovelle risulta $\beta=\phi=\pi\cdot 4/2=2\pi$, e quindi l'albero dovrà anzitutto essere contrappesato per ottenere che risulti equilibrato sia staticamente che dinamicamente.

Le forze alterne, sia del I che del II ordine non potranno risultare equilibrate: infatti un angolo di sfasamento di 2π porta i vettori del secondo manovellismo ad assumere lo stesso verso di quelli del primo.

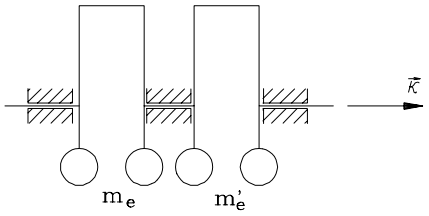


Figura 6

Procedendo, allora, alla equilibratura dei singoli manovellismi con $m_e=m_b r_1/r_e$ dalle (28) avremo, per un verso, $\vec{F}'_c = 0$ e per le forze alterne:

$$[F']_a^I = r_1\omega_1^2 m_a\left[\cos\vartheta_1 + \cos(\vartheta_1 + 2\pi)\right] = 2r_1\omega_1^2 m_a\cos\vartheta_1$$

$$[F']_a^{II} = r_1\omega_1^2 m_a\lambda\left[\cos 2\vartheta_1 + \cos 2(\vartheta_1 + 2\pi)\right] = 2r_1\omega_1^2 m_a\lambda\ \cos 2\vartheta_1$$

Equilibrando quindi le forze di tipo centrifugo non si ottiene alcun effetto positivo per ciò che riguarda le forze alterne del I ordine.

Se invece si pone $m_e = (m_s + m_b)r_1/r_e$, dalle (61) abbiamo:

$$[F']_x^I = 0$$

$$[F']_y^I = -2r_1\omega_1^2\left(m''_b + m_s\right)\operatorname{sen}\vartheta_1$$

ottenendo, per le forze d'inerzia del I ordine, un risultato quantitativamente identico al precedente ma con il "trasferimento" del risultante sull'asse delle y.

C) Quattro cilindri in linea a due tempi (fig. 7).

L'angolo fra le manovelle risulta $\beta=\phi=\pi\cdot 2/4= =\pi/2$, e quindi l'albero nel suo complesso risulta staticamente equilibrato ed equilibrate anche le forze di tipo centrifugo.

I momenti dovuti alla distanza fra gli assi dei cilindri, devono comunque essere corretti per mezzo delle masse equilibratrici: sono dovuti a due coppie (una ogni due manovelle contrapposte) i cui assi momento risultano sfasati di $\pi/2$ e che daranno quindi un momento risultante non nullo.

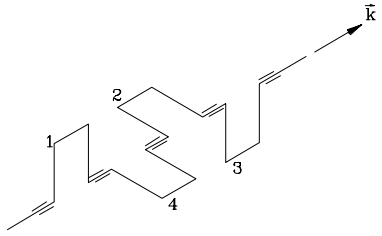


Figura 7

Per le forze di tipo alterno (61) si avrà, per quelle del I ordine:

$$[F']_a^I = r_1\omega_1^2 m_a \left[\begin{array}{l} \cos\vartheta_1 + \cos\left(\vartheta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + \\ +\cos\left(\vartheta_1 + \pi\right) + \cos\left(\vartheta_1 + 3\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right] =$$

$$= r_1\omega_1^2\left(m_s + m_b\right)\left[\cos\vartheta_1 - \operatorname{sen}\vartheta_1 - \cos\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_1\right] = 0$$

e per quelle del II ordine:

$$[F']_a^{II} = r_1\omega_1^2\lambda\, m_a \left[\begin{array}{l} \cos 2\vartheta_1 + \cos 2\left(\vartheta_1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + \\ +\cos 2\left(\vartheta_1 + \pi\right) + \cos 2\left(\vartheta_1 + 3\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right] = 0$$

Con questa disposizione, quindi, le componenti di tipo alterno, sia del I che del II ordine, risultano perciò automaticamente equilibrate.

D) Quattro cilindri in linea a quattro tempi (fig. 8).

L'angolo fra le manovelle risulta $\beta=\phi=\pi\cdot 4/4=\pi$, e quindi l'al-

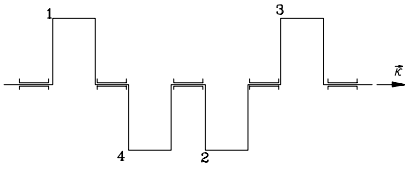


Figura 8

bero nel suo complesso risulta staticamente equilibrato.
Non occorre nemmeno intervenire per correggere i momenti dovuti alla distanza fra gli assi dei cilindri: le coppie (una ogni due manovelle contrapposte) hanno gli assi momento paralleli e sfasati di π e daranno quindi un momento risultante nullo.
Le forze di tipo alterno daranno, per le componenti del I ordine:

$$[F']_a^I = r_1\omega_1^2 m_a \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 + \cos(\vartheta_1 + \pi) + \\ +\cos(\vartheta_1 + 2\pi) + \cos(\vartheta_1 + 3\pi) \end{bmatrix} =$$

$$= r_1\omega_1^2 (m_s + m_b)[\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_1] = 0$$

e per le componenti del II ordine:

$$[F']_a^{II} = r_1\omega_1^2 \lambda\, m_a \begin{bmatrix} \cos 2\vartheta_1 + \cos 2(\vartheta_1 + \pi) + \\ +\cos 2(\vartheta_1 + 2\pi) + \cos 2(\vartheta_1 + 3\pi) \end{bmatrix} =$$

$$= 4r_1\omega_1^2 \lambda\, m_a \cos 2\vartheta_1$$

Tutte equilibrate quindi le componenti del I ordine mentre quelle del II ordine si sommano integralmente.

§ 7.- Applicazioni.

A)

Si consideri una pala dell'elica di un elicottero (fig. 9) schematizzata per semplicità come una piastra rettangolare di massa m, di lunghezza l, di larghezza b, e spessore a; sia α l'angolo di calettamento della pala sul mozzo, e sia $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ la sua velocità angolare. I momenti principali d'inerzia della pala, secondo i tre assi x_1, y_1, z_1, sono rispettivamente:

$$A = \frac{m}{12}(a^2 + l^2) + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(a^2 + 4l^2)$$

$$B = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \qquad \textbf{(62)}$$

$$C = \frac{m}{12}(b^2 + l^2) + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(b^2 + 4l^2)$$

La via più semplice è quella di scegliere come polo per il calcolo dei momenti il punto fisso O, di modo che l'espressione che dà il momento risultante delle forze d'inerzia si riduce a:

$$\vec{M}_O = -\dot{\vec{K}}_O - \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O \qquad \textbf{(63)}$$

e di scegliere poi come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia della pala, x_1, y_1, z_1, di modo che il momento delle quantità di moto è dato da:

$$\vec{K}_O = Ap\vec{i}_1 + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1$$

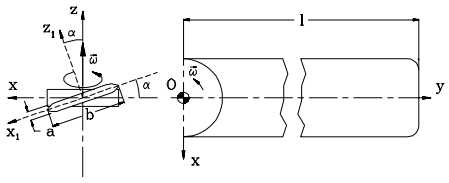


Figura 9

dove p, q, r, sono i componenti del vettore secondo gli stessi assi, che quindi valgono:

$$p = -\omega \sin\alpha \qquad q = 0 \qquad r = \omega \cos\alpha$$

In particolare, se si suppone che sia ω=cost, sarà nullo il primo termine della (63), essendo $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$.
Il prodotto vettore a secondo termine della (63) si otterrà moltiplicando:

$$\vec{\omega} = -\omega \sin\alpha\, \vec{i}_1 + \omega \cos\alpha\, \vec{k}_1$$

e:

$$\vec{K}_O = -A\omega \sin\alpha\, \vec{i}_1 + C\omega \cos\alpha\, \vec{k}_1$$

Avremo quindi:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_o = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ -\omega\sin\alpha & 0 & \omega\cos\alpha \\ -A\omega\sin\alpha & 0 & C\omega\cos\alpha \end{vmatrix} = \qquad \textbf{(64)}$$

$$= (C\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha - A\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha)\vec{j}_1$$

e quindi, in definitiva:

$$\vec{M}_{o'} = -\frac{1}{2}(C - A)\omega^2 \sin 2\alpha\, \vec{j}_1 \qquad \textbf{(65)}$$

Qui il segno effettivo del vettore momento risultante delle forze d'inerzia dipende, come si vede, dal segno della differenza (C-A) .
Ora, poiché è a<b, si ha:

$$C - A = m\left(\frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{3}\right) - m\left(\frac{a^2}{12} + \frac{l^2}{3}\right) = \frac{m}{12}\left(b^2 - a^2\right) > 0 \qquad \textbf{(66)}$$

e non potendo essere sen(2α)<0 finché 0<α<π/2, si vede che il momento risultante delle forze d'inerzia tende a far ruotare la pala intorno al suo asse

longitudinale nel verso che porterebbe l'asse x_1 a coincidere con l'asse x.

B)

Si consideri, come nello schema di fig.10, un disco pesante di massa m, raggio r, e spessore b, vincolato a rotolare senza strisciare su un piano, per il tramite di un braccio, privo di massa, infulcrato, a sua volta, in O mediante una coppia rotoidale, ad un'asta verticale.

Si vuole trovare il momento risultante delle forze d'inerzia che sollecita la coppia rotoidale in O, quando il braccio, ruotando con velocità angolare Ω=cost, pone a sua volta in rotazione il disco.

Con le dimensioni assegnate i momenti centrali d'inerzia del disco sono:

$$A = m\frac{r^2}{2} \qquad B = C = \frac{m}{12}(3r^2 + b^2) \qquad \textbf{(67)}$$

Poiché B=C, scegliamo come riferimenti: una terna fissa con origine in O, asse x lungo il braccio e asse z lungo il suo asse di rotazione; una terna mobile con origine in G, di assi x_1, y_1, z_1, equiversa alla precedente, e solidale al braccio.

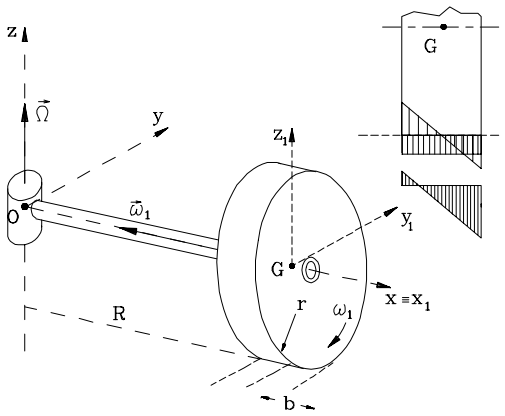


Figura 10

Consideriamo inoltre che quando il braccio ruota con velocità angolare $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, il baricentro G del disco descrive una traiettoria circolare di raggio R, e, per la condizione di rotolamento senza strisciamento fra disco e piano, la velocità angolare del disco sarà data dal vettore:

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{R}{r}\Omega\vec{i}_1 \qquad \textbf{(68)}$$

costante in modulo ma di direzione variabile con la posizione del braccio. La velocità angolare del disco nel suo moto assoluto sarà allora:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i}_1 + \Omega\vec{k}_1 = -\frac{R}{r}\Omega\vec{i}_1 + \Omega\vec{k}_1 \qquad \textbf{(69)}$$

talché, sugli assi principali d'inerzia, si hanno le componenti:

$$p = \omega_1 = -\frac{R}{r}\Omega \qquad q = 0 \qquad r = \Omega$$

tutte costanti, per cui sarà anche $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$.

Scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il baricentro G del disco, l'espressione che dà il momento risultante delle forze d'inerzia si riduce a:

$$\vec{M}_{G'} = -\dot{K}_G - \vec{\omega} \wedge \vec{K}_G = -\vec{\omega} \wedge \vec{K}_G \qquad \textbf{(70)}$$

in cui il momento delle quantità di moto è dato da:

$$\vec{K}_G = Ap\vec{\imath}_1 + Bq\vec{\jmath}_1 + Cr\vec{k}_1 = A\omega_1\vec{\imath}_1 + C\Omega\vec{k}_1$$

mentre il vettore $\vec{\omega}$ della (37), che, si ricordi, rappresenta la velocità angolare con cui ruota la terna mobile, sarà espresso solamente da $\vec{\omega} = \Omega\vec{k}$.
Avremo quindi:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_G = \begin{vmatrix} \vec{\imath}_1 & \vec{\jmath}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \Omega \\ A\omega_1 & 0 & C\Omega \end{vmatrix} = A\omega_1\Omega\vec{\jmath}_1 = -A\frac{R}{r}\Omega^2\vec{\jmath}_1$$

e quindi, in definitiva, sostituendo l'espressione di A:

$$\vec{M}'_G = A\frac{R}{r}\Omega^2\vec{\jmath}_1 = m\frac{r^2}{2}\frac{R}{r}\Omega^2\vec{\jmath}_1 = \frac{1}{2}mRr\Omega^2\vec{\jmath}_1 \qquad \textbf{(71)}$$

Quindi il momento risultante delle forze d'inerzia sollecita il disco secondo il versore dell'asse delle y tendendo a far ribaltare il disco stesso verso l'esterno della sua traiettoria.
Questo è lo stesso momento che sollecita la coppia rotoidale in O. Sarebbe infatti:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'} - (G - O) \wedge m\vec{a}_G = \vec{M}_{O'} + (G - O) \wedge \vec{F}' \qquad \textbf{(72)}$$

dove è:

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_G = -m\left(-\Omega^2 R\right)\vec{\imath}_1 = m\Omega^2 R\vec{\imath}_1$$

Quindi $\vec{F}'$ risulta parallelo a (G-O) e quindi è nullo il prodotto vettore a secondo membro della (72).
In effetti, se si fosse scelta la terna mobile con origine in O, anziché in G, avremmo dovuto correggere i momenti d'inerzia B, e C che di fatto non intervengono a formare il risultato ottenuto.
La coppia trovata, $\vec{M}'_G$, prende il nome di coppia giroscopica e si manifesta per il moto di precessione regolare del disco sottoposto contemporaneamente a due rotazioni distinte secondo due assi concorrenti; ha come effetto quello di far aumentare il peso apparente del disco dal lato esterno,

con conseguente aumento della reazione del piano lungo la generatrice di contatto.

CAPITOLO XVIII

DINAMICA APPLICATA

SOMMARIO:

1. Equazioni cardinali.
2. Ricerca delle reazioni vincolari.
3. Energia cinetica.
4. Energia cinetica di un monocilindro.
5. Teorema dell'energia cinetica.
6. Equazione dell'energia.
7. Uniformazione.

Lo studio dinamico di un problema che riguarda le macchine è lo studio degli effetti che tutte le forze, sia quelle agenti negli accoppiamenti, sia quelle d'inerzia, sia quelle, ovviamente, applicate dall'esterno, producono su di esse ed in particolare nei riguardi del moto.
La determinazione di tali effetti richiede che siano imposte le condizioni cui deve soddisfare il sistema delle forze agenti.

§ 1.- Le equazioni cardinali.

Il principio di D'Alembert afferma che il sistema delle forze applicate, attive, reattive e d'inerzia, per un qualsiasi sistema materiale, è un sistema di forze equilibrato.
Ciò vale contemporaneamente sia per un sistema isolato preso nel suo complesso, sia per una sua parte considerata separatamente dal primo.

Sulla base di tale principio, ogni problema di dinamica si trasforma in problema di statica, a patto di aggiungere il sistema delle forze d'inerzia.
Ne seguono, allora, le *equazioni cardinali della dinamica* le quali af-

fermano che, istante per istante, un sistema preso nel suo complesso, ma anche ciascuna sua parte che da esso sia stata enucleata, deve essere in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze; ossia devono contemporaneamente essere verificate le equazioni:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(a)} + \vec{F}^{(v)} + \vec{F}' &= 0 \\ \vec{M}_o^{(a)} + \vec{M}_o^{(v)} + \vec{M}'_o &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Quando queste si applicano ad una parte del sistema, dovranno essere prese in considerazione le forze interne che su detta parte esercitavano quelle adiacenti: di conseguenza, queste, per la parte di cui si studia l'equilibrio, diventano e quindi vanno trattate come forze esterne.
Ricordando poi che è:

$$\vec{F}' = -\frac{d\vec{Q}}{dt}; \qquad \vec{M}'_o = -\frac{d\vec{K}_o}{dt} - \vec{v}_o \wedge \vec{Q};$$

dalle (1) per sostituzione si ottiene il **teorema delle quantità di moto**:

$$\vec{F}^{(a)} + \vec{F}^{(v)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \qquad \textbf{(2)}$$

ed il **teorema del momento delle quantità di moto**:

$$\vec{M}_o^{(a)} + \vec{M}_o^{(v)} = \frac{d\vec{K}_o}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{Q} \qquad \textbf{(3)}$$

Con le equazioni cardinali, o attraverso l'applicazione di tali teoremi, si possono scrivere tante equazioni quante sono i gradi di libertà del sistema in esame e, eliminando le reazioni vincolari incognite, ottenere l'equazione differenziale del moto.
Quando le equazioni pure del moto siano state integrate, e se il problema è staticamente determinato, le stesse equazioni consentono la determinazione delle reazioni vincolari.

Se poi le equazioni cardinali (1) si scrivono nella forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(v)} &= -\vec{F}^{(a)} - \vec{F}' \\ \vec{M}_o^{(v)} &= -\vec{M}_o^{(a)} - \vec{M}'_o \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

si nota bene come una parte delle reazioni vincolari sia causata dalla presenza delle forze attive, mentre una seconda parte (sollecitazione dinamica) sia dovuta alla presenza delle azioni d'inerzia.
In tal senso, un sistema si dirà dinamicamente equilibrato solo se è nullo il risultante $\vec{F}'$ e contemporaneamente il risultante $\vec{M}'_o$.

§ 2.- Ricerca delle reazioni vincolari.

Un disco pieno di raggio r, spessore h, e massa m, (fig.1), è calettato sull'asse O_1O_2 di lunghezza l, in modo tale che la normale al suo piano passante per il baricentro G formi, rispetto all'asse stesso, un angolo α; il baricentro G stia sull'asse di rotazione, supposto indeformabile, ed il sistema ruoti con una velocità angolare ω_1=cost.

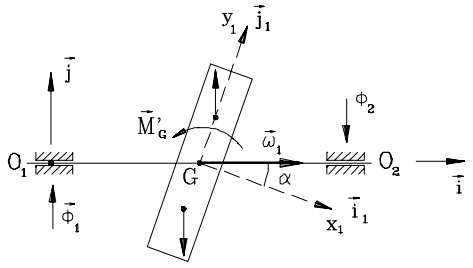


Figura 1

In tali condizioni si vogliono determinare le reazioni vincolari in O_1 e in O_2.

Dovrà essere come visto nel precedente paragrafo:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(v)} &= -\left(\vec{F}^{(a)} + \vec{F}'\right) \\ \vec{M}_o^{(v)} &= -\left(\vec{M}_o^{(a)} + \vec{M}'_o\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Non avendo ipotizzato la presenza di azioni esterne sarà senz'altro $\vec{F}^{(a)} = \vec{M}^{(a)} = 0$, ed inoltre poiché il baricentro coincide con un punto dell'asse di rotazione (considerato indeformabile) sarà anche $\vec{a}_G = 0$ e di conseguenza $\vec{F}' = 0$.

Le (5) si ridurranno pertanto a:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(v)} &= 0 \\ \vec{M}_o^{(v)} &= -\vec{M}'_o \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

da cui emerge subito che il risultante delle reazioni vincolari sarà nullo, e che il momento delle reazioni vincolari sarà causato esclusivamente dal momento risultante delle forze d'inerzia.

Ne segue che quest'ultimo darà luogo, in O_1 e in O_2, a due forze eguali ed opposte che costituiranno una coppia.

Che debba essere necessariamente così si può dedurre osservando che il sistema delle forze d'inerzia cui risulta soggetta ciascuna delle due metà del disco tagliato, nel piano di figura, dall'asse di rotazione può essere ricondotto ai due vettori $\vec{F}'_1 = -m_1\vec{a}_{G_1}$ ed $\vec{F}'_2 = -m_2\vec{a}_{G_2}$, applicati rispettivamente nei punti G_1 e G_2, eguali e di verso opposto; inoltre poiché i punti G_1 e G_2 non sono allineati sulla stessa perpendico-

lare ad O_1O_2 le due forze costituiranno coppia.

Ora, per quanto concerne il calcolo del momento di tale coppia, ossia per il calcolo del momento risultante delle forze d'inerzia (6), converrà scegliere come polo il baricentro G del disco e come assi di riferimento un sistema di assi, solidali al disco stesso, di versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, ed aventi la direzione dei suoi assi principali d'inerzia; con tali ipotesi, la seconda delle (6) si scriverà allora:

$$\vec{M}_G^{(v)} = -\vec{M}'_G = \dot{\vec{K}}_G + \vec{\omega}\Lambda\,\vec{K}_G \qquad \textbf{(7)}$$

Rispetto agli assi prescelti la velocità angolare del disco sarà espressa da:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \cos\alpha\, \vec{i}_1 + \omega_1 \operatorname{sen}\alpha\, \vec{j}_1$$

e quindi le componenti lungo gli assi della terna ausiliaria saranno:

$$p = \omega_1 \cos\alpha$$
$$q = \omega_1 \operatorname{sen}\alpha$$
$$r = 0$$

che sono costanti essendo ω_1=cost e invariabile l'angolo α.

Sarà allora $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$ e quindi anche $\dot{\vec{K}}_G = 0$.

L'espressione del momento delle quantità di moto sarà data da:

$$\vec{K}_G = Ap\vec{i}_1 + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1 =$$
$$= A\omega_1 \cos\alpha\vec{i}_1 + B\omega_1 \operatorname{sen}\alpha\vec{j}_1 = \omega_1\left(A\cos\alpha\vec{i} + B\operatorname{sen}\alpha\vec{j}_1\right)$$

in cui A, B, e C sono, come sempre, i momenti principali d'inerzia del disco.

D'altra parte le componenti p, q, r, sono anche le componenti della rotazione degli assi solidali al disco e pertanto si avrà:

$$\omega\Lambda\vec{K}_G = \omega_1^2 \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ A\cos\alpha & B\operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_1^2(B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\vec{k}_1 = \frac{1}{2}\omega_1^2(B-A)\operatorname{sen}2\alpha\,\vec{k}_1$$

E' quindi risulta proprio:

$$\vec{M}_G^{(v)} = -\vec{M}'_G = \vec{\omega}\Lambda\vec{K}_G = \frac{1}{2}\omega_1^2(B-A)\operatorname{sen}2\alpha\,\vec{k}_1 \qquad \textbf{(8)}$$

Il momento delle reazioni vincolari ha quindi ha il suo asse orientato, istante per istante, secondo la direzione di $\vec{k}_1$ e quindi le reazioni vinco-

lari in O_1 e in O_2 dovranno essere due vettori eguali ed opposti ($\vec{F}^{(v)} = 0$) e giacenti nel piano $\vec{i}_1\vec{j}_1$.

Rimane da definire il verso del vettore momento che rimane legato al segno della differenza (B-A).

Per un disco di raggio r e spessore h, i momenti principali d'inerzia sono:

$$A = m\frac{r^2}{2}\ ; \qquad B = C = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right)$$

e quindi è:

$$B - A = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right) - m\frac{r^2}{2} = \frac{m}{12}\left(h^2 - 3r^2\right)$$

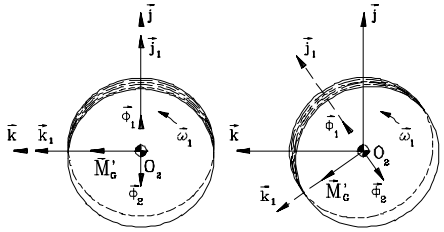
Quindi la (8) è in definitiva:

$$\vec{M}_G^{(v)} = -\vec{M}'_G = \vec{\omega}\Lambda\vec{K}_G = \frac{m}{24}\left(h^2 - 3r^2\right)\omega_1^2 \operatorname{sen} 2\alpha\, \vec{k}_1 \qquad \textbf{(8')}$$

Il verso del vettore momento dipende dal segno della differenza (h^2-$3r^2$) e quindi dalla geometria del disco.

Si deduce, in particolare, che il verso del vettore momento sarà positivo o negativo a seconda se è rispettivamente $h > \sqrt{3}\, r$ oppure $h < \sqrt{3}\, r$; in altre parole, il momento risultante delle forze d'inerzia, per un cilindro di piccolo spessore rispetto al raggio (disco), tenderà ad annullare l'angolo α, mentre per un cilindro di grosso spessore (rullo) tenderà ad esaltarlo.

Figura 2



D'altra parte, in virtù dell'ipotesi di indeformabilità dell'asse di rotazione, gli assi delle coppie rotoidali in O_1 ed O_2 coincidono con l'asse stesso e le reazioni vincolari quindi staranno in piani perpendicolari a questo; per cui è:

$$M_G^{(v)}\vec{k}_1 = \Phi\, l\, \vec{k}_1$$

se indichiamo con l la lunghezza dell'albero e con Φ il modulo della reazione vincolare; quest'ultima sarà comunque un vettore rotante (fig. 2) con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}_1$ del disco.

Dalla (8') avremo quindi, nel riferimento fisso:

$$\vec{\Phi}_{O_1} \times \vec{j} = -\vec{\Phi}_{O_2} \times \vec{j} = \frac{m}{24l}\omega_1^2\left(3r^2 - h^2\right)\operatorname{sen} 2\alpha \cos\left(\omega_1 t\right)\vec{j}$$

$$\vec{\Phi}_{O_1} \times \vec{k} = -\vec{\Phi}_{O_2} \times \vec{k} = \frac{m}{24l}\omega_1^2\left(3r^2 - h^2\right)\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\left(\omega_1 t\right)\vec{k}$$

e ciò mostra come, in definitiva, si generino sui sopporti delle sollecitazioni variabili nel tempo con legge sinusoidale capaci, quindi, di indurre delle vibrazioni.

§ 3. - Energia cinetica.

Se una massa **puntiforme** m è dotata di una velocità assoluta $\vec{v} \neq 0$, si attribuisce ad essa, istante per istante, l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{9}$$

che è una quantità scalare, **essenzialmente positiva**, salvo negli istanti in cui la velocità risulti nulla.
Trattandosi di una quantità scalare, se un sistema è costituito da n masse puntiformi m_i, esso, nel suo complesso sarà dotato dell'e-nergia cinetica:

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_1^2$$

mentre se il sistema è costituito da un solido, si dovrà scrivere:

$$T = \frac{1}{2}\int_S v^2 dm \tag{10}$$

essendo $\vec{v}$ la velocità assoluta di ciascun punto P del rigido all'istante considerato.
In quest'ultimo caso, tuttavia, si può pervenire (v. Appendice) ad una espressione diversa che tenga conto del moto del rigido nel suo insieme che si scrive:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'pr - 2C'pq\right) + \\ & + m(G - A) \times \left(\vec{v}_A \wedge \vec{\omega}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

La (11) mostra come l'energia cinetica del rigido in questione risulta composta da tre termini: il primo addendo rappresenta l'energia cinetica che il rigido avrebbe se la sua massa fosse tutta concentrata in un punto

A del rigido e si muovesse del solo moto traslatorio di questo; il secondo addendo rappresenta quella che il rigido avrebbe se A fosse fisso ed il moto avvenisse intorno ad esso con velocità angolare $\vec{\omega}$; il terzo addendo è un termine aggiuntivo che dipende contemporaneamente sia dal moto di A che dalla rotazione intorno ad A.

Se, tuttavia, nel calcolo di T, invece di un generico punto A, si sceglie, come punto cui riferire il moto, proprio il suo baricentro G, oppure un punto A che sia fisso, il terzo addendo sarà nullo e la (11) diventa:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'pr - 2C'pq \right) \quad \textbf{(12)}$$

Tale espressione rappresenta il **teorema di König** che dice: "*L'energia cinetica di un sistema materiale qualsiasi può essere espressa come somma dell'energia cinetica dell'intera massa del sistema stesso pensata concentrata nel suo baricentro e dell'energia cinetica che avrebbe nel moto rispetto al baricentro*".
Se, inoltre, invece di un riferimento qualsiasi, si sceglie quello costituito dagli assi principali d'inerzia del rigido, allora saranno nulli anche i momenti di deviazione A', B', C'.
Aggiungendo anche questa ulteriore condizione, la (12) si semplifica ancora e si scriverà semplicemente:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \right) \quad \textbf{(13)}$$

Sia per la (12) che per la (13) vale, infine, la forma ancora più sintetica che si ottiene ricordando l'espressione della quantità di moto e del momento della quantità di moto per un rigido e che p, q, ed r sono le componenti della rotazione $\vec{\omega}$ del rigido. Si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{v}_G \times \left(m\vec{v}_G \right) + \frac{1}{2}\left(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \right) \times \vec{K}_G = \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{v}_G \times \vec{Q} + \vec{\omega} \times \vec{K}_G \right) \end{aligned} \quad \textbf{(14)}$$

Ricordando che le derivate rispetto al tempo cambiate di segno della quantità di moto e del momento della quantità di moto sono rispettivamente il risultante ed il momento risultante delle forze d'inerzia, è chiaro lo stretto legame esistente fra l'energia cinetica posseduta dal rigido e le azioni di inerzia connesse al moto cui esso è soggetto.

In generale per un sistema materiale qualsiasi ad n gradi di libertà, i cui vincoli siano tutti di posizione e bilaterali *(sistema olonomo)*, e la cui configurazione risulti definita dalle coordinate lagrangiane q_h l'energia cinetica risulta espressa da una funzione razionale intera delle

$\dot{q}_h$, con coefficienti che dipendono solamente dalle q_h e dal tempo, t; si ottiene cioè una espressione del tipo:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_h b_h\dot{q}_h + T_0 \qquad \textbf{(15)}$$

Nel caso particolare in cui si abbia a che fare con un sistema i cui **vincoli** siano **indipendenti dal tempo**, tutte le b_h e la T_0 sono nulle, e l'espressione precedente si riduce solamente a:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k \qquad \textbf{(16)}$$

che è una funzione quadratica omogenea delle q_h definita positiva (essendo T>0).

Dalla espressione della energia cinetica di un sistema qualsiasi è possibile ricavare una importante proprietà.
Se si deriva rispetto al tempo l'energia cinetica scritta per un sistema di masse puntiformi, si ottiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{v}_i \qquad \textbf{(17)}$$

ed allora, poiché è: $\vec{F}_i' = -m_i\vec{a}_i$, dalla (17) si ricava:

$$dT = -\sum_i \vec{F}_i' \times \vec{v}_i dt = -dL' \qquad \textbf{(18)}$$

che mostra come **il lavoro delle forze d'inerzia, cambiato di segno, è sempre uguale alla variazione di energia cinetica del sistema**.
Se il sistema di cui trattasi è un sistema rigido, di cui sia O un generico punto, si ha dalla (17), analogamente:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i \times \left[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \left(P_i - O\right)\right] =$$
$$= \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{v}_O + \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{\omega} \wedge \left(P_i - O\right)$$

e questa, se si tiene conto delle proprietà del prodotto misto, equivale a:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{v}_O + \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{\omega} \wedge \left(P_i - O\right) =$$
$$= \sum_i m_i\vec{a}_i \times \vec{v}_O + \sum_i \left(P_i - O\right) \wedge m_i\vec{a}_i \times \vec{\omega} =$$
$$= -\vec{F}' \times \vec{v}_O - \vec{M}'_O \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \times \vec{v}_O + \left(\frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{v}_O \wedge \vec{Q}\right) \times \vec{\omega}$$

da cui si riconosce ancora che è:

$$dT = -\vec{F}'\times\vec{v}_O dt - \vec{M}'_O\times\vec{\omega}dt = -dL' \qquad \textbf{(19)}$$

Se poi, invece che al generico punto O, si è fatto riferimento al baricentro G, la (19) sarà da scrivere come:

$$dT = -\vec{F}'\times\vec{v}_G dt - \vec{M}'_G\times\vec{\omega}dt = -dL'$$

con la semplificazione della espressione del momento delle quantità di moto.

Se l'energia cinetica del sistema è espressa nella forma (16), il lavoro delle forze d'inerzia, per uno spostamento virtuale qualsiasi, corrispondente alla generica coordinata lagrangiana q_h,con le precedenti ipotesi, sarà dato da:

$$\delta L'_i = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right)\delta q_h \qquad \textbf{(20)}$$

in cui compare la componente lagrangiana delle forze d'inerzia relativa alla coordinata q_h:

$$Q'_i = \frac{\delta L'_i}{\delta q_h} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) \qquad \textbf{(21)}$$

§ 4 .- Energia cinetica di un monocilindro.

Calcoliamo, ora, l'energia cinetica per un monocilindro, schematizzato come il manovellismo di spinta di fig.3, di cui sia: I_m il momento d'inerzia del-la manovella, e di tutte le masse ad essa solidali, rispetto all'asse per O_1; I_b il momento d'inerzia della biella, di massa m_b, rispetto all'asse passante per il suo baricentro G; m_s la massa dello stantuffo e di tutte le masse che con esse si muovono

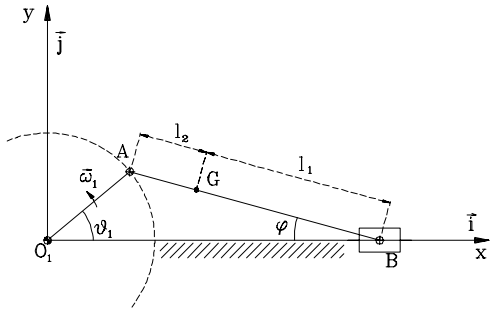


Figura 3

di moto alterno. Per quanto detto, l'energia cinetica del meccanismo sarà data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli membri e pertanto sarà:

$$T = T_m + T_b + T_s \tag{22}$$

avendo indicato rispettivamente con i termini a secondo membro l'energia cinetica della manovella, della biella e dello stantuffo.

La **manovella** è un rigido che si muove, con velocità angolare ϖ, intorno ad un asse fisso di versore $\vec{k}$, coincidente peraltro con uno dei suoi assi principali d'inerzia; nella (12), pertanto, sarà nullo il primo e l'ultimo termine, mentre nel secondo si ha da porre p=q=0 ed anche A'=B'=C'=0 scegliendo come terno di riferimento proprio la terna principale d'inerzia del rigido.
La sua energia cinetica sarà espressa allora da:

$$T_m = \frac{1}{2} C r^2 = \frac{1}{2} I_m \omega_1^{\,2} \tag{23}$$

La **biella** è un rigido in moto rototraslatorio piano intorno ad un asse, di versore $\vec{k}$ e coincidente, anche qui, con uno dei suoi assi principali d'inerzia; può applicarsi il teorema di König, con p=q=0 ed A'=B'=C'=0, e scrivere:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b v_G^{\,2} + \frac{1}{2} I_b \omega^2 \tag{24}$$

Infine per lo **stantuffo**, che si muove di moto traslatorio sarà solamente:

$$T_s = \frac{1}{2} m_s v_B^2 \tag{25}$$

La (22), allora, si scriverà:

$$T = \frac{1}{2} I_m \omega_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_b v_G^{\,2} + \frac{1}{2} I_b \omega^2 + \frac{1}{2} m_s v_B^{\,2} \tag{26}$$

Questa espressione, poiché il meccanismo ha un solo grado di libertà, può essere ricondotta ad una funzione di un unica coordinata lagrangiana; scegliendo come tale l'angolo di manovella ϑ_1, si tratterà di esprimere in funzione di questa variabile le espressioni di v_G, ω, e v_B.
Per la velocità del baricentro G della biella possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x_G = r_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\varphi \\ y_G = r_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - l_2 \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

e quindi, ricordando che:

$$\operatorname{sen}\varphi = -\lambda \operatorname{sen}\vartheta_1 \tag{27}$$

ed utilizzando la seconda approssimazione, avremo:

$$\begin{cases} x_G = r_1 \cos\vartheta_1 + l_2\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta_1\right) \\ y_G = r_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - l_2\lambda\ \operatorname{sen}\vartheta_1 = l_1\lambda\ \operatorname{sen}\vartheta_1 \end{cases}$$

Queste, derivate rispetto al tempo, danno:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = -\omega_1 r_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - \omega_1 \dfrac{\lambda^2}{2} l_2 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 = \\ \qquad = -\omega_1 r_1\left(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \dfrac{\lambda\, l_2}{2l}\operatorname{sen} 2\vartheta_1\right) \\ \dot{y}_G = l_1\lambda\ \omega_1 \cos\vartheta_1 = \omega_1 r_1 \dfrac{l_1}{l}\cos\vartheta_1 \end{cases}$$

ed allora:

$$\begin{aligned} & v_G{}^2 = \dot{x}_G{}^2 + \dot{y}_G{}^2 = \\ & = \omega_1^2 r_1^2 \left(\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2\vartheta_1 + \dfrac{\lambda\, l_2}{l}\operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \dfrac{\lambda^2 l_2^2}{4l^2}\operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 \\ + \dfrac{l_1^2}{l^2}\cos^2\vartheta_1 \end{array} \right) \end{aligned} \qquad \textbf{(28)}$$

Derivando la (27) rispetto al tempo ed elevando al quadrato si ottiene il quadrato della velocità angolare della biella, nella forma:

$$\begin{aligned} & \omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\omega_1\lambda\frac{\cos\vartheta_1}{\cos\varphi} \cong -\omega_1\lambda\cos\vartheta_1 \\ & \omega^2 \cong \omega_1^2\lambda^2\cos^2\vartheta_1 \cong \omega_1^2 r_1^2\frac{1}{l^2}\cos^2\vartheta_1 \end{aligned} \qquad \textbf{(29)}$$

Allora, ricordando che si è già posto $m'_b = m_b\, l_1/l$; $m''_b = m_b\, l_2/l$, la (24) si potrà scrivere come:

$$T_b = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \left(m_b r_1^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_1 + m''_b\ \lambda\, r_1^2 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \right. \\ + r_1 l_1 \lambda\, m'_b \cos^2\vartheta_1 + \dfrac{\lambda^3}{4} r_1 l_2 m''_b \operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 + \\ \left. + I_b\lambda^2\cos^2\vartheta_1 \right) \end{array} \right)\omega_1^2 \qquad \textbf{(30)}$$

Per lo stantuffo, basterà ricordare dalla analisi cinematica già svolta, che in seconda approssimazione, è:

$$v_B = -\omega_1 r_1 \left(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta_1 \right)$$

ed, elevando al quadrato, sostituire nella (31), ottenendo:

$$T_s = \frac{1}{2} m_s r_1^2 \left(\operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + \lambda \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 \right) \omega_1^2 \qquad \textbf{(31)}$$

Sommando la (23), la (30) e la (31), si ottiene per l'energia cinetica del monocilindro (v. Appendice) una forma del tipo:

$$T = \frac{1}{2} \mathrm{a}(\theta_1) \omega_1^2 \qquad \textbf{(32)}$$

in cui è:

$$\mathrm{a}(\theta_1) = A_0 + A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos 2\theta_1 + A_3 \cos 3\theta_1 + A_4 \cos 4\theta_1$$

con i coefficienti:

$$A_0 = I_m + \frac{1}{2}\left[\lambda^2 \left(I_b + m_b l_1^2\right) + r_1^2 \left(m_b + m_s\right)\right] + \frac{1}{8}\lambda^4 \left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\lambda r_1^2 \left(m''_b + m_s\right); \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[\lambda^2 \left(I_b + m_b l_1^2\right) - r_1^2 \left(m_b + m_s\right)\right]$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\lambda r_1^2 \left(m''_b + m_s\right); \qquad A_4 = -\frac{1}{8}\lambda^4 \left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right)$$

Si noti che la (32) è proprio della forma della (16), come doveva essere. Infatti il monocilindro ha vincoli indipendenti dal tempo, ed inoltre, ha un solo grado di libertà la cui coordinata lagrangiana è $q_1 = \vartheta_1$ con $\dot{q}_1 = \omega_1$.

La componente lagrangiana delle forze d'inerzia può essere quindi calcolata direttamente dalla (32), essendo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = a(\vartheta_1)\ \omega_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2$$

Da qui, se si suppone che sia ω_1=cost, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_1} = \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}t} \omega_1 = \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\vartheta_1} \frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{\mathrm{d}t} \omega_1 = \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\vartheta_1} \omega_1^2$$

e pertanto:

$$Q' = -\left(\frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2$$

Il lavoro delle forze d'inerzia, se ω_1=cost, sarà data allora da:

$$\frac{dL'}{dt} = Q' \frac{dq_1}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{da(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} \omega_1^2 \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{da(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} \omega_1^3 = -\frac{dT}{dt} \quad \textbf{(33)}$$

Se invece non è ω_1=cost, dovrà essere:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{q}_1} = a(\vartheta_1)\omega_1 + \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}t} \omega_1 = \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 + a(\vartheta_1)\omega_1$$

e quindi, per la componente lagrangiana delle forze d'inerzia:

$$Q' = -\left(\frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 + a(\vartheta_1)\omega_1 - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 \right)$$

ossia:

$$Q' = -\left(a(\vartheta_1)\omega_1 + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}a(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\,\vartheta_1} \omega_1^2 \right)$$

In definitiva sarà quindi:

$$\frac{dL'}{dt} = Q' \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\left(a(\vartheta_1)\omega_1 + \frac{1}{2} \frac{da(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} \omega_1^2 \right) \omega_1 = -\frac{dT}{dt} \quad \textbf{(34)}$$

§ 5. - Teorema dell'energia cinetica.

Da quanto visto nel precedente paragrafo (18) discende uno dei più importanti teoremi della meccanica; non avendo nessun riscontro in corrispondenti teoremi della statica, vi riveste un ruolo del tutto particolare e prescinde da ogni distinzione delle forze in forze esterne o interne. Consideriamo un sistema costituito, per semplicità, da n punti materiali P_i ciascuno in moto con velocità $\vec{v}_i$; per ciascuno di essi deve sussistere l'equilibrio fra le forze attive, le forze reattive e la forza d'inerzia.
Deve cioè essere:

$$\vec{F}_i^{(a)} + \vec{\Phi}_i^{(v)} + \vec{F}'_i = 0$$

Se moltiplichiamo la (45) per lo spostamento elementare $\mathbf{v}_i dt$ del punto, otterremo:

$$\vec{F}_i^{(a)} \times \vec{v}_i dt + \vec{\Phi}_i^{(v)} \times \vec{v}_i dt + \vec{F}'_i \times \vec{v}_i dt = 0$$

in cui ciascun addendo rappresenta il lavoro elementare compiuto da ciascuna forza; si potrà quindi scrivere anche:

$$dL_i^{(a)} + dL_i^{(v)} + dL_i^{'} = 0$$

Allora, poiché, come si è visto (18), $dL' = -dT$, si potrà scrivere anche:

$$dL_i^{(a)} + dL_i^{(v)} = dT_i$$

Trattandosi di grandezze scalari, l'estensione alle n masse del sistema porta naturalmente a scrivere:

$$dL^{(a)} + dL^{(v)} = dT \qquad \textbf{(35)}$$

che costituisce il **teorema dell'energia cinetica** e che ci dice che *istante per istante il lavoro elementare effettivo di tutte le forze applicate ad un sistema, siano esse attive o reattive, interne o esterne, è uguale alla variazione dell'energia cinetica del sistema stesso*.

E' importante sottolineare che, a differenza del teorema delle quantità di moto e del teorema del momento delle quantità di moto, in questo teorema, per il modo in cui è stato ottenuto**, intervengono anche le forze interne con il loro lavoro**, lavoro che, in generale non è nullo.

Se, poi, i vincoli sono privi di attrito e indipendenti dal tempo sarà nullo il lavoro delle reazioni vincolari, e l'equazione stessa costituisce una equazione pura del moto.

Tuttavia per avere ciò è necessario che entrambe queste due condizioni siano verificate perché l'assenza di attrito non è condizione sufficiente perché sia $dL^{(v)}=0$; infatti se il vincolo è mobile il lavoro della reazione vincolare non sarà nullo.

Un'altra osservazione importante è quella che non compare il lavoro delle forze interne dovute alla rigidità; e ciò perché per questo particolare sistema di forze è nullo sia il risultante che il momento risultante.

Inoltre se oltre alla circostanza che sia $dL^{(v)}=0$, ricorre anche l'ulteriore condizione che le forze attive sono tutte conservative ($dL^{(a)}=-dU$), e quindi ammettono un potenziale U, la (35) si riduce a:

$$-dU = dT$$

ovvero:

$$d(T+U) = 0 \qquad \textbf{(36)}$$

Si ottiene allora:

$$T + U = \text{cost} = E \qquad \textbf{(37)}$$

che rappresenta **l'integrale primo dell'energia cinetica**.

§ 6. - Equazione dell'energia.

Consideriamo un sistema meccanico qualsiasi, cui siano applicate delle forze esterne $\vec{F}^{(e)}$ e che possegga una energia interna (elastica, termica, ecc.) complessivamente pari ad U.
A detto sistema possiamo fornire dall'esterno una certa quantità di energia E, di qualsiasi tipo.

Nell'intervallo di tempo dt, le forze esterne applicate al sistema compiranno allora il lavoro elementare $dL^{(e)}$ e la sua energia interna varierà di dU; nello stesso tempo, l'energia cinetica del sistema subirà una variazione dT.
Per il principio di conservazione dell'energia dovrà essere:

$$dE + dL^{(e)} = d(T + U) \qquad \textbf{(38)}$$

e ciò esprime il fatto che *il flusso totale di energia, di qualsiasi natura, che viene fornita dall'esterno al sistema, deve essere uguale alla variazione della sua energia totale* (interna e cinetica).
Questo è il teorema dell'energia, in generale.

a) Se, in particolare, dE rappresenta una quantità di calore dQ fornita al sistema dall'esterno la (38) riporta al **I principio della termodinamica;** infatti se il sistema è in quiete, come generalmente si ha in quel contesto, o è comunque possibile ammettere che sia dT=0, la (38) si scriverà:

$$dQ = -dL^{(e)} + dU$$

b) D'altra parte, se il sistema meccanico è costituito soltanto da membri rigidi, o che comunque possono essere considerati incomprimibili, dE=dU=0, dovrà comunque essere per il teorema dell'energia cinetica:

$$dL^{(e)} + dL^{(i)} = dT \qquad \textbf{(39)}$$

Se poi immaginiamo che il lavoro, $dL^{(i)}$, fatto dalle forze interne deriva in parte dal lavoro compiuto dalle resistenze passive, $dL_w^{(i)}$, e in parte dal lavoro fatto da altre forze interne che ammettano il potenziale U^* e per cui è, quindi, $dL_U^{(i)} = -dU^*$, la (39) si scriverà:

$$dL^{(e)} + dL^{(i)} = dL^{(e)} + dL_w^{(i)} + dL_U^{(i)} = dL^{(e)} + dL_w^{(i)} - dU^* = dT$$

oppure anche:

$$dL^{(e)} + dL_w^{(i)} = d\left(T + U^*\right) \tag{40}$$

In tali ipotesi, se il lavoro dissipato è nullo, per cui $dL_w^{(i)} = 0$, e se tutte le forze interne ed esterne sono conservative, di modo che sia:

$$dL^{(e)} + dL_U^{(i)} = -dU$$

dalla (40) si ha d(T+U)=0 e quindi *l'integrale primo dell'energia* per i sistemi conservativi:

$$T + U = \text{cost}$$

c) Se, infine, sostituiamo la (40) nella (38) otteniamo:

$$dE + d\left(T + U^*\right) - dL_w^{(i)} = d(T + U)$$

e cioè:

$$dE = dL_w^{(i)} + d\left(U - U^*\right) \tag{41}$$

Ciò mostra che se si apporta energia dall'esterno ad un sistema meccanico, per il quale risulti già verificato il teorema dell'energia cinetica, essa non andrà ad incrementare l'energia cinetica del sistema stesso ma andrà ad incrementare solamente l'energia dissipata e ad aumentare il livello di energia correlato a forze interne di varia natura, con esclusione di quelle che ammettono potenziale.

Nello studio dinamico delle macchine è possibile avere l'equazione pura del moto attraverso l'applicazione dell'equazione dell'energia solo se il sistema di cui si vuole studiare il moto ha un solo grado di libertà e se i vincoli sono indipendenti dal tempo e privi di attrito.

Tra queste condizioni, generalmente le prime due sono facilmente soddi-sfatte, mentre la terza è una semplice astrazione.

Solo quando si abbia a che fare con attrito di tipo viscoso, esprimibile con una relazione a coefficienti noti in funzione della velocità relativa fra i punti di contatto, è possibile pervenire ugualmente alla equazione pura del moto.

In questo caso, infatti, si potrà scrivere per il lavoro elementare dissipato per attrito:

$$\mathrm{dL}_{\mathrm{w}}^{(i)} = -\left(\beta\, q\right) q dt = -\beta\, q^2 dt$$

essendo q la coordinata lagrangiana che definisce la configurazione del sistema.

D'altra parte, il lavoro delle forze esterne si suole distinguere in lavoro motore, $\mathrm{dL}_{\mathrm{m}}^{(e)}$, quello che produce il moto della macchina e in lavoro re-

sistente utile, $dL_u^{(e)}$, quello che dalla macchina si vuole ottenere; e in termini delle corrispondenti componenti lagrangiane sarà:

$$dL_m^{(e)} = Q_m dq = Q_m q dt \qquad dL_u^{(e)} = Q_u dq = Q_u q dt \qquad \textbf{(42)}$$

in cui Q_m e Q_u sono, in generale, funzioni di q e di $\dot{q}$.

Se poi sul sistema agiscono anche delle forze interne di tipo conservativo, il loro lavoro può essere messo in conto scrivendo:

$$dL_U^{(i)} = -dU^* = Q^* dq = Q^* \dot{q} dt \qquad \textbf{(43)}$$

Per la (39) dovrà allora essere:

$$dL_m^{(e)} + dL_u^{(e)} + dL_U^{(i)} + dL_w^{(i)} = dT$$

in cui T sarà sempre del tipo:

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

e quindi:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dq}\dot{q} = \left[a(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da(q)}{dq}\dot{q}^2 \right]\dot{q}$$

In termini di componenti lagrangiane, si può allora scrivere:

$$Q_m \dot{q} + Q_u \dot{q} + Q^* \dot{q} - \beta \dot{q}^2 = Q' \dot{q} = \frac{dT}{dq}\dot{q} \qquad \textbf{(44)}$$

ossia:

$$Q_m + Q_u + Q^* - \beta \dot{q} = \frac{dT}{dq} = a(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da(q)}{dq}\dot{q}^2 \qquad \textbf{(45)}$$

in cui Q_m e Q_u sono funzioni note di q e di $\dot{q}$, mentre β, a(q), e Q^* sono funzioni note della sola q.

La (45) costituisce **l'equazione differenziale pura del moto della macchina**.

Rimane da aggiungere, come considerazione aggiuntiva, che il prendere in esame il funzionamento di una macchina in condizioni ideali di attrito nullo è spesso utile: consente, infatti , di poter calcolare in modo abbastanza semplice sia le azioni d'inerzia sia le forze che si trasmettono i vari membri della macchina stessa.

Ancora, se può ritenersi ragionevolmente verosimile che l'effetto dell'attrito sia di modesta entità rispetto alle altre forze in gioco, è ancora possibile, con sufficiente approssimazione, calcolare il cor-

rispondente lavoro perduto sulla base delle forze normali di contatto calcolate in condizioni ideali.

Le forze di contatto reali, di contro, possono essere calcolate dall'equilibrio dei singoli membri, in funzione delle forze attive e delle azioni d'inerzia ottenute in condizioni ideali.

§ 7. - Uniformazione.

Consideriamo un motore monocilindro (fig.4) in cui la pressione agente sullo stantuffo, di superficie S, sia ($p-p_e$), e sia C_r la coppia resistente (utile) applicata all'albero di manovella, mentre si considera nullo l'attrito negli accoppiamenti ed assente qualsiasi altra causa di perdita.

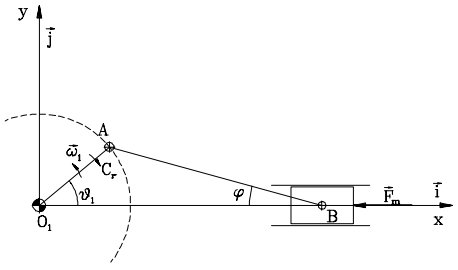


Figura 4

Il sistema ha un solo grado di libertà e scegliamo come coordinata lagrangiana q l'angolo di manovella ϑ_1; sia p che C_r sono quindi funzioni di ϑ_1; sarà cioè $p=p(\vartheta_1)$ e $C_r=C_r(\vartheta_1)$.

Calcoliamo le componenti lagrangiane delle forze attive.

La forza motrice agente sullo stantuffo sarà da scrivere come:

$$F_m\,\vec{i} = -(p-p_e)S\,\vec{i} \tag{46}$$

diretta lungo l'asse delle x e tale che sia comunque $\vec{F}_m \times \vec{x} > 0$.

Pertanto la componente lagrangiana della forza motrice Q_m e quella della forza resistente utile, Q_u, saranno:

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{dL_m^{(e)}}{dq} = -\left(p-p_e\right)S\frac{dx_S}{d\vartheta_1} \\ Q_u &= \frac{dL_u^{(e)}}{dq} = -\frac{C_r d\vartheta_1}{d\vartheta_1} = -C_r \end{aligned} \tag{47}$$

Ed allora, essendo:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{dx_s}{d\vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{dx_s}{d\vartheta_1}\omega_1$$

possiamo pure ricavare, utilizzando gli sviluppi in seconda approssimazione:

$$\frac{dx_s}{d\vartheta_1} = \frac{v_B}{\omega_1} = -r_1\left(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}2\vartheta_1\right) \qquad \textbf{(48)}$$

Le (47) diventano quindi:

$$\begin{aligned} Q_m &= C_m(\vartheta_1) = (p - p_e)Sr_1\left(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}2\vartheta_1\right) \\ Q_u &= C_r(\vartheta_1) = -C_r \end{aligned} \qquad \textbf{(49)}$$

Si è pure trovata, precedentemente, l'espressione dell'energia cinetica:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}a(\vartheta_1)\omega_1^2$$

dove, come già visto al § 4, è:

$$a(\vartheta_1) = A_0 + A_1\cos\vartheta_1 + A_2\cos 2\vartheta_1 + A_3\cos 3\vartheta_1$$

La componente lagrangiana dT/dq si scrive, quindi (v.§ prec.), come:

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\vartheta_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta_1}\left[a(\vartheta_1)\omega_1^2\right] \qquad \textbf{(50)}$$

Dovendo ora essere, per la (45):

$$Q_m + Q_u = \frac{dT}{d\vartheta_1} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta_1}\left[a(\vartheta_1)\omega_1^2\right]$$

ed osservando che sia Q_m che Q_u dipendono soltanto da ϑ_1, si può scrivere l'equazione del moto:

$$2Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 = d\left[a(\vartheta_1)\omega_1^2\right] \qquad \textbf{(51)}$$

avendo posto $Q(\vartheta_1)=Q_m+ Q_u$.
La (51) si può facilmente integrare (v. Appendice), ponendo per esempio, come condizioni iniziali, che sia, per $\vartheta_1=0$, $\omega_1=\omega_0$, e ottenendo quindi:

$$2\int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 = a(\vartheta_1)\omega_1^2 - a(0)\omega_0^2 \qquad \textbf{(52)}$$

dove:

$$a(0) = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

è il valore assunto dalla $a(\vartheta_1)$ per $\vartheta_1=0$.

Dalla (52) si ottiene quindi:

$$\omega_1^2(\vartheta_1) = \frac{2\int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1}{a(\vartheta_1)} + \frac{a(0)}{a(\vartheta_1)}\omega_0^2 \cap f(\vartheta_1) \qquad \textbf{(53)}$$

che è ancora una funzione di ϑ_1.
Da questa, inoltre, poiché è $\omega_1 = d\vartheta_1/dt$ è pure facile ricavare, ipotizzando che sia ϑ_1=0 per t=0, la funzione t=t(ϑ_1) ossia:

$$t = \int_0^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{\omega_1(\vartheta_1)} \qquad \textbf{(54)}$$

che consente infine di avere la legge di variazione della velocità angolare in funzione del tempo.

Ora, fin qui non è stata fatta nessuna ipotesi circa il modo di variare delle funzioni ($p-p_e$) e della C_r e quindi non può dirsi nulla su quale possa essere l'andamento, nel tempo, della funzione $\omega_1(\theta_1)$.
Ciò che però è certo è che, se la macchina è a regime, la sua velocità angolare, o dovrà essere costante oppure dovrà variare ma **in modo periodico**, ossia in modo tale da riassumere sempre il medesimo valore dopo una data rotazione che si può indicare con Θ: dovrà cioè essere, necessariamente, o ω_1=cost oppure $\omega_1(\vartheta_1) = \omega_1(\vartheta_1 + \Theta)$.

Tuttavia è più verosimile la seconda ipotesi dal momento che tutte le funzioni che concorrono a determinare la variazione di ω_1, [$p(\vartheta_1)$, $C_r(\vartheta_1)$, $a(\vartheta_1)$], sono generalmente periodiche.
Affinché la $\omega_1(\vartheta_1)$ sia periodica, dalla (53) discende che, al termine di una rotazione Θ della manovella, deve essere:

$$\omega_1^2(\Theta) = \frac{a(0)}{a(\Theta)}\omega_0^2$$

e perché ciò sia possibile, dal momento che la $a(\vartheta_1)$ è sicuramente periodica, dovrà essere:

$$\int_0^{\Theta} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 = 0 \qquad \textbf{(55)}$$

ossia:

$$\int_0^{\Theta} Q_m(\vartheta_1)d\vartheta_1 = \int_0^{\Theta} Q_u(\vartheta_1)d\vartheta_1 \qquad \textbf{(56)}$$

cioè che, **nel periodo angolare Θ il lavoro compiuto dalle forze motrici deve essere uguale al lavoro compiuto dalle forze resistenti**.
Verificato ciò, si avrà anche:

$$\int_0^{\Theta} \frac{d\vartheta_1}{\omega_1} = \int_{\Theta}^{2\Theta} \frac{d\vartheta_1}{\omega_1} = \int_{2\Theta}^{3\Theta} \frac{d\vartheta_1}{\omega_1} = \cdots = \Delta t$$

e ciò vuol dire che anche la $\omega_1(t)$ sarà temporalmente periodica con il periodo Δt, corrispondente a Θ in termini di angolo, e quindi la macchina ha sicuramente un regime di funzionamento periodico: **la variazione di energia cinetica è nulla in ogni intervallo di tempo pari al periodo** e *le variazioni di velocità angolare ci saranno solamente all'interno del periodo*.

Per una macchina a regime periodico, nelle condizioni di funzionamento a regime, si definisce il grado di irregolarità periodica *I* come il rapporto tra lo scarto fra le velocità angolari massima e minima nel periodo e la velocità angolare media nello stesso intervallo; si scriverà quindi come:

$$I = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \qquad \textbf{(57)}$$

essendo:

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \qquad \textbf{(58)}$$

la velocità angolare media[1].
Si noti che, in base a tale definizione, il valore di *I* sarà, a parità di scarto, tanto più piccolo quanto più elevato è il valore di ω_m.

Il valore ammissibile del grado di irregolarità periodica, *I*, che rappresenta evidentemente l'indice di quanto la velocità angolare della macchina, **durante il compiersi di un periodo**, si allontana dal suo valore medio, dipende esclusivamente dal tipo di macchina in relazione al suo impiego.
Tanto più piccolo dovrà essere il valore di I, quanto più si desidera che l'albero motore dia una velocità angolare pressoché costante nel periodo (per es. nel caso di un motore che trascini un alternatore la cui corrente deve avere una frequenza costante).
E' quindi un primo essenziale problema il poter determinare il valore di *I* per una data macchina.

---

[1] L'espressione (58) è valida se, come nel caso in questione, lo scarto fra le velocità angolari max e min è piccolo; in generale è: $\omega_m = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} \omega(\theta_1)\, d\theta_1$

Sul valore di *I* si può intervenire aggiungendo una massa rotante solidale, in genere, all'albero motore, e che prende il nome di **volano**; essa è conformata in modo da presentare un momento d'inerzia I_V relativamente grande ed ha la funzione di incamerare energia cinetica negli istanti in cui il lavoro motore è in esubero sul lavoro resistente utile per restituirla negli istanti in cui il primo risulta carente rispetto al secondo.

Un secondo problema, altrettanto importante, è, allora, quello di poter calcolare quale debba essere il valore del momento di inerzia J_v che deve avere l'eventuale volano da calettare sull'albero motore per riuscire ad avere il valore desiderato di *I*.

a) Il primo di questi due problemi si può risolvere osservando che la (52) può anche essere scritta come:

$$T=\frac{1}{2}a(\vartheta_1)\omega_1^2(\vartheta_1)=\int_0^{\vartheta_1}Q(\vartheta_1)d\vartheta_1+\frac{1}{2}a(0)\omega_0^2 \qquad \textbf{(57)}$$

e questa espressione mostra chiaramente che l'energia cinetica complessiva della macchina risulta dalla somma di una aliquota costante, il secondo addendo, indipendente cioè dalla configurazione della macchina stessa, e da una aliquota variabile con ϑ_1, il primo addendo; quest'ultimo sicuramente rappresenta pur esso una energia cinetica: rappresenta, in particolare, per ogni configurazione, la variazione di energia cinetica, generata dal lavoro complessivo delle forze esterne che agiscono sul motore, rispetto al livello costante prima indicato.

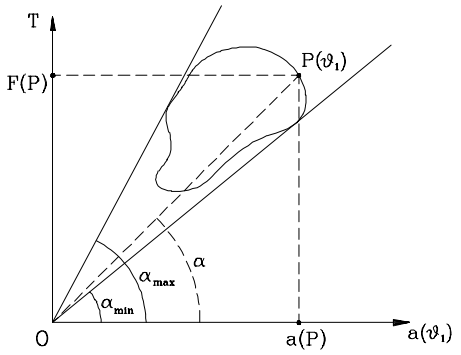


Figura 5

Ora, assegnato il valore di ω_0 corrispondente alla configurazione $\vartheta_1=0$, il valore della (57) può essere calcolato per ogni valore di ϑ_1.
Inoltre se si scrive la stessa (57) nella forma:

$$T=\frac{1}{2}a(\vartheta_1)\omega_1^2(\vartheta_1)=F(\vartheta_1) \qquad \textbf{(58)}$$

avendo posto:

$$F(\vartheta_1)=\int_0^{\vartheta_1}Q(\vartheta_1)d\vartheta_1+\frac{1}{2}a(0)\omega_0^2$$

si vede che il rapporto $F(\vartheta_1)/a(\vartheta_1)$ è proporzionale ad ω_1^2. Pertanto se, per ogni valore di ϑ_1, si riportano in un diagramma cartesiano i punti aventi per ascissa $a(\vartheta_1)$ e per ordinata $F(\vartheta_1)$ si otterrà una punteggiata che prende il nome di **diagramma delle forze vive** (fig.5) (o diagramma di *Wittenbauer*) della macchina in questione, e tale curva, se la macchina è a regime, e quindi vale la (55), e se il rapporto fra il suo periodo Θ e quello della funzione $a(\vartheta_1)$ è razionale, è certamente una curva chiusa. Ciascun suo punto $P(\vartheta_1)$ corrisponde ad una particolare configurazione, nell'ambito del periodo, in cui si avrà un determinato valore a(P) per il momento di inerzia *equivalente* della macchina ed un determinato livello di energia cinetica F(P).
La congiungente OP fra l'origine degli assi ed il generico punto P del diagramma formerà, con l'asse delle ascisse, un angolo α il cui valore è proporzionale ad $\omega_1^2(P)$. Infatti, dalla (58) si ha:

$$\tan\alpha = \frac{F(P)}{a(P)} = \frac{1}{2}\omega_1^2(P) \qquad \textbf{(59)}$$

Se si indicano con α_{max} ed α_{min} i valori degli angoli delle rette che, uscendo da O, risultano tangenti alla curva, rispettivamente nella parte più alta e nella parte più bassa, si avrà ovviamente:

$$\begin{aligned} \tan\alpha_{max} &= \frac{1}{2}\omega_{1\,max}^2 \\ \tan\alpha_{min} &= \frac{1}{2}\omega_{1\,min}^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(60)}$$

Ora, poiché possiamo scrivere:

$$I = \frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_m} = \frac{2\left(\omega_{max}-\omega_{min}\right)}{\omega_{max}+\omega_{min}} = \frac{2\left(\omega_{max}^2-\omega_{min}^2\right)}{\left(\omega_{max}+\omega_{min}\right)^2} =$$
$$= \frac{2\left(\omega_{max}^2-\omega_{min}^2\right)}{\omega_{max}^2+\omega_{min}^2+2\omega_{max}\omega_{min}}$$

sarà anche:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\left(2\tan\alpha_{max}-2\tan\alpha_{min}\right)}{2\tan\alpha_{max}-2\tan\alpha_{min}+4\sqrt{\tan\alpha_{max}\tan\alpha_{min}}} = \\ &= \frac{2\left(\tan\alpha_{max}-\tan\alpha_{min}\right)}{\tan\alpha_{max}-\tan\alpha_{min}+2\sqrt{\tan\alpha_{max}\tan\alpha_{min}}} \end{aligned} \qquad \textbf{(61)}$$

il che consente di risolvere il problema della determinazione del grado

di irregolarità periodica della macchina.
In modo grafico, (fig.6), si può desumere il valore di I osservando che, per un generico valore a di $a(\theta_1)$, l'ordinata di P_1 sulla tangente più bassa vale:

$$s_1 = a\tan\alpha_{\min} = \frac{1}{2}\omega_{\min}^2 a \qquad \textbf{(60')}$$

e l'ordinata di P_2 sulla tangente più alta vale:

$$s_2 = a\tan\alpha_{\max} = \frac{1}{2}\omega_{\max}^2 a \qquad \textbf{(60")}$$

ne segue che l'ordinata del punto medio P_m del segmento P_1P_2 sarà:

$$s_m = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{1}{4}a\left(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2\right)$$

Quindi potremo scrivere:

$$\frac{s_2 - s_1}{2s_m} = \frac{\frac{1}{2}a\left(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2\right)}{2\frac{1}{4}a\left(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2\right)} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2} \qquad \textbf{(61')}$$

Se poi si tiene conto che, dalle (57) e (58) si ottiene:

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \omega_m I; \quad \omega_{\max} + \omega_{\min} = 2\omega_m$$

allora, sommando e sottraendo, si ha:

$$2\omega_{\max} = \omega_m(2 + I)$$
$$2\omega_{\min} = \omega_m(2 - I)$$

e poi:

$$\omega_{\max} = \omega_m\left(1 + \frac{I}{2}\right)$$
$$\omega_{\min} = \omega_m\left(1 - \frac{I}{2}\right)$$

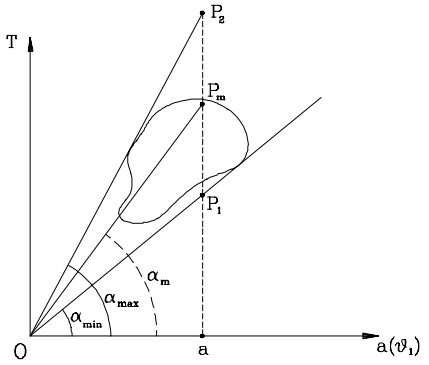


Figura 6

Pertanto, elevando al quadrato, si ha:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_m^2\left(1 + I + \frac{I^2}{4}\right) \cong \omega_m^2(1+I)$$
$$\omega_{\min}^2 = \omega_m^2\left(1 - I + \frac{I^2}{4}\right) \cong \omega_m^2(1-I) \qquad \textbf{(61'')}$$

e quindi:

$$\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2 \cong 2\omega_m^2$$
$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 \cong 2\omega_m^2 I$$

Sostituendo queste ultime nella (61') si ha in definitiva che è proprio:

$$I \cong \frac{s_2 - s_1}{2s_m}$$

b) Il problema del calcolo del momento d'inerzia J_v da assegnare al volano per ottenere il grado di irregolarità periodica, *I*, desiderato, si risolve facilmente quando si tiene presente che il calettamento sull'albero di rotazione della macchina di una massa con un momento di inerzia costante modifica la funzione $a(\vartheta_1)$ in una:

$$a'(\vartheta_1) = a(\vartheta_1) + J_v \qquad \textbf{(62)}$$

Sostituendo nella (57) si dovrà scrivere allora:

$$T = \frac{1}{2}\left[a(\vartheta_1) + J_v\right]\omega_1^2(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 + \frac{1}{2}\left[a(0) + J_v\right]\omega_0^2 \qquad \textbf{(63)}$$

Indicando, allora, con T_0 l'energia cinetica della macchina priva del volano, ossia:

$$T_0 = \frac{1}{2}a(\vartheta_1)\omega_1^2(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 + \frac{1}{2}a(0)\omega_0^2 \qquad \textbf{(63')}$$

si vede che l'aggiunta della massa volanica incrementa il valore di T_0 della quantità:

$$\Delta T = \frac{1}{2}J_v\omega_0^2$$

ossia la (63) é:

$$T = T_0 + \frac{1}{2}J_v\omega_1^2(\vartheta_1)$$

e, analogamente, quindi la funzione $F(\vartheta_1)$ diventa:

$$F'(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 + \frac{1}{2}a(0)\omega_0^2 + \frac{1}{2}J_v\omega_0^2 = F(\vartheta_1) + \frac{1}{2}J_v\omega_0^2 \quad \textbf{(64)}$$

incrementandosi quindi di una quantità costante che, ovviamente, non avrà alcuna influenza sulla forma del diagramma delle forze vive tracciato per la macchina senza volano.

Si comprende allora che la (63), di fatto, rappresenta ancora lo stesso diagramma polare delle forze vive ma (fig.7) tracciato in un sistema di assi la cui origine O' è traslata della quantità J_v sulle ascisse e ΔT sulle ordinate.

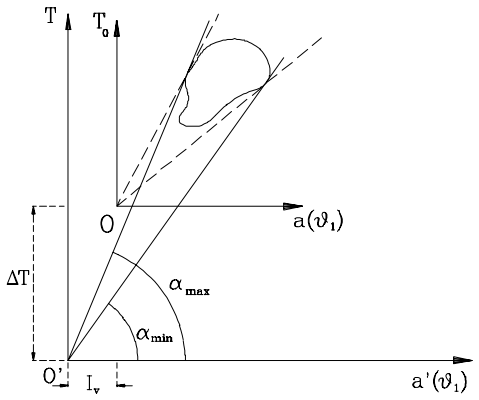


Figura 7

Si può calcolare, allora, la (63') con un valore arbitrario ω_{0n} della velocità angolare iniziale (per esempio la velocità angolare media nominale della macchina), ossia come:

$$T_0 = \frac{1}{2}a(\vartheta_1)\omega_1^2(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} Q(\vartheta_1)d\vartheta_1 + \frac{1}{2}a(0)\omega_{0n}^2 \quad \textbf{(63")}$$

e tracciare il diagramma polare delle forze vive per la macchina senza volano per poi determinare il corretto valore di J_v da assegnare al volano attraverso l'individuazione della nuova origine O' dello stesso diagramma tale che ne risulti il desiderato grado di irregolarità periodica.

A tale scopo possiamo tener presente che, come si è già visto, (61''), è:

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &\cong \omega_m^2(1+I) \\ \omega_{\min}^2 &\cong \omega_m^2(1-I) \end{aligned} \quad \textbf{(65)}$$

e, con i coefficienti angolari corrispondenti a questi valori, tracciare le tangenti al diagramma polare; nella loro intersezione avremo la nuova origine O' del riferimento cartesiano.

La traslazione lungo l'asse delle ascisse sarà il valore J_v cercato, mentre la traslazione lungo l'asse delle ordinate darà l'incremento di energia cinetica ΔT dovuto alla presenza del volano.

Indicando con x_{0M} ed x_{0m}, nel riferimento di T_0, le ascisse dei punti di intersezione delle rette inclinate rispettivamente di α_{max} ed α_{min}, dovrà essere, nel nuovo riferimento con origine O':

$$\Delta T = \left(\mathrm{J}_v + x_{0m}\right)\tan\alpha_{\min} = \left(\mathrm{J}_v + x_{0M}\right)\tan\alpha_{\max} \tag{66}$$

Quindi, tenendo conto delle (65), il valore di J_v sarà dato da:

$$\mathrm{J}_v = \frac{x_{0M}\tan\alpha_{\max} - x_{0m}\tan\alpha_{\min}}{\tan\alpha_{\min} - \tan\alpha_{\max}} = \frac{\left(x_{0m} - x_{0M}\right) - I\left(x_{0m} + x_{0M}\right)}{2I} \tag{67}$$

mentre la (66) diventa:

$$\Delta T = \omega_m^2 \frac{\left(1 + I^2\right)\left(x_{0m} - x_{0M}\right)}{4I} \tag{68}$$

Noti J_v e ΔT, poiché quest'ultimo corrisponde alla differenza fra la (63) e la (63"), ed è quindi:

$$\begin{aligned} \Delta T = T - T_0 &= \frac{1}{2}\mathrm{J}_v\omega_1^2\left(\vartheta_1\right) = \frac{1}{2}\left[a(0) + J_v\right]\omega_0^2 - \frac{1}{2}a(0)\omega_{0n}^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[a(0) + \mathrm{J}_v\right]\omega_0^2 - a(0)\omega_{0n}^2\right\} \end{aligned} \tag{69}$$

si può anche determinare dalla (69) il valore della velocità angolare all'inizio del periodo, ricavando:

$$\omega_0^2 = \frac{2\Delta T + a(0)\omega_{0n}^2}{a(0) + \mathrm{J}_v} \tag{70}$$

e risolvendo così il problema in modo completo.

Appendice

Espressione dell'energia cinetica per il corpo rigido.

Partendo dalla espressione:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_1^2$$

si consideri che per ciascun punto P_i, per la formula fondamentale dei moti rigidi, si può scrivere:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)$$

Si avrà allora:

$$\begin{aligned} v_i^2 = \vec{v}_i \times \vec{v}_i &= \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right] \times \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right] = \\ &= v_A^2 + \left[\vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right]^2 + 2\vec{v}_A \times \left[\vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right] \end{aligned} \quad \textbf{(1)}$$

Se, ora, si indicano con u, v, w, le componenti della velocità $\vec{v}_A$ secondo un riferimento Axyz con origine in A e direzioni degli assi invariabili rispetto al riferimento fisso, e se si indicano con p, q, r, le componenti della velocità angolare $\vec{\omega}$ del rigido rispetto al medesimo riferimento, nella (1) si ha:

$$v_A^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad \textbf{(2)}$$

e poi:

$$\begin{aligned} \left[\vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right]^2 = {} & p^2\left(y_i^2 + z_i^2\right) + q^2\left(x_i^2 + z_i^2\right) + r^2\left(x_i^2 + y_i^2\right) + \\ & - 2qry_i z_i - 2prx_i z_i - 2pqx_i y_i \end{aligned} \quad \textbf{(3)}$$

e infine:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A \times \left[\vec{\omega} \wedge \left(P_i - A\right)\right] &= \left(P_i - A\right) \times \left(\vec{v}_A \wedge \vec{\omega}\right) = \\ &= x_i\left(vr - wq\right) + y_i\left(wp - ur\right) + z_i\left(uq - vp\right) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1), e potendo ora utilizzare l'operazione di integrale al posto

della sommatoria, si ha quindi:

$$T = \frac{1}{2} v_A^2 \int_S dm +$$
$$+ \frac{1}{2} p^2 \int_S (y^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} q^2 \int_S (x^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} r^2 \int_S (x^2 + y^2) dm +$$
$$- qr \int_S yz dm - pr \int_S xz dm - pq \int_S xy dm +$$
$$+ (vr - wq) \int_S x dm + (wp - ur) \int_S y dm + (uq - vp) \int_S x dm$$

dove compaiono i coefficienti:

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int_S (x^2 + z^2) dm; \quad C = \int_S (x^2 + y^2) dm;$$
$$A' = \int_S yz dm; \quad B' = \int_S xz dm; \quad C' = \int_S xy dm;$$

che sono i momenti principali d'inerzia ed i momenti di deviazione del rigido rispetto agli assi prescelti.
D'altra parte, tenendo conto che è:

$$m(G - A) = \int_S x dm \vec{i} + \int_S y dm \vec{j} + \int_S x dm \vec{k}$$

la (1) diventa:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'pr - 2C'pq) + \quad \textbf{(4)}$$
$$+ m(G - A) \times (\vec{v}_A \wedge \vec{\omega})$$

Espressione dell"energia cinetica nel caso generale.

In generale l'espressione dell'energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_h b_h\dot{q}_h + T_0 \qquad \textbf{(5)}$$

Infatti, per un sistema, immaginato costituito da s punti P_i, i vincoli saranno rappresentati dalle n equazioni parametriche:

$$P_i = \mathrm{P_i}\left(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n; t\right)$$

e a ciascun punto compete una velocità data da:

$$\vec{v}_i = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad \textbf{(6)}$$

Pertanto, per la (1), si scriverà:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i\vec{v}_i\times\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h\times\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h\times\frac{\partial P_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)^2\right]$$

che equivale alla (5) se si pone:

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{s} m_i\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\times\frac{\partial P_i}{\partial q_k}; \quad b_h = \sum_{i=1}^{s} m_i\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\times\frac{\partial P_i}{\partial t};$$

$$T_o = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i\left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)^2$$

Energia cinetica del monocilindro

Sommando la (23), la (30) e la (31), si ottiene per l'energia cinetica del monocilindro:

$$T = \frac{1}{2} I_m \omega_1^2 + \\ + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} m_b r_1^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + m''_b \lambda\, r_1^2 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \\ + r_1 l_1 \lambda\, m'_b \cos^2 \vartheta_1 + \frac{\lambda^3}{4} r_1 l_2 m''_b \operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 + \\ + I_b \lambda^2 \cos^2 \vartheta_1 \end{Bmatrix} \omega_1^2 + \\ + \frac{1}{2} m_s r_1^2 \left(\operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + \lambda\, \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 \right) \omega_1^2 = \\ = \frac{1}{2} \mathrm{a}(\vartheta_1) \omega_1^2 \tag{7}$$

ed è, raggruppando i coefficienti:

$$\mathrm{a}(\theta_1) = I_m + r_1^2 \left(m_b + m_s\right) \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + \left(I_b \lambda^2 + r_1 l_1 \lambda\, m'_b\right) \cos^2 \vartheta_1 + \\ + \lambda\, r_1^2 \left(m''_b + m_s\right) \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen} 2\vartheta_1 + \\ + \left(\frac{\lambda^3}{4} r_1 l_2 m''_b + m_s r_1^2 \frac{\lambda^2}{4} \right) \operatorname{sen}^2 2\vartheta_1 = \\ = I_m + r_1^2 \left(m_b + m_s\right) \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + \lambda^2 \left(I_b + m_b l_1^2\right) \cos^2 \vartheta_1 + \\ + \lambda\, r_1^2 \left(m''_b + m_s\right) 2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 \cos\vartheta_1 + \\ + \lambda^4 \left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right) \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_1 = \\ = I_m + b_0 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 + b_1 \cos^2 \vartheta_1 + b_2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 \cos\vartheta_1 + \\ + b_3 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_1 \tag{8}$$

avendo posto:

$$b_0 = r_1^2 \left(m_b + m_s\right); \qquad b_1 = \lambda^2 \left(I_b + m_b l_1^2\right); \\ b_2 = 2\lambda\, r_1^2 \left(m''_b + m_s\right); \qquad b_3 = \lambda^4 \left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right); \tag{9}$$

Allora, esprimendo tutto in funzione di $\cos\vartheta_1$, si può scrivere:

$$\mathrm{a}(\vartheta_1) = I_m + b_0 \left(1 - \cos^2 \vartheta_1\right) + b_1 \cos^2 \vartheta_1 + \\ + b_2 \left(1 - \cos^2 \vartheta_1\right) \cos\theta_1 + b_3 \left(1 - \cos^2 \vartheta_1\right) \cos^2 \vartheta_1 = \\ = I_m + b_0 + b_2 \cos\vartheta_1 + \left(b_1 - b_0 + b_3\right) \cos^2 \vartheta_1 - b_2 \cos^3 \vartheta_1 + \\ - b_3 \cos^4 \vartheta_1 \tag{10}$$

Si ha poi dalla trigonometria:

$$\cos(n\alpha) = \cos^n \alpha - \binom{n}{2}\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \binom{n}{4}\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \ldots.$$

per cui è:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\operatorname{sen}^2 \alpha \cos\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$$

Si può ricavare quindi:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) \\ \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3) \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

Sostituendo le (11) nella(10) si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} a(\vartheta_1) &= I_m + b_0 + b_2 \cos\vartheta_1 + \frac{1}{2}\left(b_1 - b_0 + b_3\right)(\cos 2\vartheta_1 + 1) + \\ &- \frac{1}{4}b_2\left(\cos 3\vartheta_1 + 3\cos\vartheta_1\right) - \frac{1}{8}b_3\left(\cos 4\vartheta_1 + 4\cos 2\vartheta_1 + 3\right) = \\ &= I_m + b_0 + \frac{1}{2}\left(b_1 - b_0 + b_3\right) - \frac{3}{8}b_3 + \left(b_2 - \frac{3}{4}b_2\right)\cos\vartheta_1 + \\ &+ \frac{1}{2}\left(b_1 - b_0 + b_3 - b_3\right)\cos 2\vartheta_1 - \frac{1}{4}b_2 \cos 3\vartheta_1 + \frac{1}{8}b_3 \cos 4\vartheta_1 = \\ &= I_m + \frac{1}{2}\left(b_0 + b_1 + \frac{1}{4}b_3\right) + \frac{1}{4}b_2 \cos\vartheta_1 + \\ &+ \frac{1}{2}\left(b_1 - b_0\right)\cos 2\vartheta_1 - \frac{1}{4}b_2 \cos 3\vartheta_1 - \frac{1}{8}b_3 \cos 4\vartheta_1 \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto delle (9), i coefficienti della funzione $a(\vartheta_1)$ saranno:

$$A_0 = I_m + \frac{1}{2}\left[\lambda^2\left(I_b + m_b l_1^2\right) + r_1^2\left(m_b + m_s\right)\right] + \frac{1}{8}\lambda^4\left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\lambda r_1^2\left(m''_b + m_s\right); \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[\lambda^2\left(I_b + m_b l_1^2\right) - r_1^2\left(m_b + m_s\right)\right]$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\lambda r_1^2\left(m''_b + m_s\right); \qquad A_4 = -\frac{1}{8}\lambda^4\left(l_2^2 m_b + m_s l^2\right)$$

Uniformazione

In generale, la (51) si può integrare facilmente se si può porre la componente lagrangiana delle forze attive, nella forma:

$$Q(\vartheta) = f_1(\vartheta)\omega^2 + f_2(\vartheta) \tag{12}$$

dove f_1 ed f_2 siano funzioni note di ϑ.
In questo caso la (51) diventa:

$$2\left[f_1(\vartheta)\omega^2 + f_2(\vartheta)\right] = \frac{\mathrm{d}a(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\omega^2 + a(\vartheta)\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\vartheta}$$

e questa la si può scrivere come:

$$\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{1}{a(\vartheta)}\left[\frac{\mathrm{d}a(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} - 2f_1(\vartheta)\right]\omega^2 = \frac{2f_2(\vartheta)}{a(\vartheta)} \tag{13}$$

oppure, sinteticamente:

$$\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\vartheta} + g_1(\vartheta)\omega^2 = g_2(\vartheta)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} g_1(\vartheta) &= \frac{1}{a(\vartheta)}\left[\frac{\mathrm{d}a(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} - 2f_1(\vartheta)\right] \\ g_2(\vartheta) &= \frac{2f_2(\vartheta)}{a(\vartheta)} \end{aligned} \tag{14}$$

L'integrale della (13) sarà allora del tipo:

$$\omega_1^2 = e^{-\int_0^{\vartheta} g_1(\vartheta)d\vartheta}\left[\omega_0^2 + \int_0^{\vartheta} g_2(\vartheta)e^{\int_0^{\vartheta} g_1(\vartheta)d\vartheta}\,d\vartheta\right] \tag{15}$$

dove ω_0 è il valore assunto dalla velocità angolare per ϑ=0, e determinabile imponendo la condizione che sia:

$$\int_0^{\Theta} \left[f_1(\vartheta)\omega_1^2 + f_2(\vartheta) \right] d\vartheta = 0$$

Nel caso particolare in cui nella (12) sia $f_1(\vartheta)=0$, nella (14) si avrà:

$$g_1(\theta) = \frac{1}{a(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, a(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}$$

e nella (15):

$$\int_0^{\vartheta} g_1(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{a(\vartheta)} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta)}{\mathrm{d}\,\vartheta} d\vartheta = \int_0^{\vartheta} \frac{\mathrm{d}\, a(\vartheta)}{a(\vartheta)} = \log \frac{a(\vartheta)}{a(0)}$$

per cui la stessa diventa:

$$\omega_1^2 = \frac{a(0)}{a(\vartheta)} \left[\omega_0^2 + 2 \int_0^{\vartheta} \frac{f_2(\vartheta)}{a(\vartheta)} \frac{a(\vartheta)}{a(0)} d\vartheta \right] =$$

$$= \frac{a(0)}{a(\vartheta)} \left[\omega_0^2 + \frac{2}{a(0)} \int_0^{\vartheta} f_2(\vartheta) d\vartheta \right] =$$

$$= \frac{a(0)}{a(\vartheta)} \omega_0^2 + \frac{2}{a(\vartheta)} \int_0^{\vartheta} f_2(\vartheta) d\vartheta$$

CAPITOLO XIX

LE VIBRAZIONI MECCANICHE

SOMMARIO

1. Introduzione.
2. Richiami di cinematica del moto armonico.
3. Moti periodici non armonici.
4. Composizione di moti armonici.
5. Lavoro di una forza in un moto armonico.
6. Le caratteristiche elastiche e la loro combinazione.
7. Vibrazioni libere senza smorzamento.
8. Vibrazioni di masse su sopporti elastici.
9. Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà.
10. Vibrazioni libere con smorzamento viscoso.
11. Vibrazioni forzate senza smorzamento.
12. Vibrazioni forzate con smorzamento di tipo viscoso.
13. Isolamento dalle vibrazioni.
14. Vibrazioni di sistemi su sopporto mobile.
15. Sismografi e accelerometri.

§ 1. - Introduzione

Lo studio delle vibrazioni, nella meccanica applicata, costituisce quel particolare capitolo della dinamica che tratta essenzialmente del moto vibratorio di sistemi meccanici di vario tipo (organi di macchine o macchine nel loro complesso).

Affinché sia possibile che si manifesti un moto vibratorio è necessario che del sistema faccia parte almeno un membro cui sia possibile attribuire caratteristiche elastiche, e che al sistema sia applicata almeno una forza (o una coppia) non costante, variabile nel tempo con legge periodica.

La **caratteristica elastica** (solo nell'ambito della validità della legge di Hooke) può essere individuata nella elasticità propria del mate-

riale che costituisce il sistema o uno dei suoi membri, oppure in quella di un singolo elemento del sistema stesso (per es. una molla); talvolta tale caratteristica è surrogata dal manifestarsi, durante il moto, di particolari forze che tendono (come nel caso del pendolo) a riportare il sistema nella configurazione di equilibrio statico.
In generale tale caratteristica può sempre essere sintetizzata (nell'ambito della validità della legge di Hooke) in una **costante elastica**, indicata di solito con la lettera k, che identifica o un legame **forza/spostamento** (misurata in kg/m ≡ 9.81N/m) o un legame **momento/rotazione** (misurata in mkg ≡ 9.81 Nm).

Quando si ha a che fare con sistemi reali è necessario tener conto anche di una **caratteristica dissipativa** ossia il destarsi, con il moto, di forze che si oppongono al moto stesso ed il cui effetto è quello di limitare l'ampiezza del moto oscillatorio del sistema (**smorzatori**).
Il più comune è lo smorzatore di tipo viscoso in cui le forze che si oppongono al moto sono proporzionali alla velocità.
In tal caso la caratteristica dissipativa del sistema viene sintetizzata in un **coefficiente di smorzamento viscoso**, (effettivo o equivalente) che si indica, in genere, con la lettera c [kg s/m ≡ 9.81 Ns/m], e che rappresenta appunto un legame **forza/velocità**.

Si possono avere, tuttavia, anche smorzatori di tipo particolare in cui la forza che si oppone al moto dipende dal quadrato della velocità.

Costituisce una caratteristica dissipativa anche la presenza dell'attrito asciutto negli accoppiamenti fra i vari membri di una macchina, come pure l'effetto del verificarsi di cicli di isteresi nel materiale (smorzamento strutturale).

In ogni caso, insieme agli elementi con caratteristica elastica ed, eventualmente, a quelli con caratteristica dissipativa, devono ritrovarsi, nel sistema, anche uno o più elementi massivi (come per un qualsiasi problema di dinamica).

A tutti questi elementi, masse, molle, smorzatori, si dà genericamente il nome di parametri del sistema.

I sistemi reali sono, generalmente, molto complessi in quanto risultano costituiti da membri diversi con caratteristiche dinamiche per lo più diverse fra loro. Solo la conoscenza di queste caratteristiche consente di operare quella idealizzazione che prende il nome di modello matematico.

La scelta di procedere ad una analisi dinamica più approfondita può anche imporre di tener conto della circostanza che i membri di un sistema, considerati membri rigidi nell'ambito dell'analisi cinematica, di fatto sono deformabili; e ciò implicherà il dover sostituire lo studio di un **sistema a parametri concentrati** (o sistema discreto) con lo studio di un **sistema a parametri distribuiti** (o sistema continuo). Ne conse-

gue che i gradi di libertà del sistema non possono più essere quelli previsti dalla cinematica dei sistemi rigidi: per ogni sistema continuo si dovranno considerare infinite masse elementari opportunamente vincolate fra loro e in moto relativo; inoltre, mentre i sistemi discreti sono descritti da equazioni differenziali ordinarie, i sistemi continui sono descritti, generalmente, da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Comunque il sistema sia costituito, si potrà dire che esso è soggetto a **vibrazione** quando almeno uno dei suoi punti presenta un **moto nell'intorno di una data configurazione di equilibrio**, moto che si ripete con le medesime caratteristiche dopo un intervallo di tempo ben definito; tale intervallo di tempo prende il nome di **periodo** [T] della vibrazione, e, nel caso più semplice, è l'intervallo di tempo in cui si compie una oscillazione completa.

Frequenza della vibrazione [f = 1/T] è il numero delle oscillazioni complete per unità di tempo e si misura in Hertz (Hz); più in generale è il numero di volte in cui il moto del sistema si presenta con le medesime caratteristiche in un prefissato intervallo di tempo.

Il moto vibratorio di un sistema dipende, in generale, da due particolari valori di frequenza: la **frequenza naturale** (o frequenza propria) [f_n] che è la frequenza con cui vibra un sistema che ha soltanto caratteristiche elastiche e non è soggetto a forze esterne attive del tipo f(t); la **frequenza eccitatrice** (o frequenza forzante) [f_f] che è quella dell'azione esterna, f(t), (quando esiste) che agisce sul sistema con variabilità periodica.

Quando i valori di tali frequenze coincidono ($f_f = f_n$) si ha la condizione di **risonanza**, cui può corrispondere una esaltazione dell'ampiezza del moto vibratorio con possibile pericolo per la integrità del sistema.

Si comprende, quindi, l'importanza della determinazione della frequenza naturale in un sistema vibrante.

Una classificazione delle vibrazioni porta a distinguere fra vibrazioni libere e vibrazioni forzate: si dicono **vibrazioni libere** quelle di un sistema che, allontanato, in qualche modo, dalla sua configurazione di equilibrio statico, viene lasciato libero di oscillare in assenza di azioni eccitatrici esterne; si dicono **vibrazioni forzate** quelle di un sistema sottoposto invece all'azione di azioni eccitatrici esterne.

Si definiscono, infine, **vibrazioni transitorie** quelle la cui ampiezza varia nel tempo, o fino ad annullarsi, nel caso di vibrazioni libere, ovvero fino a raggiungere l'ampiezza della **vibrazione permanente**, nel caso di vibrazioni forzate. Il transitorio è legato alla presenza, nel sistema, di caratteristiche dissipative (per es. smorzatori), e pertanto esso è una caratteristica di tutti i sistemi reali, siano essi in vibrazione libera o forzata..

§ 2. - Richiami di cinematica del moto armonico.

La forma più semplice di moto periodico è il moto armonico, espresso, per un punto, da una relazione del tipo:

$$x = X\cos(\omega t) \qquad \textbf{(1)}$$

atta a rappresentare (fig. 1) uno spostamento x(t) il cui valore oscilla fra gli estremi X e -X (X ≡ ampiezza della vibrazione) con un periodo angolare, di 2π.
In termini di unità di tempo, allora, il periodo del moto oscillatorio descritto da una tale funzione sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ed ω, [s^{-1}], prende il nome di **pulsazione angolare**; la frequenza di tale

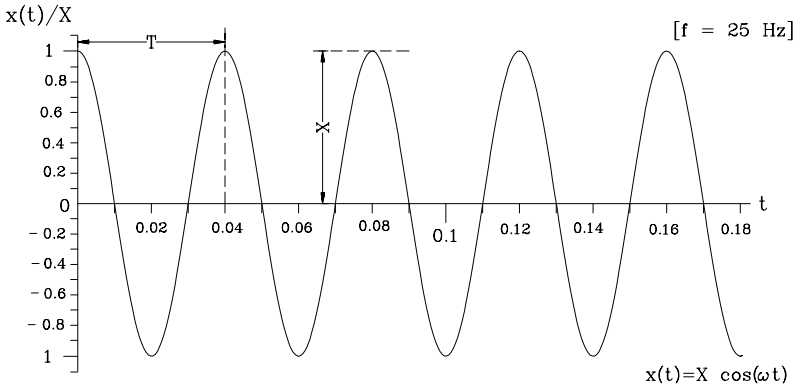


Figura 1

moto sarà data da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Si può ancora osservare che una funzione così scritta assume che il valore del tempo t si sta misurando da un istante t_0 in cui lo spostamento presentava il suo valore massimo (per $t_0 = 0$; x(t)=X); poiché è del tutto arbitrario il modo di fissare l'origine dei tempi, la forma più generale di rappresentazione del moto armonico sarà:

$$x = X\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

dove φ (angolo di fase) sta a indicare che l'origine dei tempi è spostata di un $\Delta t = \varphi/\omega$ rispetto all'istante in cui era x(t) = X, ossia che trovere-

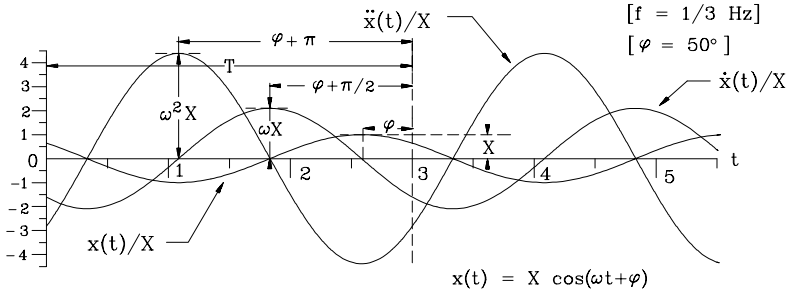


Figura 2

mo x(t) = X, non per $t_0 = 0$, ma per $t_0 = -\Delta t$.

Un punto il cui moto è regolato dalla (2) avrà una velocità data da:

$$\dot{x} = -\omega X \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

e ciò mostra come la velocità sia sfasata di $\pi/2$ (sia in quadratura) rispetto allo spostamento: la velocità risulta nulla quando lo spostamento è pari all'ampiezza massima, risulta massima quando il punto attraversa la posizione di equilibrio (x=0); l'accelerazione, data da:

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 X \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

risulta invece sfasata di π rispetto allo spostamento e in quadratura rispetto alla velocità.
La fig. 2 mostra un diagramma della (2) e delle sue derivate ottenuto per una frequenza di 0.33 Hz ed uno sfasamento di 50°.

§ 3. - Moti periodici non armonici.

Un moto armonico, lo si è visto, è senz'altro un moto periodico; tuttavia non è sempre vero il viceversa, ossia non tutti i moti periodici sono di tipo armonico.

La teoria matematica dimostra che un qualsiasi moto periodico di pulsazione ω può essere descritto, attraverso la **serie di Fourier** ,dalla somma di funzioni sinusoidali di pulsazione ω, 2ω, 3ω , ... ,$n\omega$; ossia da una funzione del tipo:

$$f(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) + A_2 \operatorname{sen}(2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$
$$\cdots + A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n)$$

somma di n armoniche, dove i coefficienti A_1, A_2, ..., A_n sono le ampiezze delle singole **armoniche** componenti, e φ_1, φ_2, ..., φ_n le rispettive fasi.
Il primo termine della serie, A_0, è una costante e rappresenta, evidentemente, il valore medio della funzione f(t) durante un periodo: sarà quindi nullo tutte le volte che la f(t) sarà simmetrica rispetto all'asse dei tempi; i termini successivi costituiscono la prima armonica, la seconda, ..., la n-esima armonica.
Inoltre, poiché è possibile scrivere:

$$\operatorname{sen}\left(n\omega t+\varphi_n\right)=\operatorname{sen} n\omega t\cos\varphi_n+\cos n\omega t\operatorname{sen}\varphi_n$$

si potrà anche scrivere:

$$f(t)=a_1\operatorname{sen}\omega t+a_2\operatorname{sen}2\omega t+\cdots+a_n\operatorname{sen}n\omega t+$$
$$+b_0+b_1\cos\omega t+b_2\cos2\omega t+\cdots+b_n\cos n\omega t$$

in cui evidentemente sarà:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\tan\varphi_n=b_n/a_n$$

con:

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}f(t)\operatorname{sen}n\omega t\,dt\;;\qquad\text{e}\qquad b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}f(t)\operatorname{sen}n\omega t\,dt\;;$$

Queste ultime consentono, evidentemente, di calcolare le ampiezze delle singole armoniche che compongono la f(t).

§ 4. - Composizione di moti armonici.

Il moto di un punto la cui legge sia data dalla (1), o anche dalla (2), può trovare una semplice rappresentazione attraverso un vettore (fig. 3) di modulo pari ad X, rotante con velocità angolare uniforme pari ad ω in verso antiorario se questo è il verso scelto come positivo per gli angoli ωt.
Infatti la componente del vettore

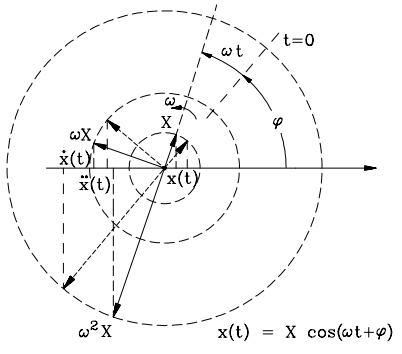


Figura 3

sull'asse orizzontale si scrive proprio come la (2); e in modo del tutto analogo è valida la rappresentazione della velocità e della accelerazione.

Tale metodo di rappresentazione risulta particolarmente utile nella valutazione del moto complessivo di un punto soggetto simultaneamente a **due moti oscillatori della medesima frequenza**, valutazione che può essere fatta quindi con i metodi elementari del calcolo vettoriale.

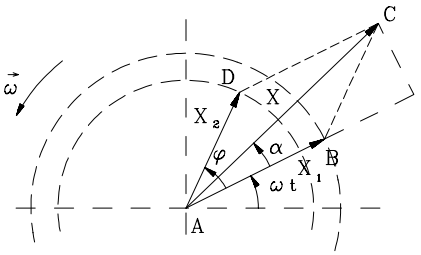


Figura 4

Infatti (fig. 4) dati due moti vibratori sfasati dell'angolo φ:

$$x_1(t) = X_1 \cos\omega t$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

se si fa riferimento alla rappresentazione vettoriale, il vettore somma X avrà come modulo la diagonale AC del parallelogramma ABCD la quale vale (teorema di Carnot):

$$AC = X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos\varphi}$$

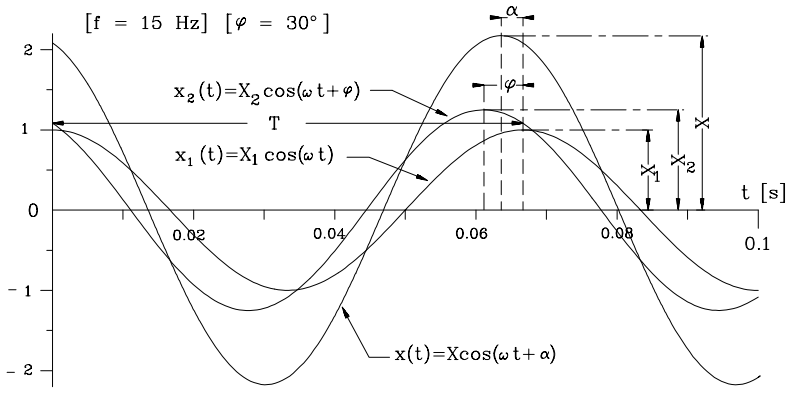


Figura 5

e che risulta ruotata rispetto al lato AB di un angolo α tale che sia:

$$\tan\alpha = -\frac{X_2 \operatorname{sen}\varphi}{X_1 + X_2\cos\varphi}$$

rappresentando quindi un moto risultante esprimibile con una legge del tipo:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \alpha)$$

Allo stesso risultato, ovviamente, si perviene procedendo analiticamente (v. Appendice A). Il moto risultante, è in ogni caso, quello rappresentato nella fig.5.

Particolarmente interessante è il caso in cui il moto di un punto risulta dalla composizione di **due moti oscillatori che non hanno la medesima frequenza**, cioè dalla sovrapposizione di due frequenze diverse:

$$x(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Si ha così il fenomeno della **modulazione (di ampiezza, di frequenza, di fase)**; il moto risultante dipende fondamentalmente dai valori di ω_1 ed ω_2: se il loro rapporto non è un rapporto razionale il moto risultante non è periodico.
In fig. 6 è riportata, a titolo di esempio, l'oscillazione risultante da due moti con particolari valori di frequenza, il cui rapporto non è un numero

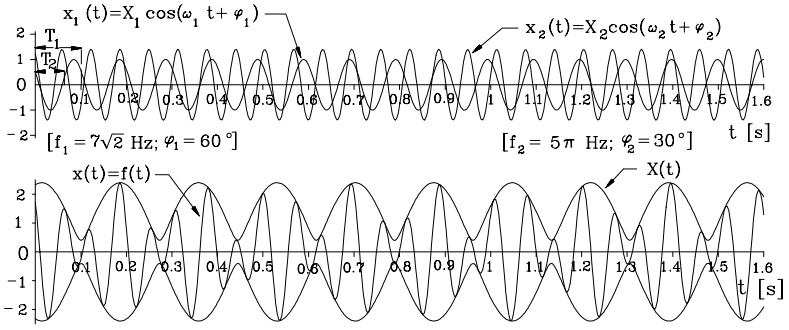


Figura 6

razionale: si può vedere che non esiste un periodo T per l'oscillazione risultante.
Il moto risulta invece periodico (fig. 7) se il rapporto fra le frequenze dei moti componenti è un rapporto fra numeri interi.
Si può notare, in fig. 7, che l'intervallo di tempo fra i punti A e A', B e B', C e C' ecc. è costantemente pari a T.
In questo secondo caso, posto:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \text{e} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

si perviene ad un moto dato da:

$$x(t) = X(t)\cos(\omega_1 t + \Phi)$$

con:

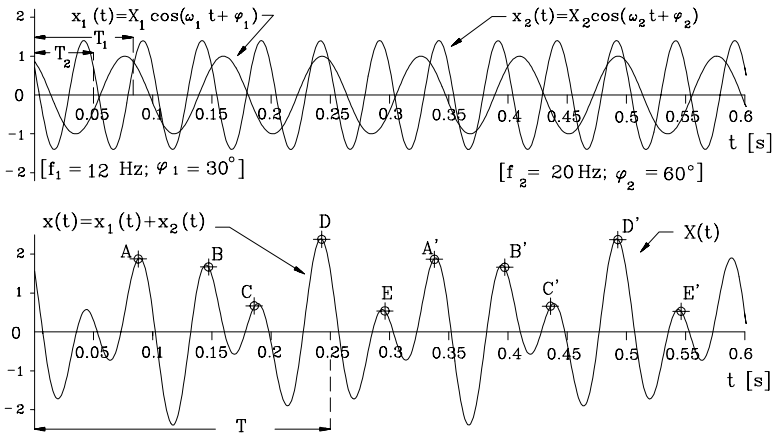


Figura 7

$$X(t) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}$$

e:

$$\tan\varphi = -\frac{X_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \varphi_2)}{X_1\cos\varphi_1 + X_2\cos(\Delta\omega t + \varphi_2)}$$

e ciò mostra come, sia l'ampiezza che la fase del moto risultante, variano col tempo e con una frequenza pari alla differenza delle frequenze dei moti componenti.

In fig. 8 sono messi a confronto tre casi in cui i moti componenti, pur avendo frequenza diversa, hanno la stessa ampiezza ma fase diversa (fig. 8,a), stessa fase ma ampiezza diversa (fig. 8,b), stessa ampiezza e stessa fase (fig. 8,c).

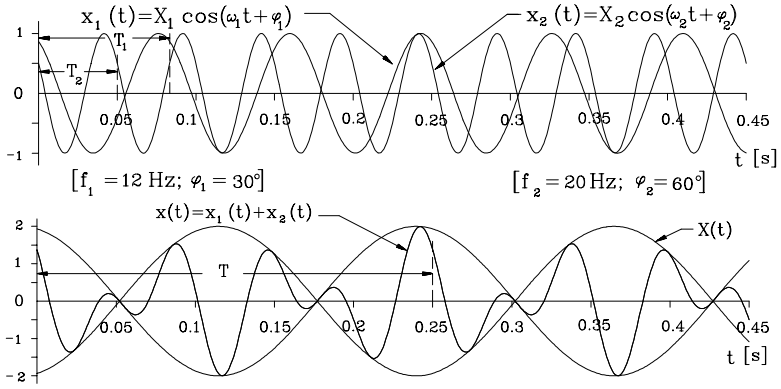


Figura 8,a

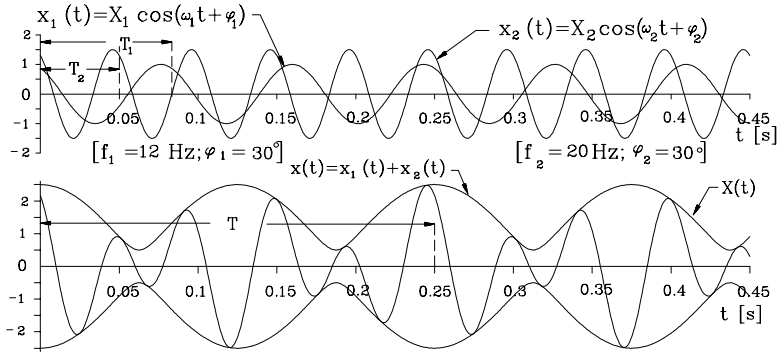


Figura 8,b

Nel caso in cui **le oscillazioni componenti hanno la medesima ampiezza**, ossia:

$$x_1(t) = X\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = X\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

si ottiene un moto risultante ancora del tipo:

$$x(t) = X(t)\cos(\omega t + \Phi)$$

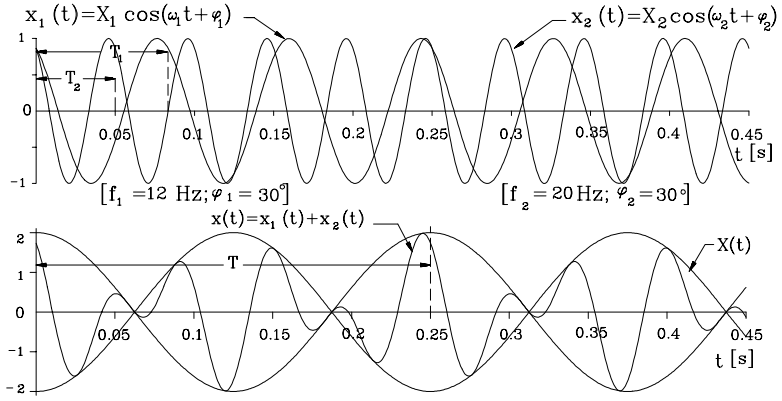


Figura 8,c

in cui è:

$$X(t) = 2X\cos(\omega t + \Phi)$$
$$\omega = \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{e} \quad \Phi = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Tale situazione da luogo a quel particolare fenomeno di modulazione che prende il nome di **battimento**, particolarmente accentuato quando i valori delle frequenze dei moti componenti sono molto prossime fra loro, per cui il valore di $\Delta\omega$ è molto piccolo rispetto ad ω_1 e ad ω_2.

Un altro metodo di rappresentazione di un moto vibratorio si può avere attraverso l'uso dei numeri complessi, uso che può spesso rendere più semplici i calcoli.
Con tale metodo una vibrazione del tipo:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$$

può essere rappresentata dalla parte reale della funzione complessa:

$$\bar{x}(t) = Xe^{i(\omega t+\varphi)}$$

essendo, come è noto:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Sarà cioè:

$$x(t) = \Re[\bar{x}(t)]$$

§ 5. - Lavoro di una forza in un moto armonico.

E' importante in molte applicazioni conoscere quale sia il lavoro compiuto da una forza la cui intensità varia in modo armonico mentre lo spostamento del suo punto di applicazione abbia una legge pure di tipo armonico.
Sia, per esempio, la forza:

$$F = F_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

il cui punto di applicazione abbia un moto del tipo:

$$x = x_0\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Lo spostamento elementare del punto di applicazione della F sarà dato da xdt e pertanto il lavoro compiuto da F durante un ciclo, in cui ωt varia fra 0 e 2π, e quindi t varia fra 0 e $2\pi/\omega$, sarà dato da:

$$L_{/c} = \int_0^{2\pi/\omega} F\dot{x}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} F\dot{x}d(\omega t) = F_0 x_0 \int_0^{2\pi} sen(\omega t + \varphi)\cos\omega t\, d(\omega t) =$$

$$= F_0 x_0 \int_0^{2\pi} \cos\omega t(sen\omega t\cos\varphi + \cos\omega t sen\varphi)d(\omega t) =$$

$$= F_0 x_0 \cos\varphi \int_0^{2\pi} \cos\omega t sen\omega t\, d(\omega t) + F_0 x_0 sen\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t\, d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2} F_0 x_0 \cos\varphi \int_0^{2\pi} sen2\omega t\, d(\omega t) + F_0 x_0 sen\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t\, d(\omega t)$$

In quest'ultima espressione il primo integrale è nullo, mentre il secondo vale π, e quindi il lavoro cercato vale:

$$L_{/c} = \pi F_0 x_0 \operatorname{sen}\varphi$$

Tale risultato mostra che in definitiva **il lavoro della forza. F è dato** solamente **da quella componente che risulta in fase con la velocità del suo punto di applicazione**.
Se la forza con pulsazione ω non fosse di tipo armonico il suo lavoro nel ciclo, per uno spostamento armonico di pulsazione nω del suo punto di applicazione, sarebbe soltanto quello della componente della sua n-esima armonica che risulta in fase con la velocità del punto stesso; il lavoro di tutte le altre componenti risulta nullo.

§ 6. - Le caratteristiche elastiche e la loro combinazione.

Un elemento elastico è un qualsiasi corpo capace di opporre una reazione proporzionale all'entità della deformazione che subisce, e che, cessata la quale, è in grado di riprendere la precedente configurazione indeformata.
Il rapporto fra la reazione opposta e la deformazione in atto è il valore della **costante elastica**: si possono avere elementi elastici capaci di reagire con una forza F (forza di reazione elastica) ad uno spostamento relativo x fra due suoi punti (p. es. una molla), e in tal caso si avrà una costante elastica del tipo k=F/x [Kg/mm≡9.81N/mm]; oppure si possono avere elementi elastici capaci di reagire con un momento M (momento di reazione elastica) ad una rotazione relativa θ fra due sezioni estreme (barra di torsione), ed in tal caso si avrà una costante elastica k=M/θ [mKg/rad≡9.81 Nm/rad].

La convenienza di poter disporre di un modello matematico sufficientemente agevole da gestire suggerisce generalmente la ricerca di uno schema semplificato del sistema in esame; e uno dei casi più ricorrenti è quello in cui in uno stesso sistema sono presenti più elementi elastici con costanti diverse. In tal caso, nella equazione differenziale del moto, è possibile sostituirli con un unico elemento elastico equivalente di costante k_{eq} il cui valore può essere definito a seconda di come gli elementi originari sono collegati fra loro.

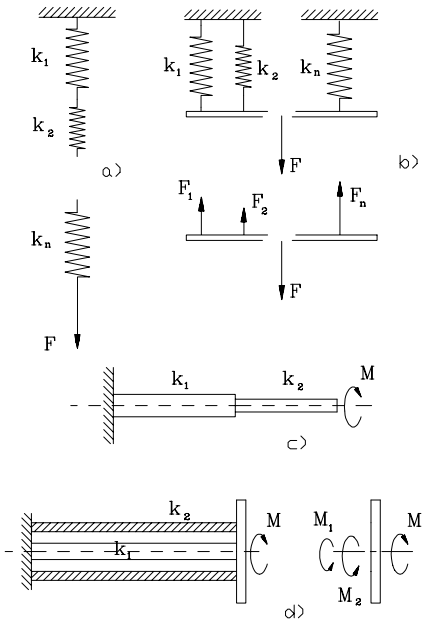


Figura 9

Quand'anche gli elementi elastici fossero in numero considerevole, il problema può sempre essere risolto per passi successivi ricercando via via il valore di costanti elastiche parziali che andranno poi opportunamente combinate fra loro; il valore di ciascuna di esse dipenderà dal fatto che il gruppo di "molle" cui si riferisce siano collegate in serie oppure in parallelo (fig. 9).

Nel caso di un **collegamento in serie** di n molle (a), qualunque sia l'allungamento x_1, x_2, ..., x_n di ciascuna di esse, per il principio di azione e reazione, dovrà essere:

$$F_1 = k_1 x_1 = F_2 = k_2 x_2 = \cdots = F_n = k_n x_n$$

ossia:

$$F = F_i = k_i x_i$$

e contemporaneamente l'allungamento complessivo della serie sarà:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

La molla da sostituire dovrà avere una costante elastica $(k_{eq})_s$ tale da reagire con una

$$F = F_1 = F_2 = \cdots = F_n$$

quando viene deformata di x, ossia:

$$F = \left(k_{eq}\right)_s x = \left(k_{eq}\right)_s \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

Potendo scrivere:

$$x = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} + \cdots + \frac{F_n}{k_n} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right)$$

si ha, confrontando con la precedente,

$$\frac{1}{(k_{eq})_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

e più in generale:

$$\frac{1}{(k_{eq})_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

Nel caso, invece, di **collegamento in parallelo** (b), quando si possa ammettere che le n molle subiscano tutte il medesimo allungamento x, si ha per ciascuna di esse una forza di reazione pari ad:

$$F_i = k_i x$$

La molla da sostituire dovrà avere, in questo caso, una costante elastica $(k_{eq})_p$ tale da reagire, per l'allungamento x con una forza:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = x \sum_{i=1}^{n} k_i = (k_{eq})_p x$$

Se ne deduce che dovrà essere:

$$(k_{eq})_p = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Agli identici risultati si giunge anche nel caso in cui si considerino barre di torsione in serie (c), o in parallelo (d): basterà sostituire i momenti alle forze e le rotazioni agli spostamenti e ripetere le analoghe considerazioni.

Un caso particolare di collegamento in serie, interessante perché corrisponde a casi frequenti nelle applicazioni, è quello in cui i due elementi elastici, siano essi molle ad elica o barre di torsione, non sono collegati direttamente ma attraverso un dispositivo che impone ai loro punti di connessione un dato rapporto di trasmissione.
Un tale dispositivo può essere rappresentato schematicamente da una leva, nel caso di molle ad elica, o da un accoppiamento dentato, nel caso di barre di torsione.

Nello schema di fig. 10 le due molle ad elica di rigidezza k_1 e k_2

sono collegate ad una leva nei punti A e B rispettivamente a distanza l_1 ed l_2 dal suo punto di cerniera O.
Indicando con x_1 ed x_2 gli allungamenti delle due molle, le loro condizioni di equilibrio si possono scrivere:

$$F_A = k_1 x_1$$
$$F_B = k_2 x_2$$

mentre, per l'equilibrio alla rotazione della leva, deve pure essere:

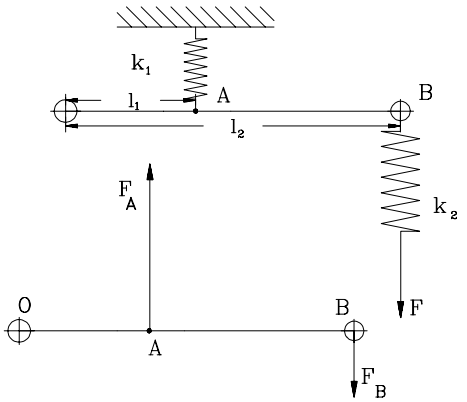


Figura 10

$$F_A l_1 = F_B l_2$$

ossia:

$$F_A = \tau F_B = \tau F \qquad \text{con} \qquad \tau = l_2/l_1$$

D'altra parte l'abbassamento del punto B sarà dato da:

$$\frac{x_B}{l_2} = \frac{x_A}{l_1} = \frac{x}{l_1}$$

e quello complessivo del punto D, punto di applicazione della forza F, sarà:

$$x = x_B + x_2 = x_1 \frac{l_2}{l_1} + x_2 = \tau x_1 + x_2$$

e questo dovrà essere pure l'allungamento della molla di rigidezza k_{eq} sotto l'azione della stessa forza F, nello schema equivalente, e quindi:

$$\frac{F}{k_{eq}} = x = \tau x_1 + x_2 = \tau \frac{F_A}{k_1} + \frac{F_B}{k_2} = F\left(\frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

e in definitiva:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Ad analogo risultato si perviene nel caso di fig. 11 in cui le due barre di torsione di rigidezza k_1 e k_2 sono collegate fra loro per mezzo di una coppia dentata costituita dalle ruote A e B, e che realizza il rap-

porto di trasmissione:

$$\tau = \frac{z_A}{z_B} = \frac{C_A}{C_B} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{\vartheta_B}{\vartheta_A}$$

Indicando con θ_1e θ_2 le rotazioni relative fra le sezioni estreme delle due barre, per effetto della deformazione elastica, le loro condizioni di equilibrio si possono scrivere:

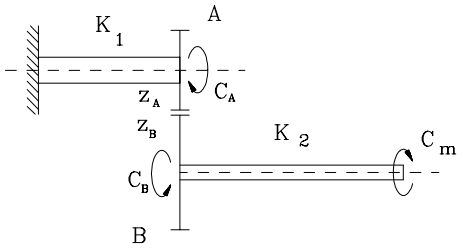


Figura 11

$$C_A = k_1\vartheta_1 = k_1\vartheta_A$$
$$C_B = C_m = k_2\vartheta_2 = k_2(\vartheta - \vartheta_B)$$

mentre, per l'equilibrio della coppia dentata, deve pure essere:

$$C_A\vartheta_A = C_B\vartheta_B$$

ossia:

$$C_A = C_B\frac{\vartheta_B}{\vartheta_A} = \tau C_B = \tau C_m$$

D'altra parte la rotazione complessiva della sezione libera della barra 2 sarà data da:

$$\theta = \theta_B + \theta_2 = \tau\theta_1 + \theta_2$$

Potremo allora scrivere:

$$\frac{C_m}{k_{eq}} = \theta = \tau\frac{C_A}{k_1} + \frac{C_B}{k_2} = C_m\left(\frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

e quindi ancora:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

§ 7. - Vibrazioni libere senza smorzamento.

Si consideri (fig. 12) un corpo di massa concentrata m sospeso ad una molla di lunghezza l e di rigidezza k, supponendolo vincolato in modo tale che possa muoversi solamente nella direzione della verticale.

Si vuole studiare il moto di questo corpo allorquando, avendolo

spostato dalla sua posizione di equilibrio statico, lo si abbandoni a se stesso.
La posizione di equilibrio statico è quella in cui si troverà il corpo dopo avere, per effetto della sua forza peso P=mg, allungato la molla di una certa quantità Δ in tale posizione è nulla la somma delle forze agenti sul corpo stesso, il peso e la forza elastica di reazione della molla, ossia:

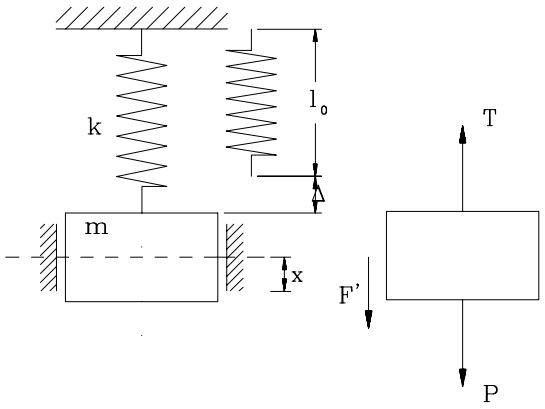


Figura 12

$$P - k\Delta = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Se ne ricava immediatamente che è:

$$\Delta = \frac{P}{k}$$

Se adesso il corpo viene scostato della quantità x_0 dalla sua posizione di equilibrio, e poi abbandonato con velocità v_0, esso, sotto l'azione di richiamo della molla si metterà in movimento.

In corrispondenza ad una sua generica posizione, x, dovranno essere verificate le equazioni cardinali della dinamica, e, in particolare, date le ipotesi fatte, dovrà essere:

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0$$

dove $\vec{F}$ è il risultante di tutte le forze agenti sul corpo ed $\vec{F}'$ il risultante delle forze d'inerzia.
E sarà:

$$\vec{F} = P - k(x + \Delta)$$

$$\vec{F}' = -m\vec{a}_G = -m\ddot{x}$$

e pertanto, tenendo conto della (3),

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

che è l'equazione differenziale del moto del corpo.
Dividendo quest'ultima per m, e ponendo:

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

si avrà:

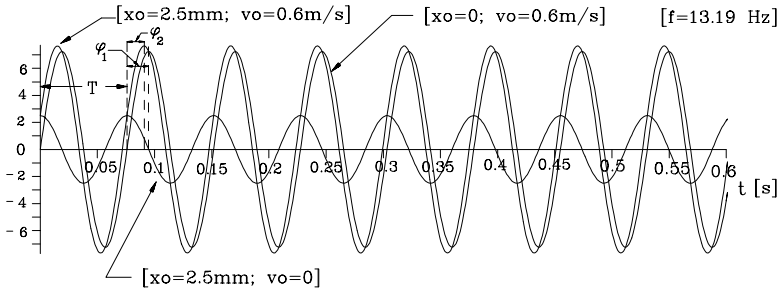


Figura 13

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Si deduce chiaramente come, essendo ω_n^2 una quantità essenzialmente positiva, l'accelerazione $\ddot{x}$ è sempre di verso opposto allo spostamento x del corpo, e quindi diretta sempre verso la sua posizione di equilibrio statico.
La soluzione della (4) è una funzione del tipo:

$$x(t) = X\cos(\omega_n t + \varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

con X e φ da determinare in base alle condizioni iniziali.
Il corpo, quindi, manifesterà un moto oscillatorio armonico con **pulsazione naturale** ω_n; a questa corrisponde la frequenza f_n (**frequenza naturale**) che potremo scrivere indifferentemente come:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{P}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

Le tre forme in cui è possibile esprimere la frequenza naturale del sistema mettono in evidenza che questa dipende esclusivamente dai parametri che caratterizzano il sistema (la molla e la massa) e pertanto è sufficiente la conoscenza di questi valori per arrivare alla sua determinazione; la più significativa è la terza, per la quale la lettura dell'allungamento della molla sotto l'azione del peso P del corpo in condizioni statiche è sufficiente per la determinazione della frequenza naturale del sistema.
Si osserva in ogni caso come la frequenza naturale del sistema aumenta al crescere della rigidità della molla, mentre diminuisce al crescere della massa (o del carico).

La risposta effettiva del sistema dipende dal valore fissato per le condizioni iniziali.

Se si abbandona il corpo con velocità nulla, ossia se, per t=0, è $x=x_0$ e $\dot{x} = 0$, si ottiene:

$$x_0 = X\cos\varphi$$
$$0 = -X\omega_n \operatorname{sen}\varphi$$

da cui si ottiene:

$$X = x_0$$
$$\varphi = 0$$

e quindi:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t)$$

Se invece all'istante iniziale si imprime al corpo una velocità v_0 in corrispondenza ad una posizione $x=x_0$, si avrà:

$$x_0 = X\cos\varphi$$
$$v_0 = -X\omega_n \operatorname{sen}\varphi$$

e quindi una risposta del tipo (5) con:

$$X = \frac{1}{\omega_n}\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + v_0^2}$$
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{v_0}{\omega_n x_0}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

mentre se la velocità v_0 viene impressa in corrispondenza della posizione di equilibrio statico, $x_0=0$, si avrà:

$$0 = X\cos\varphi$$
$$v_0 = -X\omega_n \operatorname{sen}\varphi$$

da cui:

$$X = \frac{v_0}{\omega_n}; \qquad \varphi = \frac{3}{2}\pi;$$

e quindi una risposta:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n}\operatorname{sen}(\omega_n t)$$

Le risposte corrispondenti a queste tre diverse condizioni sono rappresentate in fig. 13; si è ipotizzato un sistema massa+molla la cui frequenza naturale risulta pari a 13,19Hz.
Si osserva chiaramente come il valore della velocità iniziale v_0, oltre a determinare il manifestarsi dello sfasamento, influenzi in modo determinante l'ampiezza della risposta.

Il valore delle (6) dipende anche dal valore della frequenza naturale del sistema; la fig. 14 mostra come il valore della velocità iniziale v_0, che

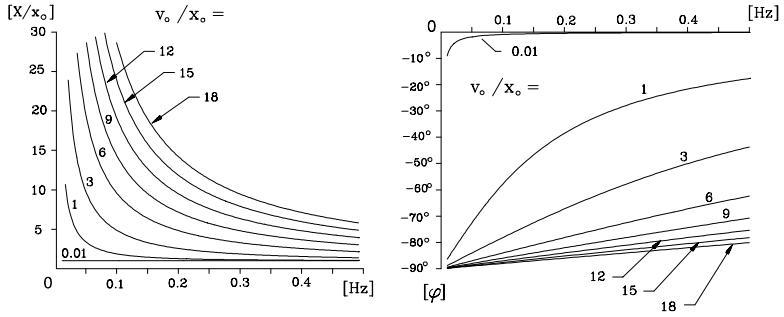


Figura 14

figura nel parametro v_0/x_0, influenza sia l'ampiezza che lo sfasamento della risposta, in modo tanto più importante quanto più è bassa la frequenza naturale del sistema stesso.

§ 8. - Vibrazioni di masse su sopporti elastici.

Un sistema costituito da una massa concentrata di peso P, solidale ad una trave variamente vincolata (fig. 15) può essere trattato, come un sistema equivalente al caso visto nel precedente paragrafo, solo in prima approssimazione, e cioè quando (travi snelle) sia da ritenere lecito considerare la trave come elemento puramente elastico.

In questi casi si potrà supporre che la massa sia sospesa ad una molla che, per effetto del carico P, subisca un allungamento pari allo spostamento (freccia statica) del baricentro della massa solidale alla trave.

Pertanto, il valore del k_{eq} da assegnare alla molla sarà dato da:

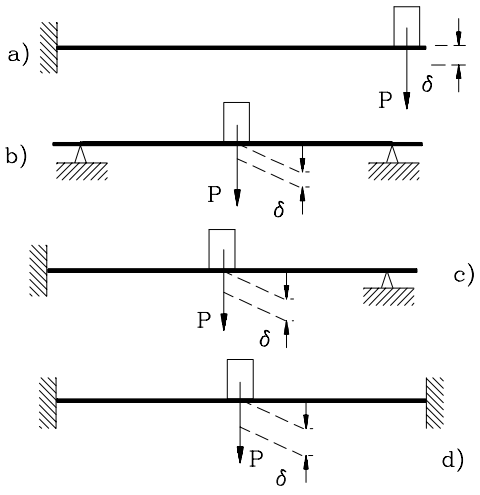


Figura 15

$$k_{eq} = \frac{P}{\delta}$$

avendo indicato con δ il valore della **freccia** che si ricava attraverso la Teoria dell'elasticità, e che dipende dal modulo di elasticità normale, E, del materiale costituente la trave come pure dal momento di inerzia della sua sezione retta, J.
Confrontiamo l'effetto dei diversi tipi di vincolo per una trave di lunghezza l nei confronti sia della rigidezza del sistema, sia della corrispondente pulsazione naturale.
- a) Trave incastrata ad un estremo e carico sull'altra estremità.

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ}; \qquad k_{eq} = 3\frac{EJ}{l^3}; \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{3EJg}{Pl^3}};$$

- b) Trave appoggiata e carico in mezzeria.

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ}; \qquad k_{eq} = 48\frac{EJ}{l^3}; \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{48EJg}{Pl^3}};$$

- c) Trave incastrata ad un estremo ed appoggiata all'altro, con carico in mezzeria.

$$\delta = \frac{7}{768}\frac{Pl^3}{EJ}; \qquad k_{eq} = \frac{768}{7}\frac{EJ}{l^3}; \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{768}{7}\frac{EJg}{Pl^3}};$$

- d) Trave doppiamente incastrata con carico in mezzeria.

$$\delta = \frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EJ}; \qquad k_{eq} = 192\frac{EJ}{l^3}; \qquad \omega_n = \sqrt{192\frac{EJg}{Pl^3}};$$

Per poter fare un confronto a parità di distanza del carico dai vincoli ha senso considerare i valori che si ottengono nel caso a) per una lunghezza $l_0 = l/2$, ossia:
- a')

$$\delta = \frac{1}{3}\frac{Pl_0^3}{EJ} = \frac{1}{24}\frac{Pl^3}{EJ}; \qquad k_{eq} = 24\frac{EJ}{l^3}; \qquad \omega_n = \sqrt{24\frac{EJg}{Pl^3}};$$

Si nota chiaramente come il valore della costante elastica, e quindi la frequenza naturale del sistema cresce man mano che aumentano i vincoli imposti alla trave.
Inoltre, il valore di k_{eq} dipende dal rapporto J/l^3 e ciò indica come una trave lunga e sottile avrà certamente, a parità di carico, una frequenza naturale più bassa di una trave corta e tozza.

§ 9. - Vibrazioni di sistemi ad un grado di libertà.

A). Si vuole studiare il moto del sistema rappresentato in fig.16 e costituito da una massa m sospesa ad un flessibile, supposto inestensibile, avvolto su una puleggia, di momento di inerzia J_0 e raggio r, che può ruotare vincolata alla cerniera O; al punto B distante b da O è vincolato l'estremo di una molla di rigidezza k e di lunghezza libera l_0, il cui secondo estremo è vincolato a telaio. Quando il sistema si trova in condizioni di equilibrio statico la puleggia è sottoposta, attraverso il flessibile, all'azione del peso della massa m ed alla reazione elastica della molla la cui lunghezza sarà diventata $(l_0+\Delta_0)$.

In tali condizioni dovrà sussistere, per essa, la relazione di equilibrio alla rotazione:

$$P\,r = k\,\Delta_0\,b$$

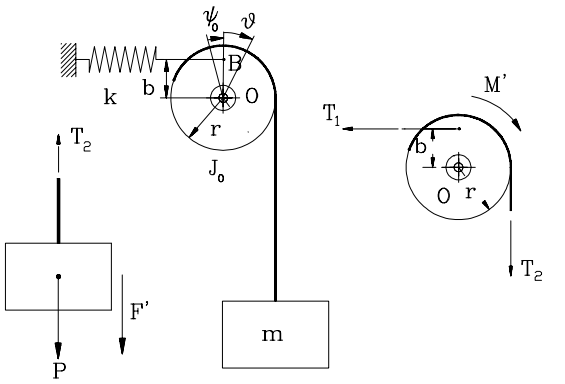


Figura 16

L'allungamento Δ_0 della molla equivale ad una rotazione ψ_0 della puleggia, tale che sia $\Delta_0 \cong b\psi_0$, considerando ψ_0 sufficientemente piccolo da confondere lecitamente l'arco con la sua tangente.

In tale ipotesi la condizione di equilibrio statico è espressa dalla relazione:

$$P\,r = kb^2\Delta_0 \qquad \textbf{(7)}$$

Se il sistema viene spostato dalla configurazione di equilibrio statico e poi abbandonato a sè stesso, esso inizierà un moto oscillatorio durante il quale le equazioni cardinali della dinamica:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}' = 0 \\ \vec{M} + \vec{M}' = 0 \end{cases}$$

rappresentano le condizioni di equilibrio dinamico del sistema.

Conviene applicare tali equazioni separatamente, una volta alla massa m ed una volta alla puleggia, pensando il sistema scomposto come indicato in figura.

Per il moto della massa m vale la prima delle due equazioni, in cui, indicando con T_2 la tensione nel filo che sostiene la massa, è:

$$F = P - T_2$$
$$F' = -m\ddot{y}$$

che dà:

$$P - T_2 - m\ddot{y} = 0$$

mentre per il moto della puleggia vale la seconda equazione in cui è:

$$M = T_2 r - T_1 b$$
$$M' = -J_0 \ddot{\vartheta}$$

e che dà:

$$T_2 r - T_1 b - J_0 \ddot{\vartheta} = 0$$

Quindi il moto dell'intero sistema sarà determinato attraverso la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{y} - P + T_2 = 0 \\ J_0 \ddot{\vartheta} + T_1 b - T_2 r = 0 \end{cases}$$

in cui figura la reazione elastica della molla, T_1.
La molla, in corrispondenza ad una rotazione della puleggia di valore pari a $(\psi_0+\vartheta)$, subisce un allungamento che, con le ipotesi fatte precedentemente, è pari a:

$$\Delta = b(\psi_0 + \vartheta)$$

e quindi la sua reazione elastica è data da:

$$T_1 = k\Delta = kb(\psi_0 + \vartheta)$$

Nella prima equazione la accelerazione della massa, $\ddot{y}$, può essere espressa in funzione della accelerazione angolare della puleggia, in quanto è $\ddot{y} = r\ddot{\vartheta}$.
Con queste sostituzioni il sistema di equazioni va scritto:

$$\begin{cases} mr\ddot{\vartheta} - P + T_2 = 0 \\ J_0 \ddot{\vartheta} + kb^2(\psi_0 + \vartheta) - T_2 r = 0 \end{cases}$$

Questo può essere ridotto ad un'unica equazione eliminando la tensione T_2 del flessibile; dalla prima delle due equazioni si ha:

$$T_2 = P - mr\ddot{\vartheta}$$

che sostituita nella seconda dà:

$$J_0\ddot{\vartheta} + kb^2\left(\psi_0 + \vartheta\right) - \left(P - mr\ddot{\vartheta}\right)r = 0$$

ossia:

$$\left(J_0 + mr^2\right)\ddot{\vartheta} + kb^2\vartheta + kb^2\psi_0 - P\,r = 0$$

che, in virtù della condizione di equilibrio statico (7) già trovata, diventa:

$$\left(J_0 + mr^2\right)\ddot{\vartheta} + kb^2\vartheta = 0$$

Questa è l'equazione differenziale del moto del sistema.
Si può ancora scrivere la stessa nella forma:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{kb^2}{J_0 + mr^2}\vartheta = 0$$

che mette in evidenza la pulsazione naturale del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kb^2}{J_0 + mr^2}}$$

Questa espressione mostra come l'effetto della presenza della massa m equivale, come è ovvio, a quello di una massa concentrata posta sulla periferia della puleggia.
L'equazione del moto sarà del tipo:

$$\vartheta(t) = \Theta\cos\left(\omega_n t + \varphi\right)$$

con Θ e φ da ricavare in base alle condizioni iniziali.
Ipotizzando che all'istante t=0 sia $\vartheta = \vartheta_0$ e $\dot{\vartheta} = \omega_0$ si trova:

$$\Theta = \sqrt{\vartheta_0^2 + \left(\omega_0/\omega_n\right)^2}\,; \qquad \varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega_0}{\vartheta_0\omega_n}\right)$$

La stessa equazione differenziale del moto del sistema può essere scritta in funzione della coordinata y, spostamento della massa, tenendo presente che è $y = r\vartheta$ e $\ddot{y} = r\ddot{\vartheta}$.
Si ottiene:

$$\ddot{y} + \frac{kb^2}{J_0 + mr^2}\,y = 0$$

che è la stessa equazione differenziale del moto che si otterrebbe per una massa equivalente:

$$m_{eq} = \frac{J_0 + mr^2}{b^2}$$

sospesa ad una molla con la stessa rigidezza k di quella del sistema esaminato, al quale, ovviamente, deve competere la medesima pulsazione naturale.

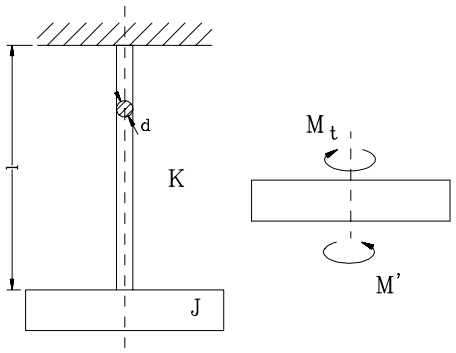


Figura 17

B) Un disco pesante di momento d'inerzia J_0 è rigidamente connesso ad un albero elastico di lunghezza l e diametro d (fig. 17) incastrato ad un estremo.

Se ne vuole trovare la pulsazione naturale e l'equazione del moto allorquando, dopo aver subito una rotazione θ_0 intorno all'asse longitudinale, viene abbandonato a se stesso con velocità angolare ω_0.

La caratteristica elastica dell'albero può essere facilmente ricavata dalla espressione che lega il momento di reazione elastica, M, alla rotazione θ imposta alla sua sezione libera, e che si scrive:

$$M = \frac{GI_p}{l}\vartheta$$

dove G è il modulo di elasticità trasversale del materiale costituente l'albero, l la sua lunghezza, ed I_p il momento d'inerzia di figura della sua sezione retta.

Nel caso di sezione circolare il momento d'inerzia di figura vale:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

La caratteristica elastica dell'albero sarà allora:

$$k = \frac{M_t}{\vartheta} = \frac{GI_p}{l} = G\frac{\pi d^4}{32l}$$

Data la disposizione della massa volanica è evidente che nella configurazione di equilibrio statico l'albero non è soggetto ad alcun momento esterno; per tale configurazione, quindi, si ha: $M_t=\theta=0$.

Quando il disco, dopo essere stato ruotato dell'angolo θ_0 viene abbandonato a se stesso, devono valere le condizioni di equilibrio dinamico, e in particolare dovrà essere:

$$\vec{M} + \vec{M}' = 0$$

con:

$$M = -k\vartheta$$
$$M' = -J_0\ddot{\vartheta}$$

L'equazione differenziale del moto sarà quindi data da:

$$J_0\ddot{\vartheta} + k\vartheta = 0$$

che, ove si ponga:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J_0}}$$

si può scrivere:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_n^2\vartheta = 0$$

formalmente identica alla (4).
La soluzione sarà pertanto del tipo (5), ossia:

$$\vartheta(t) = \Theta\cos(\omega_n t + \varphi)$$

con:

$$\Theta = \sqrt{\vartheta_0^2 + (\omega_0/\omega_n)^2}; \qquad \varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{\omega_0}{\vartheta_0\omega_n}\right)$$

C). Due masse volaniche di momento di inerzia J_1 e J_2 sono collegate tra loro da un albero elastico di lunghezza L e diametro d e ruotano con la medesima velocità angolare ω_0 costante (fig. 18).
Ipotizzando che ad un dato istante una causa esterna qualsiasi abbia provocato una rotazione relativa fra le due masse si vuole studiare, cessata detta causa, il conseguente moto relativo.
Detto t_0 l'istante in cui sul sistema non agisce più la causa che ne ha provocato la deformazione, nella condizione di equilibrio dinamico:

$$\vec{M} + \vec{M}' = 0$$

scritta per tutti gli istanti successivi, deve essere $\vec{M} = 0$ e quindi anche $\vec{M}' = 0$. Ciò vuol dire che la condizione di equilibrio dinamico si riduce in definitiva a:

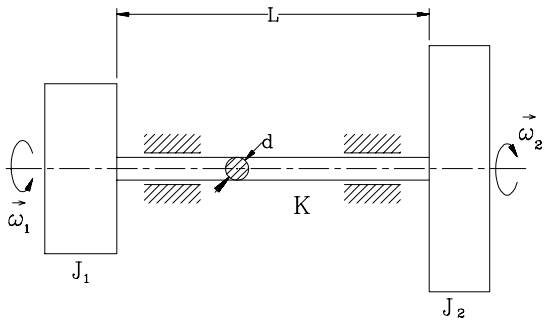


Figura 18

$$J_1\dot{\omega}_1 + J_2\dot{\omega}_2 = 0$$

essendo $\dot{\omega}_1$ ed $\dot{\omega}_2$ le rispettive accelerazioni angolari.
Poiché il moto d'insieme del sistema, con velocità angolare ω_0, non può avere influenza sul moto relativo, nell'integrazione di quest'ultima, si possono ipotizzare anche, come condizioni iniziali, $\omega_1=\omega_2=0$; avremo allora:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$$

da cui:

$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\omega_1$$

Tale risultato mostra che in tale sistema le velocità angolari delle due masse sono inversamente proporzionali ai loro momenti d'inerzia, e, in particolare, il segno negativo indica che, in qualsiasi istante, esse saranno discordi.
Si può allora concludere che dovrà esservi di conseguenza una sezione dell'albero (**sezione nodale**) che non subirà alcuna rotazione relativa e rispetto alla quale ciascun volano si muoverà certamente di moto oscillatorio.
Allora dovrà esservi pure un unico valore per la pulsazione naturale del sistema e quindi per il periodo: se così non fosse, infatti, dopo un certo tempo ω_1 avrebbe lo stesso segno di ω_2 contraddicendo la precedente relazione.

Che tale conclusione non dipende dalle condizioni iniziali ora ipotizzate si deduce scrivendo separatamente le condizioni di equilibrio dinamico di ciascuna delle due masse del sistema; dovremo scrivere:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + k(\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0 \\ J_2\dot{\omega}_2 + k(\vartheta_2 - \vartheta_1) &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

con:

$$k = \frac{GI_p}{L} = \frac{G\pi d^4}{32L}$$

e che devono essere contemporaneamente verificate.
Per queste due equazioni differenziali del moto si possono assumere come soluzioni:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \omega_0 t + A\cos(\omega_{n1}t - \varphi_1) \\ \vartheta_2 &= \omega_0 t + B\cos(\omega_{n2}t - \varphi_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

le quali, ovviamente dovranno soddisfare le precedenti per qualsiasi valore di t.
Se deriviamo due volte queste ultime otteniamo:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\omega_{n1}^2 A\cos\left(\omega_{n1}t-\varphi_1\right)\\ \dot{\omega}_2 &= -\omega_{n2}^2 B\cos\left(\omega_{n2}t-\varphi_2\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

Ora poiché dalle (8) si ha:

$$\begin{aligned}k\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right) &= J_1\dot{\omega}_1\\ k\left(\vartheta_2-\vartheta_1\right) &= -J_2\dot{\omega}_2\end{aligned}$$

e quindi:

$$J_1\dot{\omega}_1 = -J_2\dot{\omega}_2$$

la sostituzione in queste ultime delle (10) dà:

$$-J_1\omega_{n1}^2 A\cos\left(\omega_{n1}t-\varphi_1\right) = J_2\omega_{n2}^2 B\cos\left(\omega_{n2}t-\varphi_2\right)$$

che risulta verificata solo se è $\omega_{n1}=\omega_{n2}=\omega_n$ e se è $\varphi_2=\varphi_1+\pi$;
ciò vuol dire che può esistere una sola frequenza di vibrazione, e che il moto dei due volani si svolge in opposizione di fase.
Pertanto dovremo scrivere:

$$J_1\omega_n^2 A\cos\left(\omega_n t-\varphi_1\right) = J_2\omega_n^2 B\cos\left(\omega_n t-\varphi_1\right)$$

da cui:

$$\frac{A}{B}=\frac{J_2}{J_1}$$

e quindi le (9) diventano:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \omega_0 t + A\cos\left(\omega_n t-\varphi_1\right)\\ \vartheta_2 &= \omega_0 t + A\frac{J_1}{J_2}\cos\left(\omega_n t-\varphi_1\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(9')}$$

da cui:

$$\vartheta_1-\vartheta_2 = A\left(1-\frac{J_1}{J_2}\right)\cos\left(\omega_n t-\varphi_1\right)$$

Le (9') derivate una volta danno:

$$\omega_1 = \omega_0 - A\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \varphi_1)$$
$$\omega_2 = \omega_0 + A\frac{J_1}{J_2}\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \varphi_1)$$

da cui:

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = -\frac{J_1}{J_2}$$

e questo è il risultato che giustifica le condizioni iniziali poste all'inizio. Operando nelle (10) le stesse sostituzioni utilizzate nelle (9), si ha poi:

$$\dot{\omega}_1 = -\omega_n^2 A\cos(\omega_n t - \varphi_1)$$
$$\dot{\omega}_2 = -\omega_n^2 A\frac{J_1}{J_2}\cos(\omega_n t - \varphi_1) \qquad \textbf{(10')}$$

La prima delle (8) si può allora scrivere:

$$J_1\omega_n^2 A\cos(\omega_n t - \varphi_1) + kA\left(1 + \frac{J_1}{J_2}\right)\cos(\omega_n t - \varphi_1) = 0$$

ossia, semplificando:

$$-J_1\omega_n^2 + k\left(1 + \frac{J_1}{J_2}\right) = 0$$

Da qui si ricava il quadrato della pulsazione naturale dei due volani:

$$\omega_n^2 = k\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = k\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)$$

Questa stessa espressione può essere ricavata in modo più immediato dalle stesse (8) introducendo, per il moto relativo, la nuova variabile $\theta=\theta_2-\theta_1$, cui corrisponde $\omega=\omega_2-\omega_1$, e quindi $\dot{\omega} = \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1$.
Seguendo tale via, basta moltiplicare la prima delle (8) per J_2 e la seconda per J_1 ottenendo:

$$J_1 J_2\dot{\omega}_1 - kJ_2(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$
$$J_1 J_2\dot{\omega}_2 + kJ_1(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$

Sottraendo la prima dalla seconda si ha:

$$J_1 J_2(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1) + k(J_1 + J_2)(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$

dalla quale, sostituendo la nuova variabile:

$$\ddot{\vartheta} + k\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}\vartheta = 0$$

in cui è chiaramente:

$$\omega_n^2 = k\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}$$

E' possibile a questo punto determinare la *posizione della sezione nodale* considerando che se, come si è già trovato, è $\omega_n=\omega_{n1}=\omega_{n2}$, le stesse pulsazioni naturali, ω_{n1} ed ω_{n2}, devono aversi per i semisistemi costituiti da uno dei due volani e dal tratto di albero compreso fra questo e la sezione nodale, la quale proprio per essere tale può essere considerata come un incastro.

Se chiamiamo con x_1 la distanza della sezione nodale dal volano di momento di inerzia J_1, e con $x_2=(L-x_1)$ la distanza della stessa dall'altro volano, le costanti elastiche dei due semialberi saranno rispettivamente:

$$k_1 = \frac{GI_p}{x_1}$$

$$k_2 = \frac{GI_p}{L-x_1} = \frac{GI_p}{x_2}$$

e ciò implica:

$$k_1 x_1 = k_2 (L-x_1) \qquad \textbf{(11)}$$

Inoltre, possiamo scrivere per le pulsazioni naturali:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{k_1}{J_1} = \omega_{n2}^2 = \frac{k_2}{J_2}$$

che insieme alla (11) dà:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{L-x_1}{x_1} = \frac{L}{x_1} - 1 = \frac{x_2}{x_1}$$

ossia:

$$\frac{L}{x_1} = 1 + \frac{J_1}{J_2} = \frac{J_1 + J_2}{J_2}$$

e infine il valore di x_1 che risulta:

$$x_1 = L\frac{J_2}{J_1 + J_2}$$

La lunghezza x_2 del tratto di albero collegato all'altro volano sarà di conseguenza:

$$x_2 = x_1\frac{J_1}{J_2} = L\frac{J_2}{J_1 + J_2}\frac{J_1}{J_2} = L\frac{J_1}{J_1 + J_2}$$

Si può osservare, in conclusione, che la posizione della sezione nodale non varia nel tempo e che le lunghezze dei due tratti in cui essa divide l'albero sono inversamente proporzionali ai valori del momento d'inerzia dei corrispondenti volani.

D) Una variante del caso precedente, interessante perché lo si riscontra frequentemente nella pratica, è quello in cui le due masse volaniche di momento di inerzia J_1 e J_2 sono collegate tra loro da un albero elastico costituito da due differenti tronchi di lunghezza l_1 ed l_2 e diametri rispettivamente d_1 e d_2 (fig. 19).
Con le medesime ipotesi adottate prima, le equazioni di equilibrio dinamico per i due volani vanno ora scritte:

$$J_1\dot{\omega}_1 + k_e\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$
$$J_2\dot{\omega}_2 + k_e\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) = 0$$

(12)

dove, indicando con:

$$k_1 = \frac{GI_{p1}}{l_1} = \frac{G}{l_1}\frac{\pi d_1^4}{32}$$
$$k_2 = \frac{GI_{p2}}{l_2} = \frac{G}{l_2}\frac{\pi d_2^4}{32}$$

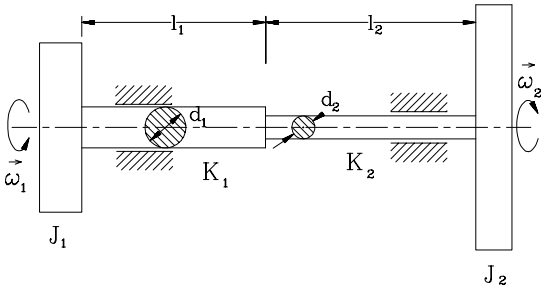


Figura 19

le costanti elastiche dei due tronchi, il valore della caratteristica elastica dell'albero, k_e, si ha da:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4}\right)$$

ossia:

$$k_e = \frac{\pi G}{32}\frac{l_1 l_2}{l_2 d_1^4 + l_1 d_2^4}$$

Dalle (12), allo stesso modo di come è stato visto nel caso C), si ottiene il valore della pulsazione naturale del sistema la cui espressione rimane formalmente identica; si ha cioè:

$$\omega_n^2 = k_e \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = k_e\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)$$

Per la ricerca della posizione della sezione nodale deve ancora essere valida, ovviamente, la condizione che le pulsazioni naturali dei due sottosistemi che risultano, uno a destra ed uno a sinistra di questa, devono essere entrambe eguali ad ω_n; bisogna però, questa volta, tener conto del fatto che la sezione nodale può cadere sull'uno o sull'altro dei due tronchi che costituiscono l'albero di collegamento dei due volani e pertanto, le rigidezze elastiche delle due parti risultanti, k_{e1} e k_{e2}, avranno espressione diversa in relazione a quale delle due condizioni si verifica.
In ogni caso la condizione $\omega_{n1}=\omega_{n2}=\omega_n$ si traduce nella condizione:

$$\frac{k_{e1}}{J_1} = \frac{k_{e2}}{J_2} = k_e \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}$$

Indicando con x la distanza della sezione nodale dalla sezione dell'albero in cui si ha la discontinuità, i due casi possibili si sviluppano nel modo seguente:
a) se la sezione nodale cade sul tronco di diametro d_2, ossia al di là della sezione di discontinuità, si ha:

$$\frac{1}{k_{e1}} = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{x}{d_2^4}\right)$$
$$\frac{1}{k_{e2}} = \frac{32}{\pi G}\frac{l_2 - x}{d_2^4}$$

e quindi:

$$\frac{k_{e1}}{k_{e2}} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{l_2 - x}{d_2^4}\frac{d_1^4 d_2^4}{l_1 d_2^4 + x d_1^4} = \frac{d_1^4 (l_2 - x)}{l_1 d_2^4 + x d_1^4}$$

Da qui si ricava:

$$x = \frac{J_2 l_2 d_1^4 - J_1 l_1 d_2^4}{d_1^4 (J_1 + J_2)}$$

b) se la sezione nodale cade sul tronco di diametro d_1, ossia al di qua

della sezione di discontinuità, si ha:

$$\frac{1}{k_{e1}} = \frac{32}{\pi G}\frac{l_1 - x}{d_1^4}$$

$$\frac{1}{k_{e2}} = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_2}{d_2^4} + \frac{x}{d_1^4}\right)$$

e quindi:

$$\frac{k_{e1}}{k_{e2}} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{d_1^4}{l_1 - x}\frac{l_2 d_1^4 + x d_2^4}{d_1^4 d_2^4} = \frac{l_2 d_1^4 + x d_2^4}{d_2^4 (l_1 - x)}$$

Da qui si ricava:

$$x = \frac{J_1 l_1 d_2^4 - J_2 l_2 d_1^4}{d_2^4 (J_1 + J_2)}$$

Ora, avendo definito x come distanza, il suo valore dovrà essere comunque positivo; e sarà così solamente se è:
- nel caso a):

$$J_2 l_2 d_1^4 > J_1 l_1 d_2^4 \quad \text{ossia} \quad \frac{J_1}{J_2} < \frac{d_1^4/l_1}{d_2^4/l_2} \quad \text{ossia} \quad \frac{k_1}{J_1} > \frac{k_2}{J_2}$$

- nel caso b):

$$J_1 l_1 d_2^4 > J_2 l_2 d_1^4 \quad \text{ossia} \quad \frac{J_1}{J_2} > \frac{d_1^4/l_1}{d_2^4/l_2} \quad \text{ossia} \quad \frac{k_1}{J_1} < \frac{k_2}{J_2}$$

L'interpretazione che si può dare a tale risultato è assolutamente ovvia: la sezione nodale andrà a cadere comunque su quella sezione, dell'uno o dell'altro tronco dell'albero di collegamento fra le due masse volaniche, per la quale risulti rispettata la condizione di uguaglianza delle pulsazioni naturali dei due semisistemi.

E) Due masse volaniche di momento di inerzia J_1 e J_2 sono calettate su due alberi elastici di rigidezza k_1 e k_2 collegati tra loro da una coppia di ruote dentate A e B che realizza il rapporto di trasmissione $\tau = z_A / z_B$.

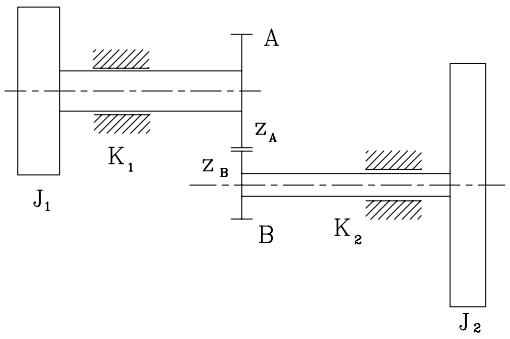


Figura 20

Si vuole determinare la pulsazione naturale del sistema e la posizione della sezione nodale, nella ipotesi che siano trascurabili i momenti d'inerzia delle ruote dentate rispetto a quelli dei due volani e che gli alberi siano puramente elastici.

Con riferimento alla fig. 20, siano θ_1 e θ_2 le rotazioni assolute dei corrispondenti volani e siano θ_A e θ_B le rotazioni assolute delle corrispondenti ruote dentate.

Le condizioni di equilibrio dinamico dei due volani sono espresse dalle relazioni:

$$J_1\ddot{\vartheta}_1 + k_1(\vartheta_1 - \vartheta_A) = 0$$
$$J_2\ddot{\vartheta}_2 + k_2(\vartheta_2 - \vartheta_B) = 0$$

mentre, se si indica il rapporto di trasmissione della coppia con $\tau = z_A / z_B = \vartheta_B / \vartheta_A = C_A / C_B$, l'equilibrio delle due ruote dentate è espresso dalla relazione:

$$k_1(\vartheta_1 - \vartheta_A) + \tau k_2(\vartheta_2 - \vartheta_B) = 0$$

ossia:

$$k_1(\vartheta_1 - \vartheta_A) = \tau k_2(\tau\vartheta_A - \vartheta_2)$$

e da questa si può ricavare:

$$\vartheta_A = \frac{k_1\vartheta_1 + \tau k_2\vartheta_2}{k_1 + \tau^2 k_2}$$

Si avrà pertanto:

$$\vartheta_1 - \vartheta_A = \vartheta_1 - \frac{k_1\vartheta_1 + \tau k_2\vartheta_2}{k_1 + \tau^2 k_2} = \frac{\tau^2 k_2\vartheta_1 - \tau k_2\vartheta_2}{k_1 + \tau^2 k_2} =$$
$$= \frac{\tau k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right)$$

e poi:

$$\vartheta_2 - \vartheta_B = \vartheta_2 - \tau\vartheta_A = \vartheta_2 - \tau\frac{k_1\vartheta_1 + \tau k_2\vartheta_2}{k_1 + \tau^2 k_2} =$$
$$= \frac{k_1\vartheta_2 - \tau k_1\vartheta_1}{k_1 + \tau^2 k_2} = -\frac{k_1}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right)$$

Sostituendo queste due ultime espressioni nelle relazioni di equilibrio, si ha:

$$J_1\ddot{\vartheta}_1 + \tau\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$
$$J_2\ddot{\vartheta}_2 - \frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$

Moltiplicando poi la prima di queste due equazioni per $J_2\tau$, e la seconda per J_1, si ha:

$$J_1 J_2\tau\ddot{\vartheta}_1 + J_2\tau^2\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$
$$J_1 J_2\ddot{\vartheta}_2 - J_1\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$

e, sottraendo, si ottiene:

$$J_1 J_2\left(\tau\ddot{\vartheta}_1 - \ddot{\vartheta}_2\right) + \left(J_1 + J_2\tau^2\right)\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\left(\tau\vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 0$$

Ponendo $\vartheta = \tau\vartheta_1 - \vartheta_2$, e quindi $\ddot{\vartheta} = \tau\ddot{\vartheta}_1 - \ddot{\vartheta}_2$, si ha l'equazione differenziale del moto relativo:

$$J_1 J_2\ddot{\vartheta} + \left(J_1 + J_2\tau^2\right)\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\vartheta = 0$$

ossia:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{J_1 + J_2\tau^2}{J_1 J_2}\frac{k_1 k_2}{k_1 + \tau^2 k_2}\vartheta = 0$$

oppure:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\frac{\tau^2}{J_1} + \frac{1}{J_2}}{\frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\vartheta = 0$$

in cui è, chiaramente:

$$\omega_n^2 = \frac{\frac{\tau^2}{J_1} + \frac{1}{J_2}}{\frac{\tau^2}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = k_{eq}\frac{\tau^2}{J_1} + \frac{1}{J_2}$$

Confrontando questo risultato con l'analogo trovato per il caso C), si vede che la pulsazione naturale equivale a quella che si otterrebbe se il primo volano del sistema avesse momento di inerzia pari a τ^2/J_1 e la rigidezza del tronco d'albero cui esso è collegato fosse pari a τ^2/k_1; tale circostanza trova la sua logica spiegazione nel fatto che il rapporto di trasmissione τ della coppia dentata non è solamente il rapporto tra le rotazioni ma anche rapporto (inverso) fra i momenti che si trasmettono lungo il collega mento fra i due volani.

Per quanto concerne la determinazione della posizione della sezione nodale, una volta identificato il sistema equivalente, il procedimento è del tutto analogo a quello del caso precedente.

§ 10 - Vibrazioni libere con smorzamento viscoso.

Si consideri, come nello schema di fig. 21, un corpo di massa concentrata m sospeso ad una molla di rigidezza k e vincolato ad uno smorzatore di tipo viscoso di cui sia c il coefficiente di smorzamento.
Supponendo che la massa possa spostarsi solamente nella direzione della verticale se ne vuole studiare il moto che ne deriva se, dopo aver deformato il sistema, essa viene abbandonata al di fuori della posizione di equilibrio statico.
Nella configurazione di equilibrio statico il corpo è soggetto al suo peso P sorretto dalla reazione elastica del la molla che si è deformata di Δ rispetto alla sua lunghezza libera.
Deve quindi valere la relazione:

$$P = k\Delta$$

Deformiamo adesso il sistema spostando il corpo di x_0 da questa posizione di equilibrio, abbandonandolo, successivamente, con velocità v_0.

Sotto l'effetto della forza di richiamo della molla esso tenderà verso la precedente posizione.

Utilizzando le equazioni cardinali della dinamica, la condizione di equilibrio del sistema per la generica configurazione si può esprimere, in questo caso, attraverso la:

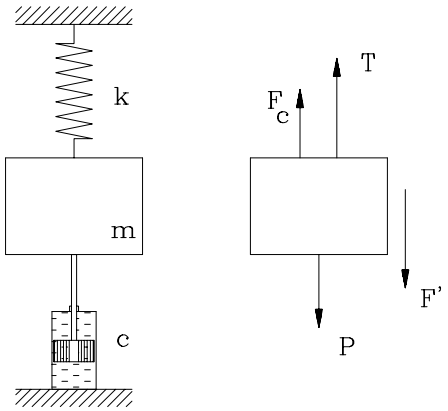


Figura 21

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0$$

in cui le forze attive, reattive, e d'inerzia sono:
- la forza peso, P;
- la reazione elastica della molla, $-k(x+\Delta)$;
- la reazione dello smorzatore viscoso, $-c\dot{x}$;
- la forza d'inerzia, $-m\ddot{x}$.

Pertanto, potremo scrivere:

$$P - k(x+\Delta) - c\dot{x} - m\ddot{x} = 0$$

Semplificando in base alla precedente condizione di equilibrio statico e cambiando di segno si ottiene l'equazione differenziale del moto nella forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

la quale, una volta integrata, ci darà la legge del moto del corpo in esame.

Conviene, tuttavia, prima di procedere alla integrazione, modificarne la forma in modo più opportuno, introducendo sia il **coefficiente di smorzamento critico**, c_c , il cui significato sarà chiarito appresso, sia il **fattore di smorzamento**, d.

Chiameremo critico il coefficiente di smorzamento quando esso avrà il valore:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

essendo, come sempre, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ la pulsazione naturale del sistema; e si noti subito come il valore del coefficiente di smorzamento critico dipende esclusivamente dalla costante elastica e dalla massa del corpo.

Chiameremo fattore di smorzamento il rapporto $d = c/c_c$, che si configura quindi come un numero che indica se il valore del coefficiente di smorzamento, c, del sistema è maggiore, eguale, o minore del valore critico, c_c, prima definito.

Per introdurre tali parametri, dividiamo per m la (13) ottenendo:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Poiché é $k/m = \omega_n^2$, ed inoltre:

$$\frac{c}{m} = \frac{c}{m}\frac{2\omega_n}{2\omega_n} = 2\frac{c}{2m\omega_n}\omega_n = 2\frac{c}{c_c}\omega_n = 2d\omega_n$$

possiamo ancora scrivere:

$$\ddot{x} + 2d\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

La soluzione di questa equazione differenziale potrà essere del tipo:

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \qquad \textbf{(15)}$$

dove A_1 ed A_2 sono le costanti da determinare in base alle condizioni iniziali, mentre α_1 ed α_2 sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + 2d\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0$$

Il discriminante di questa equazione è:

$$d^2\omega_n^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2\left(d^2 - 1\right)$$

e la sua forma mette subito in evidenza come il numero ed il tipo delle radici della equazione caratteristica dipendono essenzialmente dall'essere d maggiore, eguale, o minore dell'unità, ossia dall'essere c maggiore, eguale, o minore di c_c; e si può prevedere che a questi tre casi corrisponderanno tre tipi di moto diversi per il corpo.

- caso: $d > 1 \Rightarrow c > c_c$

Le radici della equazione caratteristica, reali e distinte, sono:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -d\omega_n + \omega_n\sqrt{d^2-1} = -\omega_n\left(d - \sqrt{d^2-1}\right)\\ \alpha_2 &= -d\omega_n - \omega_n\sqrt{d^2-1} = -\omega_n\left(d + \sqrt{d^2-1}\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(16)}$$

Ora, poiché è sicuramente $\sqrt{d^2-1} < d$, le quantità entro parentesi sono certamente positive e quindi entrambe le radici sono negative; pertanto,

in questo caso, la soluzione dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$x = A_1 e^{-|\alpha_1| t} + A_2 e^{-|\alpha_2| t} \qquad \textbf{(17)}$$

La forma della (17) rivela che la massa avrà un moto aperiodico di tipo esponenziale con esponente negativo, e ciò vuol dire che il corpo tenderà alla posizione di equilibrio in un tempo infinito, e non la attraverserà mai.
Se poniamo nelle (16):

$$\lambda = d\omega_n \qquad \text{e} \qquad \sigma = \omega_n \sqrt{d^2 - 1}$$

essendo, per quanto detto, $\lambda > \sigma > 0$, avremo:

$$\alpha_1 = -\lambda + \sigma$$
$$\alpha_2 = -\lambda - \sigma$$

la soluzione della (14) si può mettere nella forma:

$$x = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sigma t} + A_2 e^{-\sigma t} \right) \qquad \textbf{(18)}$$

E se ancora poniamo $A_1=(A+B)/2$ e $A_2=(A-B)/2$, otteniamo:

$$x = e^{-\lambda t}\left(A\frac{e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}}{2} + B\frac{e^{\sigma t} - e^{-\sigma t}}{2} \right)$$

ossia:

$$x = e^{-\lambda t}\left[A\,\mathrm{ch}(\sigma t) + B\,\mathrm{sh}(\sigma t) \right] \qquad \textbf{(19)}$$

Cerchiamo le costanti di integrazione per il caso in cui all'istante t=0 sia $x=x_0$ e $\dot{x}_0 = v_0$.
Nel caso della forma (17) o (18) avremo per t=0:

$$x_0 = A_1 + A_2$$
$$v_0 = -\left(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2\right) = (\sigma - \lambda) A_1 + (\sigma + \lambda) A_2$$

da cui:

$$A_1 = \frac{x_0(\sigma + \lambda) + v_0}{2\sigma}; \quad A_2 = \frac{x_0(\sigma - \lambda) - v_0}{2\sigma} \qquad \textbf{(20)}$$

mentre, per la forma (19), avremo:

$$x_0 = A; \quad v_0 = -\lambda A + \sigma B$$

e quindi:

$$A = x_0; \quad \mathrm{B} = \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sigma} = \frac{v_0 + x_0 \omega_n d}{\omega_n \sqrt{d^2 - 1}} \qquad \textbf{(21)}$$

Pertanto la legge del moto del corpo potrà essere indifferentemente espressa dalla:

$$x = \frac{e^{-\lambda t}}{2\sigma}\left\{\left[x_0(\sigma+\lambda)+v_0\right]e^{\sigma t} + \left[x_0(\sigma-\lambda)-v_0\right]e^{-\sigma t}\right\} \qquad \textbf{(18')}$$

oppure dalla:

$$x = e^{-\lambda t}\left[x_0 \,\mathrm{ch}(\sigma t) + \frac{v_0 + x_0\omega_n d}{\omega_n\sqrt{d^2-1}}\,\mathrm{sh}(\sigma t)\right] \qquad \textbf{(19')}$$

con $\lambda = d\omega_n$ e $\sigma = \omega_n\sqrt{d^2-1}$ come si è posto precedentemente.

Gli altri casi particolari di condizioni iniziali si possono ricavare semplicemente ponendo x_0=0, oppure v_0=0.

La risposta del sistema al variare del valore del fattore di smorzamento è riportato in fig. 22; sono state assunte come condizioni iniziali velocità nulla e spostamento unitario.

Come era da prevedersi, la massa tende alla posizione di equilibrio statico in un tempo sempre più lungo man mano che aumenta il valore di d.

Se, nelle condizioni iniziali, si scambiano i valori di spostamento e velocità, ossia si pone x_0=0 e v_0=1, la forma della risposta diventa una di quelle rappresentate in fig. 23.

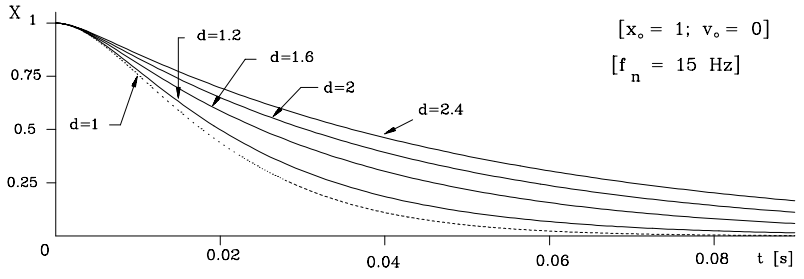


Figura 22

Si può notare che, mentre il variare del fattore di smorzamento produce ancora il medesimo effetto, il valore dell'ampiezza massima, per curve corrispondenti, risulta molto minore, e tale divario dipende essenzialmente dalla frequenza naturale del sistema.

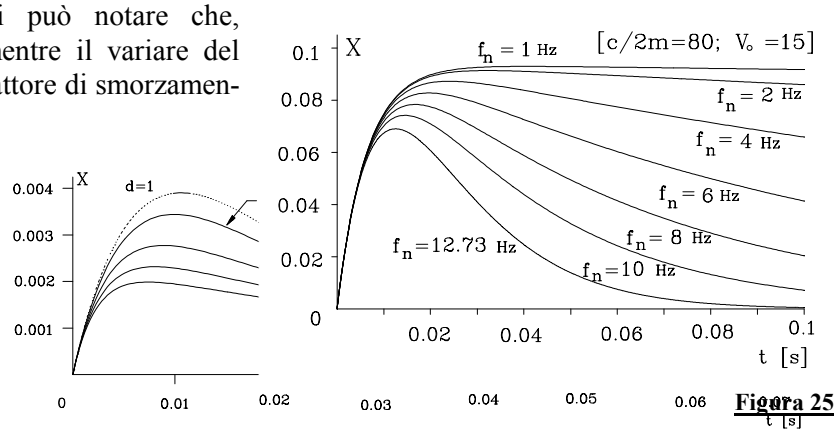


Figura 25

Figura 23

Infatti, prescindendo dalla presenza delle azioni dissipatrici dovute al fluido viscoso, si può capire che quando si allontana la massa dalla sua posizione di equilibrio statico di una quantità x_0 le si essa acquista una energia potenziale elastica pari ad $1/2\ k\ x^2_0$; quando le si imprime una velocità iniziale v_0 essa acquista una energia cinetica pari ad $1/2\ mv^2_0$. Pertanto il valore di v_0 necessario ad ottenere una elongazione pari ad x_0 risulterebbe pari a:

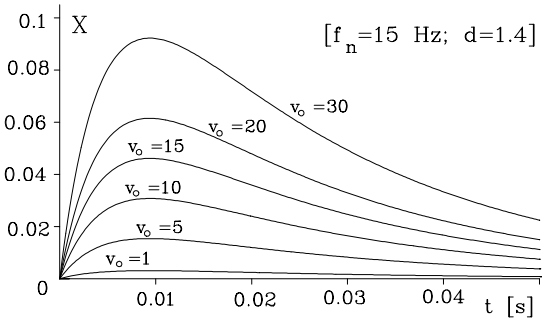


Figura 24

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x_0 = \omega_n x_0$$

In questo caso il valore di v_0 dovrà essere ancora maggiore perché parte dell'energia cinetica verrà comunque assorbita dallo smorzatore.
La fig. 24 mette in evidenza, per il caso particolare in cui il fattore di smorzamento sia d=1.4, come varia la risposta al variare, appunto, del valore di v_0; mentre in fig. 25 è mostrata l'influenza del variare della pulsazione naturale del sistema per data velocità iniziale e dato coefficiente di smorzamento.

In questo secondo caso sembrerebbe che, pur restando costante il valore del coefficiente di smorzamento, la risposta del sistema risulta via via sempre meno smorzata man mano che il valore della frequenza naturale diminuisce; ciò di fatto è ovvio in quanto la frequenza naturale del sistema entra a definire il coefficiente di smorzamento critico e quindi del fattore di smorzamento.

- caso: $d=1 \Rightarrow c=c_c$

Il discriminante dell'equazione caratteristica si annulla, e si avrà quindi una radice doppia.

In questo caso, allora, il tipo di soluzione ipotizzata per la (14) non va più bene perché "*condizione necessaria e sufficiente perché una radice di una equazione sia doppia è che essa soddisfi non solo l'equazione ma anche la sua derivata prima*" e quindi "l'equazione differenziale deve possedere sia la soluzione del tipo $e^{\alpha t}$ sia la soluzione del tipo $te^{\alpha t}$.

Con d=1, la radice doppia dell'equazione caratteristica è $\alpha=-\omega_n$ e quindi possiamo porre come soluzione:

$$x = (A + Bt)e^{\alpha t} = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \qquad \textbf{(22)}$$

Vediamo che in questo caso la soluzione è costituita dal prodotto di una funzione lineare e di una funzione esponenziale con esponente negativo; pertanto il corpo ancora una volta tenderà a raggiungere, in un tempo infinito, la posizione di equilibrio statico senza mai attraversarla, ma la rapidità con cui ciò avviene è sempre maggiore (fig. 22 e 23) che non nel caso in cui è d>1: l'esponenziale negativo predomina sulla funzione lineare.

Cerchiamo le costanti di integrazione per il caso in cui all'istante t=0 sia $x=x_0$ e $\dot{x} = v_0$.

Avremo:

$$x_0 = A \quad \text{e} \quad v_0 = B - A\omega_n$$

e quindi:

$$A = x_0 \qquad \text{e} \qquad B = v_0 - \omega_n x_0$$

La funzione che riproduce la risposta del sistema sarà quindi data da:

$$x = \left[x_0 + \left(v_0 + \omega_n x_0\right)t\right]e^{-\omega_n t} \qquad \textbf{(23)}$$

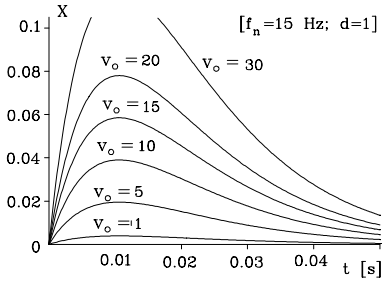


Figura 26

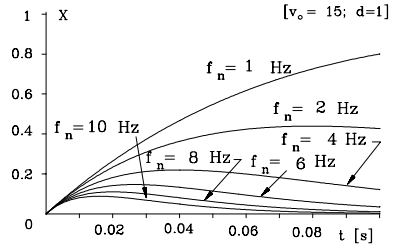


Figura 27

Il modificarsi della risposta al variare della velocità iniziale è mostrato in fig. 26 ed il risultato è analogo a quello visto nel precedente caso; vale appena notare che a parità di condizioni la risposta è un po' più elevata in ampiezza a causa del minor valore del fattore di smorzamento.
Le medesime considerazioni valgono anche per il caso mostrato in fig. 27 in cui per data velocità iniziale si suppone variabile la frequenza naturale del sistema.

- caso: $d < 1 \Rightarrow c < c_c$

Il discriminante della equazione caratteristica risulta negativo e avremo quindi due radici complesse coniugate:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -d\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-d^2} = -\omega_n d - i\omega_s \\ \alpha_2 &= -d\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-d^2} = -\omega_n d + i\omega_s \end{aligned} \qquad \textbf{(24)}$$

avendo posto:

$$\omega_s = \omega_n\sqrt{1-d^2} \qquad \textbf{(25)}$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà allora del tipo:

$$x = e^{-\omega_n t}\left(A_1 e^{-i\omega_s t} + A_2 e^{i\omega_s t}\right)$$

la quale ponendo:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{B}{i}\right) \qquad \text{e} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{i}\right)$$

si può scrivere:

$$x = e^{-d\omega_n t}\left[\frac{1}{2}\left(A + \frac{B}{i}\right)e^{-i\omega_s t} + \frac{1}{2}\left(A - \frac{B}{i}\right)e^{i\omega_s t}\right] =$$

$$= e^{-d\omega_n t}\left[A\frac{e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t}}{2} + B\frac{e^{i\omega_s t} - e^{-i\omega_s t}}{2i}\right] =$$

$$= e^{-d\omega_n t}\left[A\cos(\omega_s t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_s t)\right]$$

Con la sostituzione A= Xcosφ e B=Xsenφ, quest'ultima può essere ancora trasformata in:

$$x = Xe^{-d\omega_n t}\cos(\omega_s t + \varphi) \qquad \textbf{(26)}$$

con X e φ costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali.
Se all'istante t=0 ipotizziamo essere $x=x_0$ e $\dot{x} = v_0$, si ha per le costanti di integrazione:

$$x_0 = X\cos\varphi \qquad \text{e} \qquad v_0 = -X(d\omega_n\cos\varphi - \omega_s\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

da cui:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + x_0 d\omega_n)^2}{\omega_s^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \mathrm{atan}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_s} + \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\right)$$

La forma della risposta (fig. 28 e 29) che si ottiene mostra che, in questo caso, il moto del corpo è effettivamente di tipo vibratorio; la sua ampiezza tuttavia, per la presenza a fattore dell'esponenziale con espo-

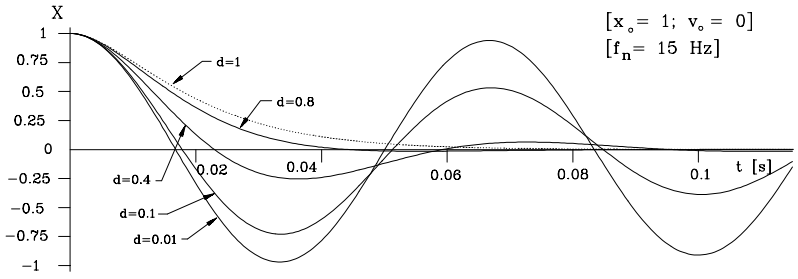


Figura 28

nente negativo, decresce col tempo e finirà quindi con l'annullarsi.
Inoltre il moto si svolge con una frequenza più bassa di quella naturale, in quanto il valore di ω_s (25), che possiamo adesso chiamare **pulsazione smorzata**, è certamente minore di quello della pulsazione naturale, ω_n; alla pulsazione smorzata corrisponde il valore dello **pseudoperiodo** $T=2\pi/\omega_s$.

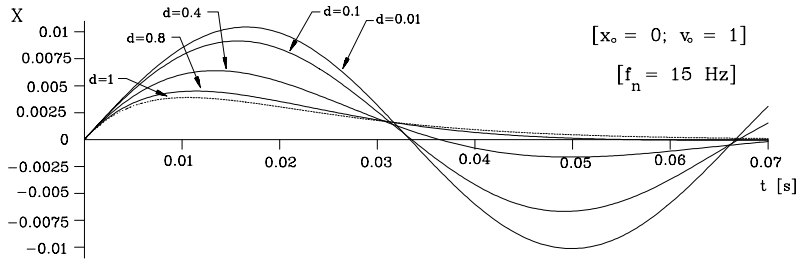


Figura 29

Nelle fig. 30 e 31 sono mostrate le variazioni dovute, rispettivamente, a velocità iniziali diverse ed a differenti valori della frequenza naturale del sistema, a parità dei restanti parametri.
Si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte nei casi precedenti.
Qualunque siano i valori prefissati per le condizioni iniziali, i valori massimi (e minimi) della oscillazione della massa si hanno per i valori di t per cui si verifica:

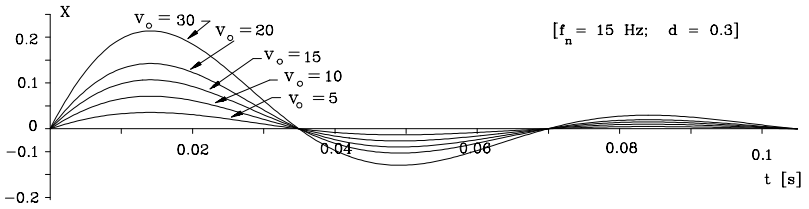


Figura 30

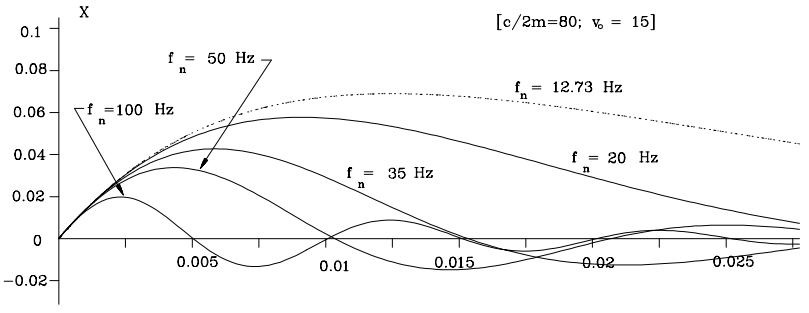


Figura 31

$$\cos(\omega_s t - \varphi) = \pm\sqrt{1-d^2} = \frac{\omega_s}{\omega_n}$$

mentre quando è:

$$\cos(\omega_s t - \varphi) = 1$$

la (26) risulta (fig. 32) tangente alle curve:

$$x' = Xe^{-d\omega_n t} \qquad \text{e} \qquad x'' = -Xe^{-d\omega_n t}$$

le quali, pur non toccando i punti di massimo o di minimo della (26), danno una precisa indicazione di come variano le successive ampiezze dell'oscillazione della massa man mano che tende alla posizione di equilibrio statico.
Tale indicazione trova riscontro nel valore del **decremento logaritmico** δ della oscillazione definito come logaritmo naturale del rapporto fra due ampiezze successive distanti fra loro di uno pseudoperiodo, T_s, ossia:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{Xe^{-d\omega_n t}\cos(\omega_s t - \varphi)}{Xe^{-d\omega_n (t+T_s)}\cos[\omega_s (t+T_s) - \varphi]}$$

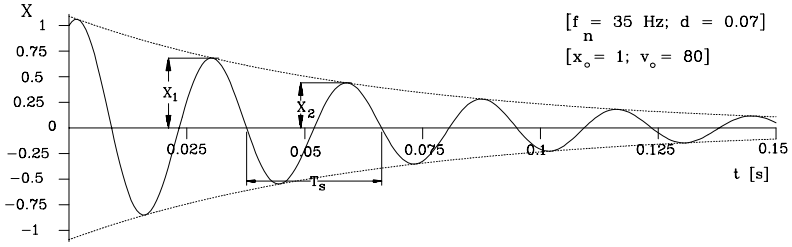


Figura 32

Ora, poiché il valore della funzione coseno è lo stesso dopo un tempo pari a T_s, quanto sopra equivale a:

$$\delta = \ln\frac{e^{-d\omega_n t}}{e^{-d\omega_n (t+T_s)}} = \ln\frac{e^{d\omega_n t}e^{d\omega_n T_s}}{e^{d\omega_n t}} = \ln\left(e^{d\omega_n T_s}\right)$$

e quindi è:

$$\delta = d\omega_n T_s = \frac{2\pi d\omega_n}{\omega_s} = 2\pi\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}$$

Si intuisce allora come, potendo ricavare in qualche modo il valore di δ, diventa immediato risalire al valore del fattore di smorzamento del sistema.
Risulta infatti:

$$d = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

Il valore di δ si ricava agevolmente se si dispone di un diagramma come quello di fig. 32; tenendo presente che, al fine di ridurre l'errore di lettura delle ampiezze conviene riferirsi, non ad un solo periodo T_s, ma ad un conveniente intervallo di tempo pari ad n volte T_s, il valore del decremento logaritmico si ottiene dal rapporto fra le due ampiezze x_1 ed x_n lette direttamente sul grafico, e in questo caso, come si può facilmente verificare, sarà:

$$\delta_n = d\omega_n n T_s = 2n\pi \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}$$

e quindi:

$$d = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}$$

Inoltre, dalla lettura di T_s, si perviene anche alla determinazione della pulsazione naturale ω_n, e quindi al valore del coefficiente di smorzamento c.
Infatti, riprendendo la (25):

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_n \sqrt{1-d^2} = \omega_n 2n\pi \frac{d}{\delta_n} = \omega_n \frac{2n\pi}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}$$

da cui:

$$\omega_n = \frac{\omega_s \sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{2n\pi} = \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s}$$

E ancora:

$$c = c_c d = 2m\omega_n d = 2md \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s}$$

da cui:

$$c = 2m \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}} \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s} = \frac{2m\delta_n}{nT_s}$$

L'utilità di tale procedimento si riscontra allorquando si debba risalire, per via sperimentale, al valore del coefficiente di smorzamento di uno smorzatore, oppure ad un valore equivalente di c e della pulsazione na-

turale di un sistema complesso (per es. un sistema a masse distribuite con certo smorzamento interno non altrimenti determinabile).

§ 11 - Vibrazioni forzate senza smorzamento.

a)

La possibilità che lo studio delle vibrazioni di un sistema meccanico possa essere ricondotto a un caso di vibrazioni forzate in assenza di smorzamento è in effetti una pura astrazione, dal momento che, non esiste un sistema reale che non contenga in sè una qualche caratteristica dissipativa, qualunque sia la forma che ad essa si vuol dare.

E' tuttavia utile analizzare questo caso in quanto i risultati possono essere considerati ancora validi per quei casi limite in cui la caratteristica dissipativa è presente ma con una influenza trascurabile rispetto agli altri parametri del sistema.

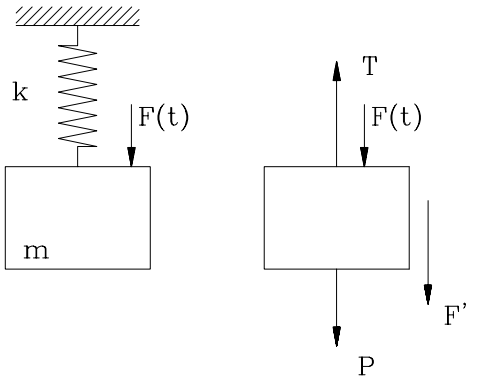


Figura 33

In tale ottica allora (fig. 33), si può considerare il corpo di massa m sospeso ad una molla di rigidezza k, con possibilità di moto soltanto nella direzione verticale, e sollecitato da una forza la cui intensità sia funzione del tempo secondo una legge sinusoidale del tipo:

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

La condizione di equilibrio dinamico del corpo può esprimersi per mezzo delle equazioni cardinali, e in particolare per mezzo della:

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0$$

dove $\vec{F}$ sta a indicare la risultante di tutte le forze agenti su di esso: il peso, P, la reazione elastica della molla, -k(x+Δ), la forza eccitatrice esterna, $F_0\cos(\omega t)$; mentre $\vec{F}'$ sta ad indicare il risultante delle forze d'inerzia che, nel caso, equivale a $-m\ddot{x}$.

Possiamo allora scrivere:

$$P - k(x + \Delta) + F_0 \cos(\omega t) - m\ddot{x} = 0$$

che, tenendo conto che in condizioni di equilibrio statico è sempre $P = k\Delta$, riordinando, si scrive:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \qquad \textbf{(27)}$$

Dividendo per m, si ottiene:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

facendo comparire la pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ed il rapporto F_0/m che si può scrivere:

$$\frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k} \frac{k}{m} = \omega_n^2 \, \Delta F_0$$

Il fattore $\Delta F_0 = F_0/k$, la cui dimensione è una lunghezza, corrisponde all'*allungamento che subirebbe la molla se la forza F agisse staticamente con il suo valore massimo* F_0; con tale significato lo si può definire come "**Δ statico**".
Con tali posizioni, la forma canonica della (27) diventa allora:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \Delta F_0 \cos(\omega t) \qquad \textbf{(28)}$$

che è una equazione differenziale del secondo ordine, completa, a coefficienti costanti: come tale, la sua soluzione sarà data dalla somma della soluzione generale, già ricavata al § 7, che si ottiene dalla omogenea associata, e di una soluzione particolare che possiamo ipotizzare essere ancora di tipo sinusoidale.
La soluzione completa avrà quindi la forma:

$$x = X_0 \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) + X \cos(\omega t) \qquad \textbf{(29)}$$

dove è da trovare una espressione per il fattore X.
Avendo ipotizzato:

$$x_p = X \cos(\omega t) \qquad \textbf{(30)}$$

dovrà essere:

$$\dot{x}_p = -\omega X \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 X \cos(\omega t)$$

Sostituendo nella (28) si ottiene:

$$-\omega^2 X \cos(\omega t) + \omega_n^2 X \cos(\omega t) = -\omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega t)$$

ossia:

$$X\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) = \omega_n^2 \Delta F_0$$

Introducendo la frequenza ridotta, $r = \omega/\omega_n$, rapporto fra la frequenza

eccitatrice esterna e la frequenza naturale del sistema, quest'ultima si scrive:

$$X\left(1-r^2\right)=\Delta F_0$$

da cui:

$$X=\frac{\Delta F_0}{1-r^2} \tag{31}$$

La (30) si scriverà allora:

$$x_p=\frac{\Delta F_0}{1-r^2}\cos(\omega t)$$

e, di conseguenza, la (29) sarà:

$$x=X_0\,\mathrm{sen}\left(\omega_n t+\varphi\right)+\frac{\Delta F_0}{1-r^2}\cos(\omega t) \tag{32}$$

Per quanto concerne le condizioni iniziali, se ipotizziamo che, per t=0. sia x=x_0 ed $\dot{x}=v_0$, dalla precedente si ottiene:

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{\Delta F_0}{1-r^2}+X_0\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ v_0=\omega_n X_0\cos\varphi \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$X_0=\sqrt{\left(x_0-\frac{\Delta F_0}{1-r^2}\right)^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

per quanto riguarda l'ampiezza, mentre per la fase si ottiene:

$$\tan\varphi=\frac{\omega_n\left(x_0-\dfrac{\Delta F_0}{1-r^2}\right)}{v_0}$$

Osservando la (32) nel suo complesso si vede chiaramente che il moto risultante della massa è descritto dalla composizione di due vibrazioni con frequenze (quella naturale e quella della forzante) e fasi diverse.
Pertanto, tale composizione (v. Appendice B) darà luogo ad un moto del tipo:

$$x=X^*(t)\cos[\omega t+\Phi(t)]$$

un moto, cioè, in cui sia l'ampiezza che la fase non sono più costanti ma variabili nel tempo.

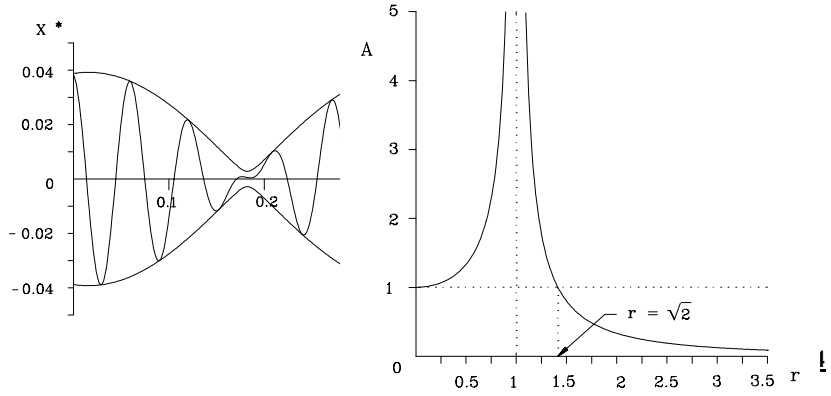


Figura 35

Chiamando con $\Delta\omega=\omega_n-\omega$ la differenza fra le due pulsazioni, ed utilizzando sinteticamente i simboli X_0 ed X per le ampiezze delle due risposte, risulta:

$$X^*(t) = \sqrt{X_0^2 + X^2 + 2XX_0 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \varphi)}$$

e

$$\tan\Phi(t) = \frac{X_0 \cos(\Delta\omega t + \varphi)}{X + X_0 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \varphi)}$$

Se il valore di $\Delta\omega$ è piccolo, ossia se i valori delle due frequenze non sono molto diversi fra loro, si evidenzia il fenomeno dei battimenti, come mostra la fig. 34.
Più interessante tuttavia è un'analisi della (31), ampiezza della risposta alla forzante, il cui valore dipende fortemente dalla frequenza ridotta $r = \omega/\omega_n$.
Risulta comodo, per tale analisi, introdurre il fattore di amplificazione A, ossia il rapporto adimensionale:

$$A = \frac{X}{\Delta F_0} = \frac{1}{1-r^2}$$

il cui valore è, in definitiva, un indice di comparazione di tale risposta con il "Δ statico".
Poiché il fattore di amplificazione, A, dipende dal valore di r, è utile esaminare la funzione A(r), che viene generalmente rappresentata in grafico (fig. 35) come |A|; non ha molto senso, infatti, il segno negativo.
I valori significativi per le ascisse di questa funzione sono:

$r = 0$ in cui A=1; $r = 1$ in cui $|A|=\infty$;
$r = \sqrt{2}$ in cui |A|=1; $r=\infty$ in cui A=0;

ed inoltre è:

$$|A|>1 \text{ per } 0 < r < \sqrt{2}$$

$|A|<1$ per $r > \sqrt{2}$

In corrispondenza al valore r=1, per il quale |A|=∞, si verifica il fenomeno della **risonanza**, definito come quella condizione in cui la risposta del sistema si esalta tendendo ad un'ampiezza di valore infinito.
Si comprende tuttavia che, trattandosi di moti oscillatori, l'avere trovato che per r=1 è |A|=∞, e quindi anche (31) X=∞, non può lasciar concludere che sia senz'altro (30) anche x_p=∞. Infatti, se così fosse realmente, ne verrebbe che il corpo compirebbe una oscillazione di ampiezza infinita in un tempo necessariamente finito (il periodo).
Si deve dire allora che in corrispondenza al valore r=1, la soluzione trovata per l'equazione del moto non è più corretta. In effetti per r=1 è $\omega=\omega_n$ e l'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega_n t) \qquad \textbf{(33)}$$

la cui soluzione particolare può essere del tipo:

$$x_r = X_r t \operatorname{sen}(\omega_n t) \qquad \textbf{(34)}$$

Ne segue:

$$\dot{x}_r = X_r\left[\operatorname{sen}(\omega_n t) + \omega_n t \cos(\omega_n t)\right]$$

$$\ddot{x}_r = X_r\left[\omega_n \cos(\omega_n t) + \omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n^2 t \operatorname{sen}(\omega_n t)\right] =$$

$$= X_r\left[2\omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n^2 t \operatorname{sen}(\omega_n t)\right]$$

e sostituendo nella (33):

$$X_r\left[2\omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n^2 t \operatorname{sen}(\omega_n t)\right] + \omega_n^2 X_r t \operatorname{sen}(\omega_n t) = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega_n t)$$

ossia:

$$2 X_r \cos(\omega_n t) = \omega_n \Delta F_0 \cos(\omega_n t)$$

da cui:

$$X_r = \frac{1}{2}\omega_n \Delta F_0$$

La soluzione completa dell'equazione del moto, in condizioni di risonanza, sarà data, quindi, da:

$$x_r = X_o \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) + \frac{1}{2}\Delta F_0 \omega_n t \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

In tal caso, per le condizioni iniziali, si ha:

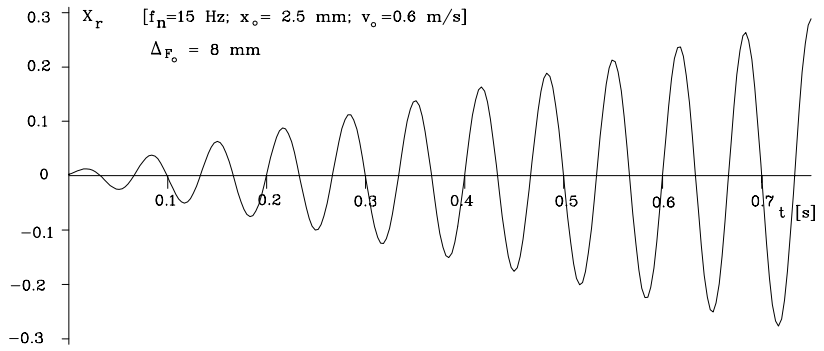


Figura 36

$$\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

per quanto riguarda l'ampiezza, mentre per la fase si ottiene:

$$\tan\varphi = \frac{\omega_n x_0}{v_0}$$

e la risposta del sistema sarà come quella di fig. 36.

b)

Un caso di vibrazioni forzate assai frequente nei sistemi meccanici è quello in cui l'ampiezza della forza eccitatrice esterna dipende dal quadrato della pulsazione della stessa.
E' il caso di fig. 37 in cui il corpo (A) di massa M', obbligato ad un moto traslatorio, è sollecitato dalla azione d'inerzia di un secondo corpo (B) di massa m che ruota con velocità angolare ω incernierato eccentricamente in punto O di (A).
Se si indica con ε l'eccentricità del corpo (B), l'accelerazione del suo baricentro, nel moto relativo ad (A), vale $\varepsilon\omega^2$, e la corrispondente forza d'inerzia vale $-m\varepsilon\omega^2$; lungo la direzione del moto di (A), allora, essa si farà sentire per la componente:

$$m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)$$

Indicando con M la somma M'+ m, l'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive allora:

$$-kx + m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t) - M\ddot{x} = 0$$

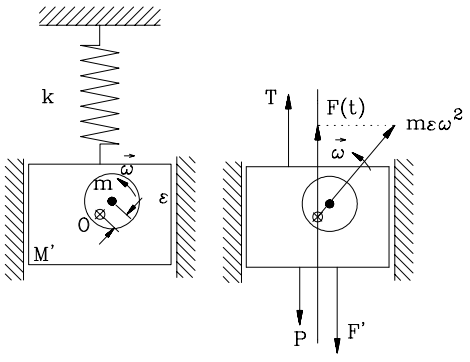


Figura 37

ossia:

$$M\ddot{x} + kx = m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)$$

Dividendo per M, ed introducendo la costante $x^*=\varepsilon$ m/M, che ha ovviamente le dimensioni di una lunghezza, si ha la forma:
Anche in questo caso si può ipotizzare per la soluzione particolare di questa equazione una forma del tipo:

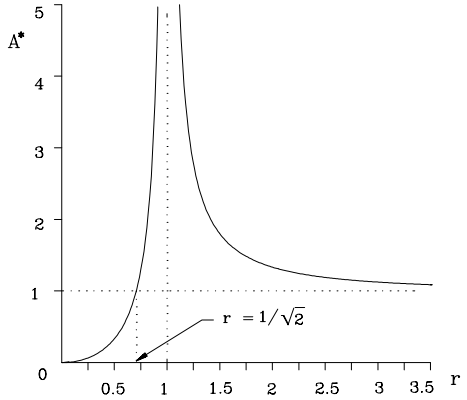


Figura 38

$$x_p = X\cos(\omega t)$$

ottenendo però:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = x^*\omega^2 \cos(\omega t)$$

e quindi:

$$X\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) = x^*\omega^2$$

che, dividendo per ω_n^2, si scriverà:

$$X\left(1 - r^2\right) = x^* r^2$$

da cui il fattore di amplificazione:

$$A^* = \frac{X}{x^*} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

La funzione $A^*(r)$ avrà ora un andamento diverso da quello visto nel caso a); la presenza a numeratore del termine r^2 darà il diagramma di fig. 38, che, come prima rappresenta di fatto la funzione |A (r)|.
I valori significativi per le ascisse di questa funzione sono, questa volta:

r=0 in cui A=0; r=1 in cui |A|=∞;
$r = 1/\sqrt{2}$ in cui |A|=1; r=∞ in cui A=0

ed inoltre:

|A|<1 per $0 < r < 1/\sqrt{2}$
|A|>1 per $r > 1/\sqrt{2}$

In corrispondenza al valore r=1, per il quale |A| =∞, si verifica ancora il fenomeno della risonanza.
Per tale valore, ripetendo le medesime considerazioni fatte, circa l'ampiezza della risposta in condizioni di risonanza, nel caso a), si ottiene, in

modo analogo:

$$X_r = \frac{1}{2} x^* \omega_n$$

§ 12 - Vibrazioni forzate con smorzamento di tipo viscoso.

a)
Se sul corpo dello schema indicato al § 10 agisce una forza eccitatrice esterna (fig. 39) del tipo:

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

l'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Dividendo per m, ed introducendo il fattore di smorzamento, d, la pulsazione naturale, ω_n, ed il "Δ statico", ΔF_0, come visto nel § 11, questa equazione differenziale del moto si può ricondurre alla forma:

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega t) \qquad \textbf{(35)}$$

La soluzione completa della (35) sarà data dalla somma della cosiddetta *risposta in transitorio*, (la soluzione della omogenea associata), e della *risposta a regime* (la soluzione particolare).
Se si ipotizza per la soluzione particolare ancora una forma sinusoidale della stessa frequenza della forzante, la risposta completa sarà una forma del tipo:

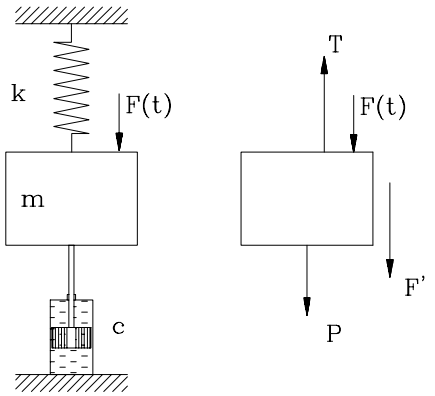


Figura 39

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + X \cos(\omega t + \varphi)$$

La risposta in transitorio avrà una delle tre forme già trovate al §10, in dipendenza del particolare valore assunto dal fattore di smorzamento, ed inoltre abbiamo visto che, comunque, dopo un tempo più o meno lungo, la sua influenza sarà nulla.
Per quanto concerne, invece, la risposta a regime la ricerca della solu-

zione particolare della (35) risulterà più agevole se, ricordando che è:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

si pone che la forza eccitatrice esterna sia la parte reale di una forma complessa $\overline{F} = F_0 e^{i\omega t}$ ossia $F = \Re\overline{F}$. Ne segue che anche per la soluzione particolare si può porre:

$$x = \Re\overline{x} = \Re\left[\overline{X}e^{i\omega t}\right]$$

in cui è:

$$\overline{x} = Xe^{i(\omega t+\varphi)} = Xe^{i\varphi}e^{i\omega t} = \overline{X}e^{i\omega t}$$

Partendo da tali presupposti avremo allora:

$$\overline{x} = \overline{X}e^{i\omega t}$$
$$\dot{\overline{x}} = i\omega\overline{X}e^{i\omega t}$$
$$\ddot{\overline{x}} = -\omega^2\overline{X}e^{i\omega t}$$

e quindi, sostituendo nella (35),

$$\overline{X}\left(-\omega^2 + 2id\omega_n\omega + \omega_n^2\right)e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} = \omega_n^2\Delta F_0 e^{i\omega t}$$

Dovrà quindi essere:

$$\overline{X}\left(-\omega^2 + 2id\omega_n\omega + \omega_n^2\right) = \omega_n^2\Delta F_0$$

ovvero, dividendo per ω_n^2, e facendo cioè comparire la frequenza ridotta:

$$\overline{X}\left[\left(1-r^2\right) + i\,2dr\right] = \Delta F_0$$

da cui:

$$\overline{X} = Xe^{i\varphi} = \frac{\Delta F_0}{\left(1-r^2\right) + i\,2dr}$$

che, razionalizzando, diventa:

$$\overline{X} = Xe^{i\varphi} = \frac{\Delta F_0}{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}\left[\left(1-r^2\right) - i\,2dr\right]$$

Si può, in definitiva, ricavare il modulo:

$$X = \frac{\Delta F_0}{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2} = \frac{\Delta F_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}}$$

e la fase:

$$\varphi = \text{arctg}\left(-\frac{2dr}{1-r^2}\right) \qquad \textbf{(36)}$$

per cui la soluzione particolare cercata assume la forma:

$$x_p = \frac{\Delta F_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

A regime, quindi, l'ampiezza della risposta del sistema alla sollecitazione esterna, così come il valore dello sfasamento, dipende adesso, sia dal rapporto delle frequenze, r, sia dal fattore di smorzamento, d.
Tale dipendenza si evidenzia esaminando (fig. 40 e 41) le variazioni che subisce, al variare di r, il fattore di amplificazione:

$$A = \frac{x_p}{\Delta F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}}$$

e la fase (36).

L'analisi dei punti caratteristici della funzione |A(r,d)|, ci dice (v. Appendice D) che è:

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \ \text{ per } \ r = 0 \\ A = 0 \ \text{ per } \ r = \infty \end{array}\right\} \ \text{indipendentemente dal valore di d}$$

Poi è ancora:

$$A = 1 \ \text{ per } \begin{cases} \mathrm{r} = \sqrt{2\left(1 - 2\mathrm{d}^2\right)} \\ 0 < \mathrm{d} \le 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

mentre se è $d > 1/\sqrt{2}$, ossia se è d>0.707, sarà sempre A<1.

Inoltre, ancora nel campo in cui è $0 < d \le 1/\sqrt{2}$, la funzione A(r,d) presenta un valore di **minimo** in corrispondenza al valore r=0 con A=1 come già visto, ed un **massimo** in corrispondenza dell'ascissa:

$$r_p = \sqrt{1-2d^2}$$

e di ordinata:

$$A_p = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}$$

Si vede quindi che al crescere di d in tale intervallo i valori di picco della funzione si spostano nel senso delle r decrescenti, e con valori via via decrescenti fino ad A=1, seguendo la legge data da:

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

rappresentata punteggiata in fig. 40.
Si può concludere quindi che, allorquando si desideri che la risposta del sistema non abbia un'ampiezza superiore al Δ statico, la scelta dei pa-

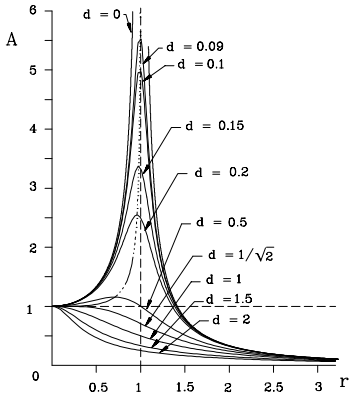


Figura 40

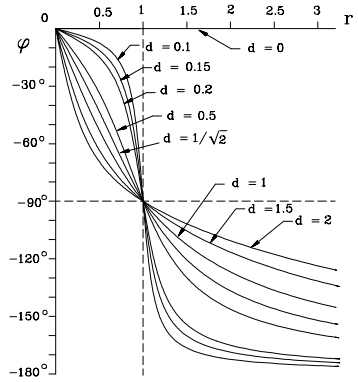


Figura 41

rametri deve essere tale da risultare $r > \sqrt{2(1-2d^2)}$, oppure scegliere un coefficiente di smorzamento idoneo a dare $d > 1/\sqrt{2}$.
L'angolo di fase (fig.41), qualunque sia il valore di d, assume sempre il valore di -π/2 quando r=1, e passa dal 4° al 3° quadrante quando r attraversa tale valore.
E' sempre φ=0 quando r=0, e φ=-π quando r=∞.

Una immagine sintetica della risposta a regime del sistema in esame si ottiene con una rappresentazione delle funzioni A(r) e φ(r) in coordinate polari.

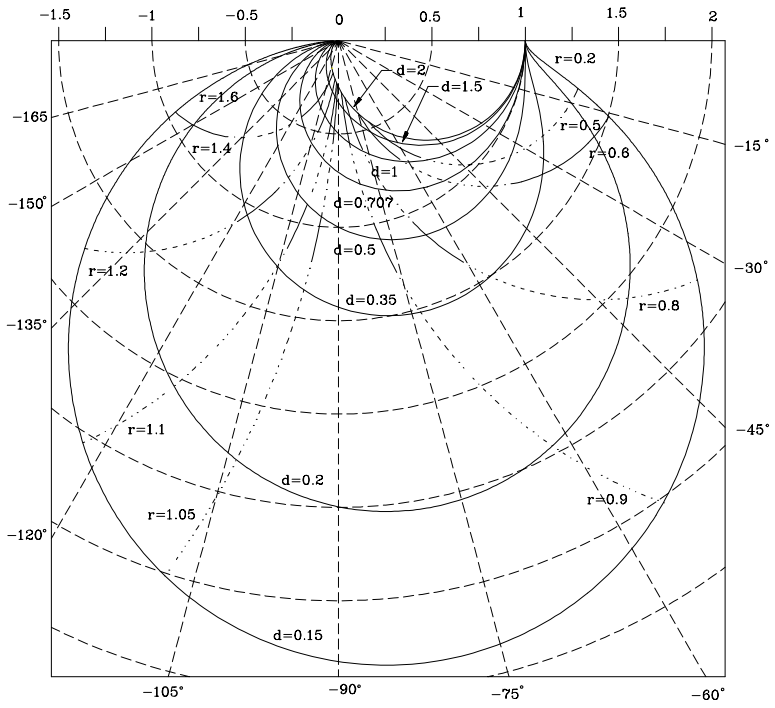


Figura 42

Tale rappresentazione, che va sotto il nome di *diagramma di Nyquist*, consente la lettura immediata del fattore di amplificazione e del corrispondente sfasamento per ogni prefissato valore della frequenza ridotta, r, e del fattore di smorzamento, d.

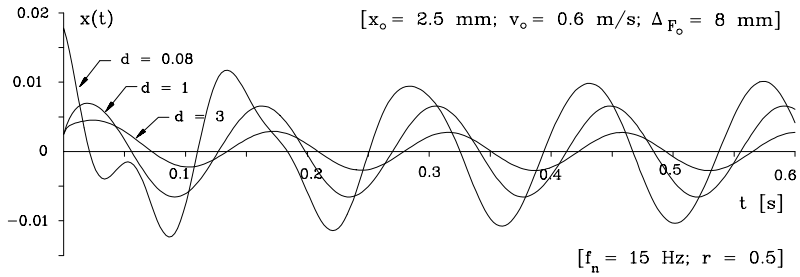


Figura 43

La fig. 42 mostra tale diagramma su cui sono riportate sia le curve a fattore di smorzamento (d) costante (in linea continua), sia le curve a frequenza ridotta (r) costante (in punteggiata).
La lunghezza del segmento che congiunge l'origine del riferimento con

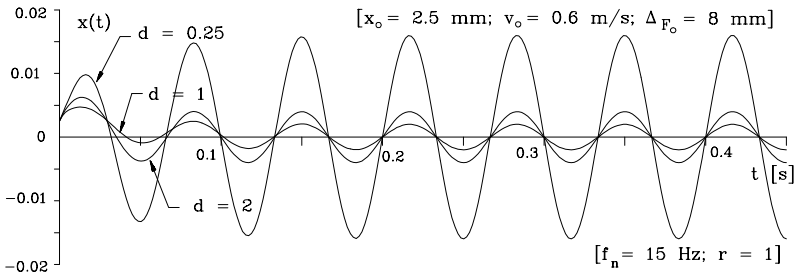


Figura 44

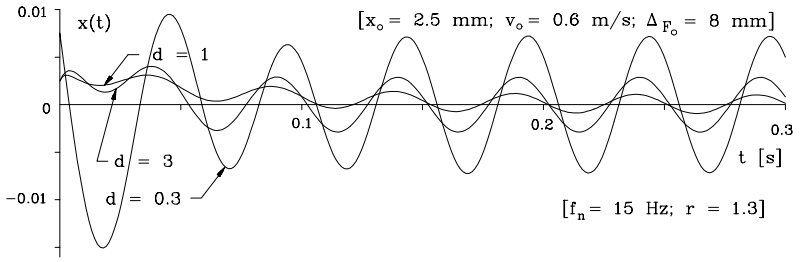


Figura 45

un punto della curva del valore di d prefissato da' il valore del fattore di amplificazione che si ottiene in corrispondenza al valore di r relativo alla curva ad r costante che passa per lo stesso punto; la direzione dello stesso segmento mostra il valore dell'angolo di fase per le medesime condizioni.

Per quanto riguarda la risposta completa del sistema le figg. 43, 44, e 45 mostrano tre diverse situazioni corrispondenti al caso in cui ci si trova, rispettivamente, al di sotto della risonanza, in risonanza o al di sopra della risonanza, e avendo scelto, in ciascuna, valori di fattori di smorzamento tali da avere, in transitorio, condizioni ipercritiche, critiche
o ipocritiche.
Si può rilevare, per ciascun caso, il differente tempo necessario affinché la forma dell'oscillazione assuma la forma sinusoidale corrispondente alla situazione di regime.

b)
Supponiamo adesso, in analogia a quanto già ipotizzato al § 11 b), che il sistema, con molla e smorzatore di tipo viscoso (fig. 46), sia sollecitato da una forza (inerziale) del tipo:

$$F = m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)$$

Se, anche qui, si indica con M la somma M'+m, ossia la massa totale del

sistema, l'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive:

$$-kx - c\dot{x} + m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t) - M\ddot{x} = 0$$

ossia:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)$$

Dividendo per M, ed introducendo la costante x =εm/M, che ha ovviamente le dimensioni di una lunghezza, si ha la forma:

$$\ddot{x} + 2d\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = x^*\omega^2 \cos(\omega t) \qquad \textbf{(37)}$$

La soluzione particolare di questa equazione differenziale può ancora essere una forma del tipo:

$$x_p = X\cos(\omega t + \varphi)$$

dove, però, l'espressione di X, seguendo il medesimo procedimento visto in a), è, questa volta:

$$X = \frac{x^* r^2}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2dr)^2}}$$

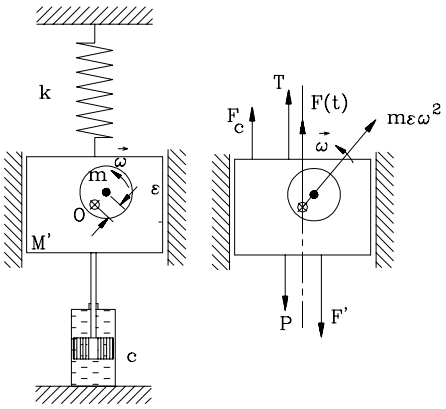


Figura 46

Il rapporto di amplificazione vale, allora:

$$A^* = \frac{X}{x^*} = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2dr)^2}}$$

mentre rimane identica l'espressione che consente la valutazione dell'angolo di fase.
Dalla fig. 47, in cui è riportato il diagramma della funzione |A (r,d)|, si può rilevare che, a differenza del caso precedente,

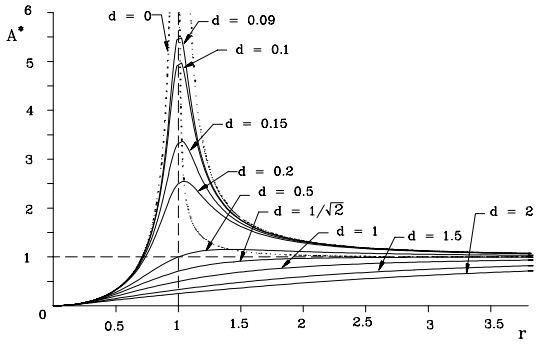


Figura 47

$$\left.\begin{aligned} A^* &= 0 \text{ per } r = 0 \\ A^* &= 1 \text{ per } r = \infty \end{aligned}\right\}$$

indipendentemente da quale sia il valore di d.

Poi è ancora (v. App. E):

$$A^* = 1 \text{ per } \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-2d^2)}} \\ 0 < d \le 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

mentre se è $d > 1/\sqrt{2}$,ossia se è d>0,707, sarà sempre $A^*<1$.

Inoltre, ancora nel campo in cui è $0 < d \le 1/\sqrt{2}$ la funzione A (r,d) presenta un valore di **minimo** in corrispondenza al valore r=0 con A=0 come già visto, ed un **massimo** in corrispondenza al valore di ascissa:

$$r_p = \frac{1}{\sqrt{1-2d^2}}$$

di ordinata pari a:

$$A_p^* = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}$$

Si vede quindi che al crescere di d in tale intervallo i picchi della funzione si spostano, questa volta, nel senso delle r crescenti, con valori, tuttavia, ancora decrescenti fino ad A=1, seguendo la funzione:

$$A^*\left(r_p\right) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 1}}$$

riportata in punteggiata sul diagramma di fig. 47.

Se si desidera, quindi, che il sistema non risponda con un fattore di amplificazione maggiore di 1, occorrerà scegliere i parametri in modo che risulti $r < 1/\sqrt{2\left(1-2d^2\right)}$, oppure scegliere un coefficiente di smorzamento cui corrisponda un $d > 1/\sqrt{2}$.

Anche in questo caso è possibile una rappresentazione globale della risposta a regime del sistema in forma polare, con le stesse procedure viste per il diagramma di Nyquist nel precedente caso a); il corrispondente diagramma è quello di fig. 48.

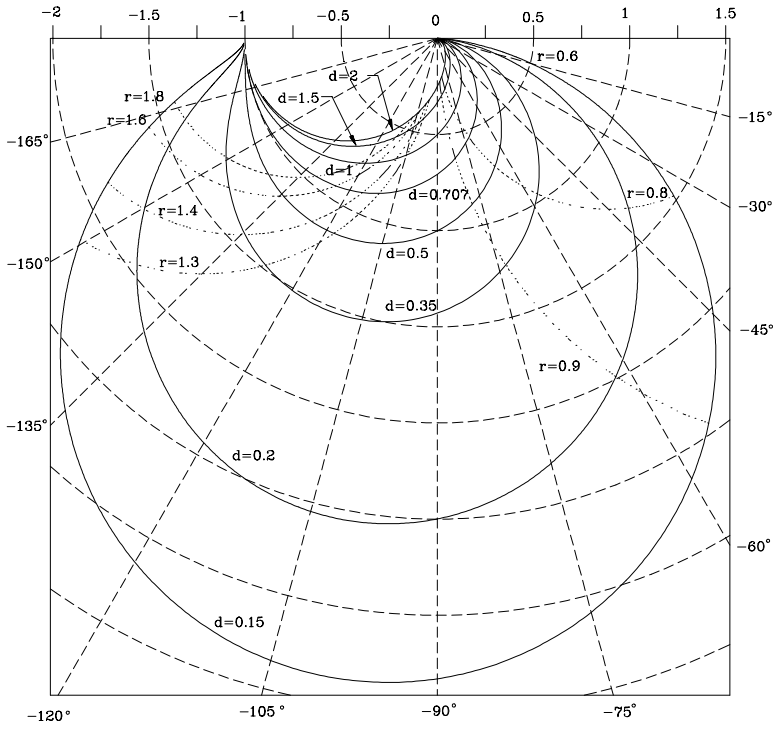


Figura 48

Per ciò che concerne alle curve a d costante, si tratta, in pratica, come si nota, di una immagine speculare del precedente rispetto alla retta ruota-

ta di -90°, diversa risulta invece la disposizione delle curve ad r costante, come del resto era prevedibile riflettendo sul fatto che è $A^*(r)=A(r)r^2$.

§ 13 - Isolamento dalle vibrazioni.

Un sistema reale qualsiasi è, nella maggior parte dei casi, un sistema vincolato ad un telaio e quindi all'ambiente circostante esterno. Se un siffatto sistema è soggetto a vibrazioni queste risulteranno trasmesse, attraverso i vincoli, a detto ambiente; e ciò è generalmente causa di disturbo.
Poiché è ovviamente impossibile pensare di poter eliminare del tutto tale circostanza, il problema dell'isolamento dalle vibrazioni indotte da un sistema vibrante deve essere visto come il tentativo di ridurre il più possibile l'intensità delle forze trasmesse dal sistema al basamento operando, fin quanto possibile, sui valori dei parametri che caratterizzano il sistema ammortizzatore, costituito, in generale da un sistema di molle e smorzatori di tipo viscoso.

La bontà del risultato può essere valutata attraverso il valore assunto dal coefficiente di trasmissibilità, τ, definito come il rapporto fra il valore massimo della forza trasmessa al basamento ed il valore massimo della forza eccitatrice esterna.

a)

Consideriamo quindi lo schema di fig. 49 ipotizzando che il corpo vibrante sia soggetto, a regime, ad un moto del tipo:

$$x = X\cos(\omega t + \varphi) \tag{38}$$

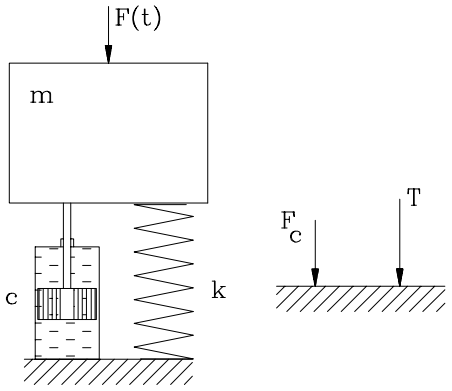


Figura 49

in cui le espressioni di X e di φ sono quelle già trovate nei §§ precedenti. La risultante delle forze agenti sul basamento sarà la somma di quella trasmessa dalla massa vibrante attraverso le molle e di quella trasmessa attraverso lo smorzatore.
Potremo quindi scrivere:

$$F_t = kx + c\dot{x}$$

Se dividiamo per m, abbiamo:

$$\frac{F_t}{m} = \omega_n^2 x + 2d\omega_n \dot{x}$$

oppure:

$$\frac{F_t}{k}\frac{k}{m} = \frac{F_t}{k}\omega_n^2 = \omega_n^2 x + 2d$$

Se sostituiamo in questa espressione quelle di x e di $\dot{x}$ che si ricavano dalla (38) otteniamo:

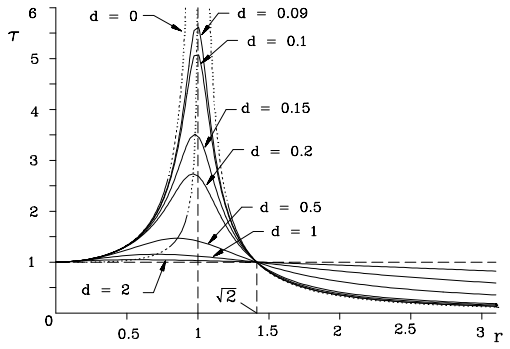


Figura 50

$$\frac{F_t}{k}\omega_n^2 = X\left[\omega_n^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2d\omega_n \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]$$

che, divisa per ω_n^2, dà:

$$\frac{F_t}{k} = X\left[\cos(\omega t + \varphi) - 2dr \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]$$

Vediamo subito che la forza complessiva trasmessa al basamento è costituita da due componenti in quadratura: la reazione della molla, infatti, è massima quando la velocità è nulla (ed è massimo lo spostamento), mentre la resistenza viscosa è massima quando è massima la velocità (ed è nullo lo spostamento).
La somma di queste due componenti darà quindi:

$$\frac{F_t}{k} = X\sqrt{1+(2dr)^2}\cos(\omega t + \beta)$$

con β dato dalla somma algebrica delle fasi:

$$\beta = \varphi + \operatorname{arctg}(2dr) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2dr^3}{1-r^2+(2dr)^2}\right)$$

Se il moto della massa è generato dalla presenza di una forzante del tipo

visto nel caso a) del § 12, il valore massimo di F_t lo avremo da:

$$\frac{\left(F_t\right)_{\max}}{k} = X\sqrt{1+(2dr)^2} = \Delta F_0 \frac{\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

da cui:

$$\tau = \frac{\left(F_t\right)_{\max}}{k}\frac{1}{\Delta F_0} = \frac{\left(F_t\right)_{\max}}{k}\frac{k}{F_0} = \frac{\left(F_t\right)_{\max}}{F_0}$$

ossia:

$$\tau = \frac{\left(F_t\right)_{\max}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2dr)^2}{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

Le fig. 50 e 51 riportano i diagrammi di $|\tau(r,d)|$ e dello sfasamento β.
E' interessante notare che per $r=\sqrt{2}$ il valore di τ è sempre pari all'unità, qualunque sia il valore del fattore di smorzamento, così come accade in corrispondenza ad r=0; per r=∞, viceversa, tale valore tende a zero.
Qualunque sia il valore di d, inoltre, se $r>\sqrt{2}$ sarà sempre $\tau<1$.
Nel campo in cui è $0<r<\sqrt{2}$, le curve presentano dei **massimi** la cui ascissa vale:

$$r_p = \frac{\sqrt{1+8d^2}-1}{4d^2}$$

e la corrispondente ordinata:

$$r_p = \frac{4d^2}{\sqrt{(2d)^4-8d^2-2\left(1\cdot\right.}}$$

La forma di queste espressioni mostra come al crescere del fattore di smorzamento decresce sia il valore di picco che la corrispondente ascissa.

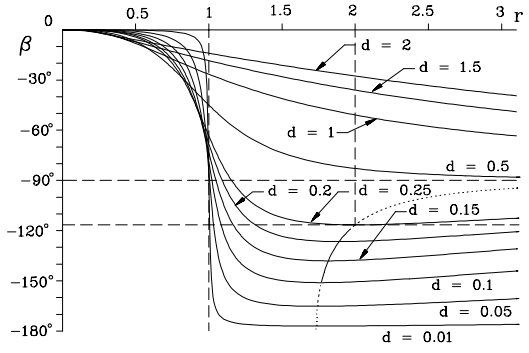


Figura 51

Per quanto riguarda l'andamento delle curve che rappresentano, in funzione di r, lo **sfasamento** fra forza trasmessa e forza eccita-

trice esterna, è interessante notare che, quando d<0,5, lo sfasamento β decresce fino ad un valore minimo dato da:

$$\beta_{min} = \text{arctg}\left[\frac{3\sqrt{3}d}{\sqrt{(1-4d^2)^3}}\right] - \pi \quad \Rightarrow \quad -180° < \beta < -90°$$

la cui corrispondente all'ascissa vale:

$$r_{min} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-4d^2}} \qquad \Rightarrow \quad r < 1$$

per poi crescere gradualmente fino al valore β=-90° per r=∞, e ciò indipendentemente dal valore di d.
Se è, invece, d≥0,5, il valore di β decresce gradualmente da 0° a -90°.
I punti di minimo delle diverse curve si trovano sui punti dati dalla funzione:

$$\beta_{min}(r) = \text{arctg}\left[\frac{r^2\sqrt{r^2-3}}{2}\right] - \pi$$

La rappresentazione in coordinate polari delle funzioni del fattore di amplificazione e del corrispondente sfasamento, in funzione della frequenza ridotta, è riportata in fig. 52.
Come al solito, vi compaiono le curve a fattore di smorzamento costante e, in punteggiata, le curve a frequenza ridotta costante.
Può essere interessante notare che la circostanza che si evidenzia in fig. 50, e cioè che il diagramma presenta un nodo per $r = \sqrt{2}$ e τ=1, trova qui la sua corrispondenza nel fatto che la curva a r=cost dello stesso valore è proprio una circonferenza di raggio 1 che taglia proprio tutte le curve a d=cost.

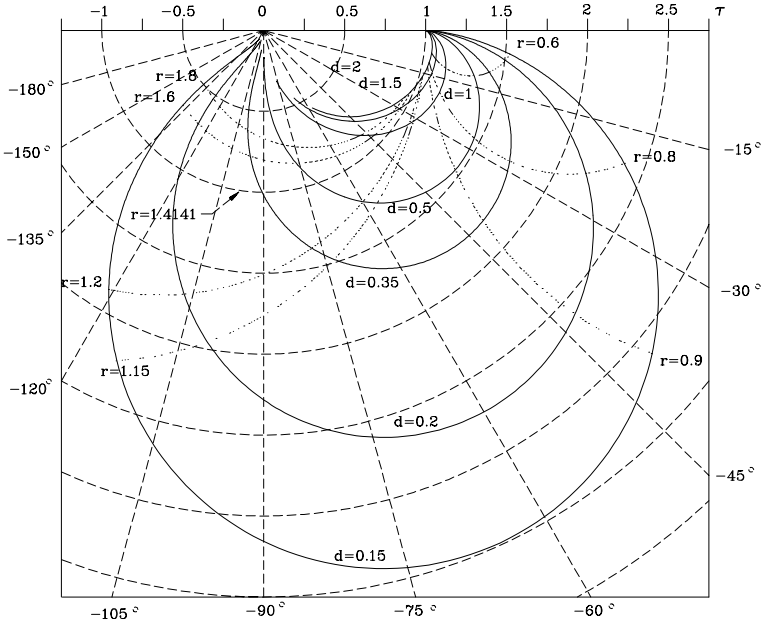


Figura 52

b)
Analizziamo, infine, il caso analogo a quello visto al § 12 - b), in cui la forza eccitatrice dipende da ω^2 (fig. 53).
In queste condizioni, come si è visto, la risposta del sistema è ancora del tipo:

$$x = X\cos(\omega t + \varphi)$$

ma l'espressione della ampiezza X è data da:

$$X = \frac{x^* r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2dr)^2}}$$

dove $x^*=\varepsilon m/M$.

Sarà questa, quindi, l'espressione di X da sostituire nella espressione della forza trasmessa al basamento ossia nella:

$$\frac{F_t}{k} = X\sqrt{1+(2dr)^2}\cos(\omega t + \beta)$$

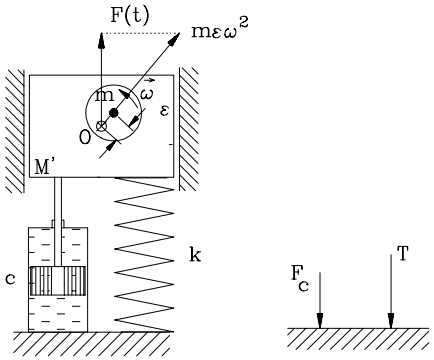


Figura 53

Il modulo sarà quindi:

$$\frac{\left(F_t\right)_{\max}}{k} = x^* \frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

ossia:

$$\frac{\left(F_t\right)_{\max}}{k} = \varepsilon\frac{m}{M}\frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

Moltiplicando per k, si ottiene:

$$\left(F_t\right)_{\max} = \varepsilon m\omega_n^2 \frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}} = \left(F_0\right)_n \frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

avendo indicato con $(F_0)_n$ il modulo massimo che assume la forza eccitatrice quando r=1.
In questo modo potremo scrivere, in forma adimensionale:

$$\tau^* = \frac{\left(F_t\right)_{\max}}{\left(F_0\right)_n} = \frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}}$$

Questa espressione del coefficiente di trasmissibilità, come si osserva, differisce da quella trovata per il caso a) per avere a fattore il termine r^2, e quindi si può anche scrivere $\tau^*=r^2\tau$.
Ne segue che, mentre resta invariato il diagramma dello sfasamento (fig. 51) che non dipende da X, il diagramma di $|\tau^*(r,d)|$ diventa, invece, quello di fig. 54.
Si ritrova anche qui il nodo in corrispondenza del valore $r=\sqrt{2}$, per il quale il coefficiente di trasmissibilità, indipendentemente dal valore di d, assume però il valore $\tau^*=2$.
Per r=0 sarà sempre $\tau^*=0$. Nel campo in cui è $0\le r<1$, tutte le curve hanno un andamento rapidamente crescente talché superano molto presto il valore di $\tau^*=1$; quando, invece, è $\sqrt{2}<r<\infty$ il comportamento delle curve è diverso a seconda del valore del fattore di smorzamento del sistema, ma in ogni caso sarà sempre $1\le\tau^*<\infty$.
In particolare quando il valore del fattore di smorzamento resta compreso fra $0\le d<\sqrt{2}/4$ la corrispondente curva presenta un massimo relativo, nel campo di valori di ascisse in cui è $1\le r<\sqrt{2}$, e poi un minimo per $r>\sqrt{2}$ per tendere successivamente ad ∞.

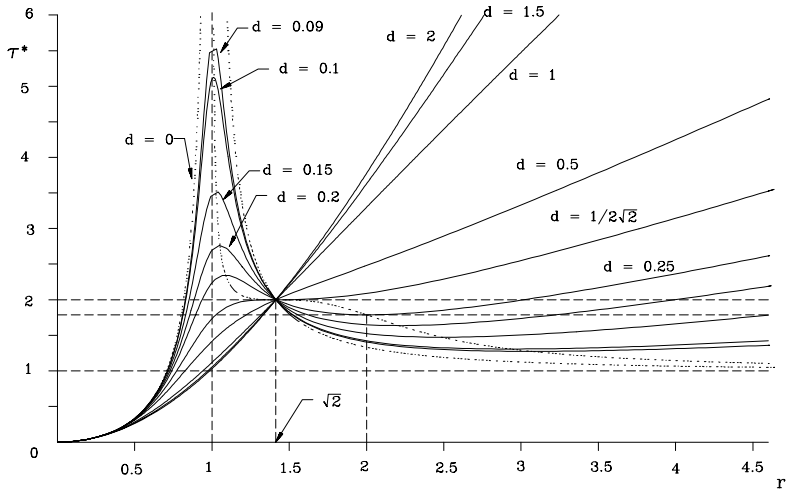


Figura 54

Per valori di r sufficiente mente grandi i valori di τ^* possono anche raggiungere livelli superiori di quelli di picco.
Tale comportamento sembrerebbe mostrare uno smorzatore che diventa via via più rigido al crescere di r: in effetti è il modulo della sollecita-

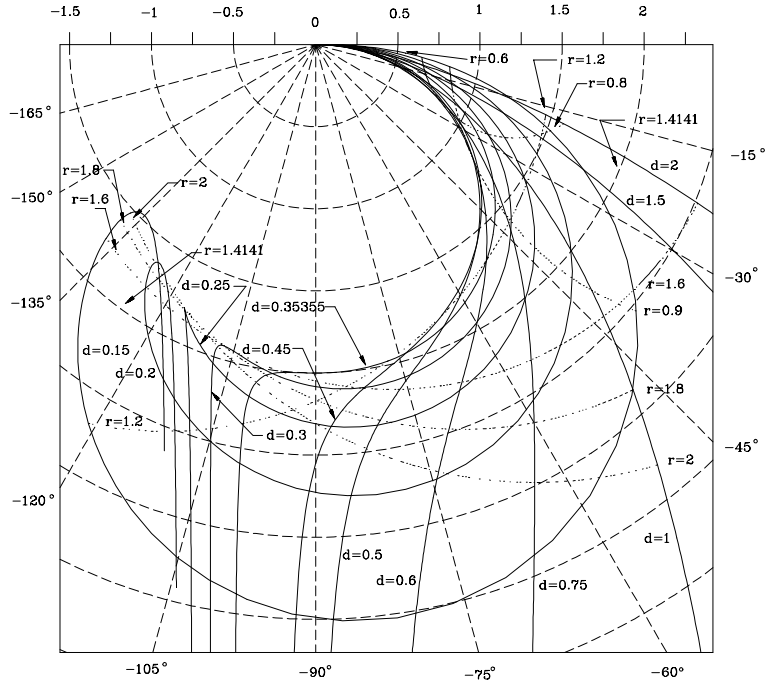


Figura 55

zione che cresce al crescere di r, mentre rimane costante l'energia che lo smorzatore riesce a dissipare.
Quando è $d > \sqrt{2}/4$ è sempre $\tau^* \leq 2$ se è $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.
In definitiva, per avere un coefficiente di trasmissibilità inferiore ad 1, è necessario trovarsi in condizioni di funzionamento tali da avere r molto piccoli e comunque inferiori all'unità.
Quanto fin qui descritto trova immediato riscontro nell'andamento delle curve a d=cost riportate nel diagramma polare di fig. 55, dove si nota chiaramente come il modulo tende comunque a valori infiniti e con fase di -90°.
E' interessante la curva corrispondente a d=0,25 che presenta un punto cuspidale sulla curva con r=2; per tale valore infatti (v. Appendice G) si annullano sia la derivata del modulo che quella della fase.
Si può rilevare inoltre come la curva ad $r = \sqrt{2}$ coincide proprio con la circonferenza di modulo 2, e taglia tutte le curve a d=cost: è questa la corrispondenza con il nodo di fig. 54.

§ 14 - Vibrazioni di sistemi su sopporto mobile.

Non è infrequente il caso in cui un sistema vibrante, che possiamo pensare costituito, come al solito, da massa, molla e smorzatore viscoso, abbia questi due ultimi elementi ancorati ad un elemento non fisso, e che anzi sia dotato di un moto oscillatorio.

Problemi di questo tipo sono quelli che riguardano, in particolare, le sospensioni di veicoli, gli strumenti per la misura delle oscillazioni (sismografi o accelerometri), o anche il problema dell'isolamento di un corpo (per es.: uno strumento) dalle vibrazioni su di esso indotte dall'ambiente circostante.

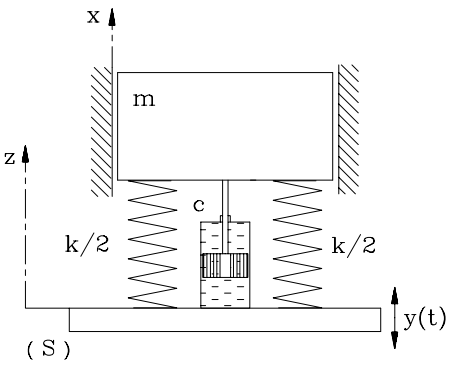


Figura 56

Qualunque sia il caso da trattare, il modello cui si può fare riferimento è quello di fig. 56, in cui il corpo, di massa m, poggia su due molle eguali, di costante elastica k/2, e uno smorzatore di cui è c il coefficiente di smorzamento viscoso; il sopporto S si suppone dotato di un

moto del tipo:

$$y = a_0 \cos(\omega t) \tag{39}$$

Cominciamo con l'analisi del **moto relativo** del corpo rispetto al supporto, indicando con z la corrispondente variabile, mentre con la variabile x si farà riferimento al suo moto assoluto.
Tenendo presente che le forze agenti sul corpo sono (prescindendo dal peso) la reazione elastica della molla e la reazione dello smorzatore, che dipendono dal moto relativo, e il risultante delle forze d'inerzia che dipende dal moto assoluto, l'equilibrio del corpo si scrive:

$$-kz - c\dot{z} - m\ddot{x} = 0 \tag{40}$$

essendo, per quanto sopra detto e poiché il moto è traslatorio:

$$\begin{aligned} x &= z + y \\ \dot{x} &= \dot{z} + \dot{y} \\ \ddot{x} &= \ddot{z} + \ddot{y} \end{aligned} \tag{41}$$

Inoltre dalla (39) si ricava:

$$\ddot{y} = -a_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

Sostituendo, e cambiando di segno, si ha quindi dalla (40):

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0$$

e cioè:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = ma_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

da cui, dividendo per m:

$$\ddot{z} + 2d\omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = a_0 \omega^2 \cos(\omega t) \tag{42}$$

Questa è allora l'equazione del moto relativo ed è del tutto simile alla (37), ricavata per i sistemi con forzante dipendente da ω^2; pertanto la soluzione a regime sarà data dalla funzione:

$$z = Z \cos(\omega t) \tag{43}$$

con:

$$Z = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2dr)^2}}$$

come modulo, e:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2dr}{1 - r^2}\right)$$

come fase.
I diagrammi del fattore di amplificazione Z/a_0 e della fase sono quindi ancora quelli delle vibrazioni con forzante inerziale delle fig. 47 e 41.

Per ottenere, invece, la risposta del sistema nel suo **moto assoluto** è sufficiente sostituire nella (39) le coordinate del moto assoluto ricavate dalla (42), ottenendo:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

dove è sempre:

$$y = a_0 \cos(\omega t)$$

e quindi:

$$\dot{y} = -a_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Pertanto, sostituendo ed ordinando, si ha:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0[k\cos(\omega t) - c\omega \operatorname{sen}(\omega t)]$$

che, dividendo per m, si può scrivere:

$$\ddot{x} + 2d\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = a_0 \omega_n^2 [\cos(\omega t) - 2dr \operatorname{sen}(\omega t)] \qquad \textbf{(44)}$$

Per quanto riguarda l'espressione a secondo membro, questa si può considerare come discendente [v. Appendice A], da una forzante del tipo:

$$f(t) = F\cos(\omega t + \alpha)$$

in cui sia:

$$F = ma_0 \omega_n^2 \sqrt{1 + (2dr)^2}$$

ed

$$\alpha = \operatorname{arctg}(2dr)$$

La (44), infatti, si può anche scrivere come:

$$\ddot{x} + 2d\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = a_0 \omega_n^2 \sqrt{1 + (2dr)^2}\cos(\omega t + \alpha) \qquad \textbf{(45)}$$

dove il secondo membro rappresenta la sollecitazione dovuta al moto di trascinamento da parte del supporto il quale, per la presenza dello smorzatore, agisce sul corpo con uno sfasamento pari ad α rispetto al suo moto assoluto.
La soluzione a regime della (45) sarà espressa da una forma:

$$x = X\cos(\omega t + \beta) \qquad \textbf{(46)}$$

con:

$$X = \frac{a_0\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}} = \tau a_0$$

e:

$$\beta = \varphi - \text{arctg}(-2dr) = \text{arctg}\left(-\frac{2dr^3}{1-r^2+(2dr)^2}\right)$$

Queste, infatti, sono esattamente le espressioni trovate per il coefficiente di trasmissibilità, τ, e quindi valgono i diagrammi di fig. 50 e 51 per la rappresentazione del fattore di amplificazione, X/a_0 e dell'angolo di sfasamento, β, del moto del corpo rispetto al moto del sopporto.

Dalla (40) si può desumere che la sollecitazione cui il corpo è soggetto, durante il moto, da parte del sopporto, e quindi da parte della molla e dello smorzatore, è eguale al risultante delle forze d'inerzia, $-m\ddot{x}$; sarà quindi, dalla (46):

$$F_t = -m\omega^2 X\cos(\omega t+\beta)$$

Sostituendo l'espressione di X, prima trovata, l'ampiezza di questa funzione è data da:

$$\left(F_0\right)_t = m\omega^2 X = a_0 m\omega^2\tau = a_0 m\omega_n^2 r^2\tau = a_0 k\, r^2\tau$$

Considerando che il prodotto a_0k è, dimensionalmente una forza che può essere interpretata come quella che il corpo subirebbe staticamente all'istante dello spostamento massimo del sopporto, vediamo di essere giunti ancora alla espressione di τ^* trovata al §13,b), e per il quale pertanto vale il diagramma di fig. 54.

§ 15 - Sismografi e accelerometri.

Un sismografo ed un accelerometro sono entrambi strumenti di misura che possono schematicamente essere ricondotti al sistema di fig. 57. La loro differenza sta nel fatto che i parametri strutturali (massa, molla, smorzatore) sono scelti in modo che, attraverso il moto relativo della massa, sia possibile, con il primo, la misura dello spostamento del sopporto, con il secondo, la misura della sua accelerazione.
Ciò significa che, nel caso del sismografo, il valore della costante elastica, del coefficiente di smorzamento e della massa (*massa sismica*), devono essere tali che l'ampiezza dello spostamento di questa ultima, nel moto relativo al sopporto, sia proporzionale all'ampiezza dello spostamento nel moto di trascinamento; nel caso dell'accelerometro, lo spo-

stamento nel moto relativo dovrà essere proporzionale all'accelerazione nel moto di trascinamento.

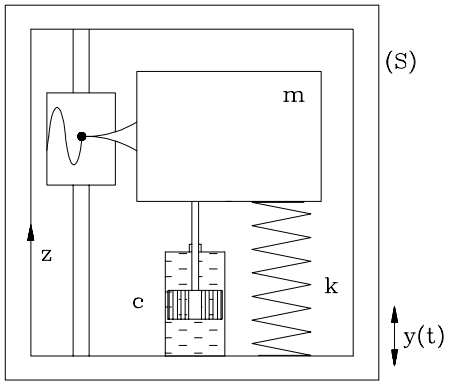


Figura 57

a) Sismografo.

Se facciamo in modo che il sistema funzioni in modo che la frequenza naturale del sistema sia sempre di molto inferiore alla frequenza del moto del sopporto ($\omega_n << \omega$), avremo una espressione (43) dello spostamento della massa nel moto relativo al sopporto, in cui in:

$$Z = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2dr)^2}}$$

dobbiamo porre un r>>1.
In tal caso se dividiamo per r^2 sia il numeratore che il denominatore avremo:

$$Z = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{2d}{r}\right)^2}} \cong a_0$$

Infatti, se r sarà sufficientemente grande, risulterà contemporaneamente $1/r^2 << 1$ e 2d/r<<1.

Questa condizione equivale ancora a quella che sia ω_n molto piccolo, e ciò si può ottenere con una massa di valore molto elevato su una sospensione elastica molto flessibile (m>>k).
Nelle stesse condizioni si ha che la fase, la cui espressione è:

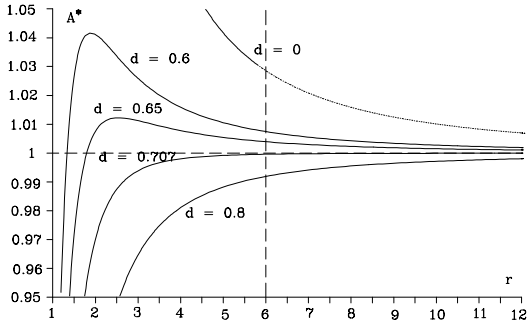


Figura 58

$$\varphi = \text{arctg}\left(-\frac{2dr}{1-r^2}\right)$$

diventa:

$$\varphi = \text{arctg}\left(-\frac{2d/r^2}{1/r^2-1}\right) \cong -\pi$$

Si può quindi concludere dalla prima delle (41) che in tali condizioni si avrà anche:

$$x = z + y \cong a_0 \cos(\omega t - \pi) + a_0 \cos(\omega t) \cong 0$$

e che quindi, nel suo moto assoluto, la massa sismica risulterà immobile.
Ciò che più conta tuttavia, trattandosi di strumenti di misura, è che il rapporto di amplificazione si mantenga costante al variare della frequenza della eccitazione esterna, ossia al variare di r.
Per ottenere questa condizione è sufficiente adottare un coefficiente di smorzamento tale che sia $d = 1/\sqrt{2} = 0,707$; si vede infatti, dal diagramma di fig. 58, che in corrispondenza a tale valore di d, il rapporto di amplificazione è sempre pari all'unità se r>>1; si può ritenere sufficiente che sia r>6.
In fig. 59 è riportato l'andamento delle curve di fase nello stesso campo di variazione di r e per i corrispondenti valori del fattore di smorzamento: per valori di r>6 lo sfasamento della risposta varia di circa 8° nell'intorno dei -170°.

b) Accelerometro

Con un siffatto strumento, si è detto, si vuole che lo spostamento della massa sismica, nel moto relativo al sopporto, sia proporzionale alla accelerazione di quest'ultimo.
Ciò si può ottenere se lo stesso sistema di fig. 57 si trova a funzionare con un valore di r<<1.
Infatti, se è r<<1, nella:

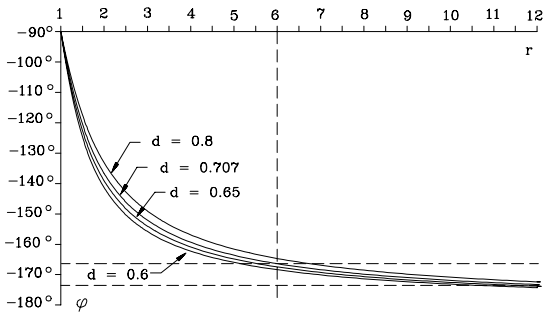


Figura 59

$$Z = \frac{a_0 r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}}$$

diventa trascurabile, a denominatore, il termine r^2 rispetto all'unità, e diventa pressoché nullo il termine $(2dr)^2$. Pertanto la precedente espressione si riduce a:

$$Z \cong \frac{1}{\omega_n^2}\left(a_0\omega^2\right)$$

Il corrispondente fattore di amplificazione, il rapporto $Z/(a_0\omega^2)$, nel campo $0 \le r \le 1$, è riportato in fig. 60, dove si può osservare che ancora per $d = 1/\sqrt{2} = 0,707$ esso si mantiene praticamente pari all'unità se è r<0,2.

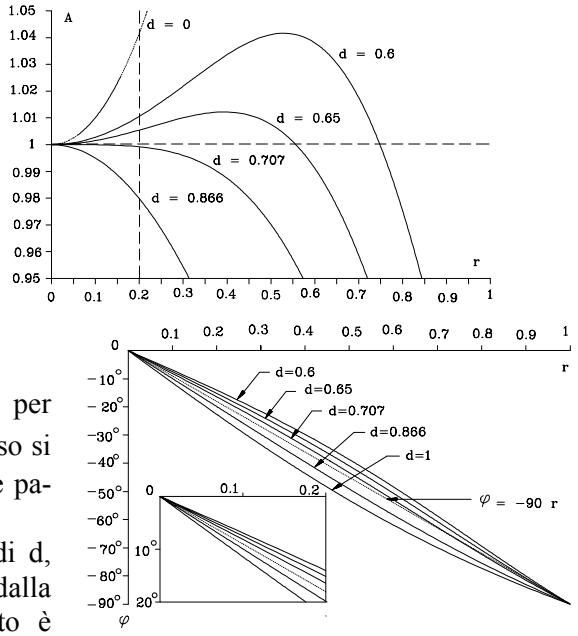


Figura 61

Per lo stesso valore di d, come si può rilevare dalla fig. 61, lo sfasamento è quasi proporzionale ad r.
Se si volesse imporre la effettiva proporzionalità si dovrebbe scegliere un valore di d tale da lasciare costante, al variare di r, il rapporto $d\varphi/dr$, ossia che sia $d^2\varphi/dr^2=0$. Si avrebbe allora:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2dr}{1-r^2}\right)} \frac{2d\left(1+r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^2} = \frac{2d\left(1+r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}$$

e poi:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = -4dr \frac{4d^2 - \left(1-r^2\right)\left(3+r^2\right)}{\left[\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2\right]^2}$$

Il numeratore di questa seconda derivata si annulla quando:

$$r^4 + 2r^2 - \left(3 - 4d^2\right) = 0$$

Potendo trascurare i primi due termini, in quanto piccoli nella ipotesi fatta, dovrebbe quindi essere:

$$d \cong \sqrt{3}/2 \cong 0,866$$

In pratica viene scelto un valore intermedio fra i due, con un errore che sarà tanto minore quanto più basso sarà il valore di r prescelto.
In fig. 61 è riportata con linea punteggiata, a scopo comparativo, la retta φ=-90°r che da' un'idea degli scostamenti delle diverse curve dal caso ideale.
L'ipotesi che sia r<<1 corrisponde di fatto ad un dimensionamento del sistema con un ω_n molto grande: e questo si ottiene con una massa sismica molto piccola ed una sospensione molto rigida.

APPENDICE

LE VIBRAZIONI MECCANICHE

A) Somma di moti armonici di eguale frequenza.

Siano:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$$
$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

i moti componenti dei quali si vuole ottenere il risultante:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X \cos(\omega t + \alpha)$$

Si scriverà:

$$x_1(t) + x_2(t) = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \cos(\omega t + \varphi) =$$
$$= X_1 \cos\omega t + X_2 (\cos\omega t \cos\varphi - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\varphi) =$$
$$= (X_1 + X_2 \cos\varphi) - X_2 \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\varphi$$

mentre è anche:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \alpha) =$$
$$= X \cos\alpha \cos\omega t - X \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega t$$

Dovrà allora essere:

$$X \cos\alpha = X_1 + X_2 \cos\varphi$$
$$X \operatorname{sen}\alpha = -X_2 \operatorname{sen}\varphi$$

e quindi, sommando le due componenti:

$$X^2 = (X_1 + X_2 \cos\varphi)^2 + X_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi =$$
$$= X_1^2 + X_2^2 \cos^2\varphi + 2X_1X_2 \cos\varphi + X_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi =$$
$$= X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos\varphi$$

per cui l'ampiezza del moto risultante è:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos\varphi}$$

mentre la fase è data dal rapporto:

$$\tan\alpha = -\frac{X_2\,\mathrm{sen}\,\varphi}{X_1 + X_2\cos\varphi}$$

B) Somma di moti armonici di ampiezza e frequenze diverse.

Siano:

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = X_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

i moti componenti dei quali si vuole ottenere il risultante:

$$x(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Sviluppando si ha:

$$x(t) = X_1(\cos\omega_1 t\cos\varphi_1 - \mathrm{sen}\,\omega_1 t\,\mathrm{sen}\,\varphi_1) +$$
$$+ X_2(\cos\omega_2 t\cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\omega_2 t\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)$$

Posto:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \text{e} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

si ha:

$$\cos\omega_2 t = \cos(\Delta\omega + \omega_1)t = \cos\Delta\omega t\cos\omega_1 t - \mathrm{sen}\,\Delta\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$$
$$\mathrm{sen}\,\omega_2 t = \mathrm{sen}(\Delta\omega + \omega_1)t = \mathrm{sen}\,\Delta\omega t\cos\omega_1 t + \cos\Delta\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$$
$$\cos\varphi_2 = \cos(\Delta\varphi + \varphi_1) = \cos\Delta\varphi\cos\varphi_1 - \mathrm{sen}\,\Delta\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi_1$$
$$\mathrm{sen}\,\varphi_2 = \mathrm{sen}(\Delta\varphi + \varphi_1) = \mathrm{sen}\,\Delta\varphi\cos\varphi_1 + \cos\Delta\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi_1$$

e quindi:

$$\cos\omega_2 t\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\omega_2 t\operatorname{sen}\varphi_2 =$$
$$= \left(\cos\Delta\omega t\cos\omega_1 t - \operatorname{sen}\Delta\omega t\operatorname{sen}\omega_1 t\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\cos\Delta\varphi\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right) +$$
$$-\left(\operatorname{sen}\Delta\omega t\cos\omega_1 t + \cos\Delta\omega t\operatorname{sen}\omega_1 t\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\operatorname{sen}\Delta\varphi\cos\varphi_1 + \cos\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right) =$$

$$= \left(\cos\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\cos\varphi_1 - \cos\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right)\cos\omega_1 t +$$
$$-\left(\operatorname{sen}\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right)\operatorname{sen}\omega_1 t +$$
$$-\left(\operatorname{sen}\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\cos\varphi_1 + \operatorname{sen}\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right)\cos\omega_1 t +$$
$$-\left(\cos\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\cos\varphi_1 + \cos\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi_1\right)\operatorname{sen}\omega_1 t =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\left(\cos\Delta\omega t\cos\Delta\varphi - \operatorname{sen}\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\right)\cos\varphi_1 + \\ \quad -\left(\cos\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi + \operatorname{sen}\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1\end{array}\right]\cos\omega_1 t +$$
$$-\left[\begin{array}{l}\left(\operatorname{sen}\Delta\omega t\cos\Delta\varphi + \cos\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi\right)\cos\varphi_1 + \\ \quad -\left(\operatorname{sen}\Delta\omega t\operatorname{sen}\Delta\varphi + \cos\Delta\omega t\cos\Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1\end{array}\right]\operatorname{sen}\omega_1 t =$$

$$= \left[\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1\right]\cos\omega_1 t +$$
$$-\left[\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1 - \operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1\right]\operatorname{sen}\omega_1 t$$

Sostituendo si ottiene:

$$x(t) = \left\{\begin{array}{l}\left[X_1 + X_2\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\right]\cos\varphi_1 + \\ \qquad - X_2\operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1\end{array}\right\}\cos\omega_1 t +$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\left[X_1 + X_2\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\right]\operatorname{sen}\varphi_1 + \\ \qquad + X_2\operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1\end{array}\right\}\operatorname{sen}\omega_1 t$$

Poniamo:

$$X\cos\Phi = \left[X_1 + X_2\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\right]\cos\varphi_1 +$$
$$- X_2\operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi_1$$
$$-X\operatorname{sen}\Phi = \left[X_1 + X_2\cos\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\right]\operatorname{sen}\varphi_1 +$$
$$+ X_2\operatorname{sen}\left(\Delta\omega t + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1$$

Quadriamo:

$$X^2 \cos^2 \Phi = \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right]^2 \cos^2 \varphi_1 + \\ - X_2^2 \operatorname{sen}^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \\ - 2X_2 \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right] \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1$$

$$X^2 \operatorname{sen}^2 \Phi = \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right]^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \\ + X_2^2 \operatorname{sen}^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \cos^2 \varphi_1 + \\ + 2X_2 \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right] \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1$$

e sommando:

$$X^2 = \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right]^2 + X_2^2 \operatorname{sen}^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) = \\ = X_1^2 + X_2^2 \cos^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) + 2X_1 X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) + \\ + X_2^2 \operatorname{sen}^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) = \\ = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)$$

Quindi sarà:

$$X(t) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}$$

Inoltre è:

$$-X \operatorname{sen}\Phi = \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right] \operatorname{sen}\varphi_1 + \\ + X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \cos\varphi_1 = \\ = X_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + X_2 \left[\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}\varphi_1 + \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \cos\varphi_1 \right] = \\ = X_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi + \varphi_1) = \\ = X_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \varphi_2)$$

$$X \cos\Phi = \left[X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \right] \cos\varphi_1 + \\ - X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}\varphi_1 = \\ = X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \left[\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \cos\varphi_1 - \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \operatorname{sen}\varphi_1 \right] = \\ = X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi + \varphi_1) = \\ = X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \varphi_2)$$

e quindi la fase è data dal rapporto:

$$\tan\Phi = -\frac{X_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + X_2 \operatorname{sen}(\Delta\omega t + \varphi_2)}{X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \varphi_2)}$$

C) Somma di moti armonici di ampiezza eguale e frequenze diverse.

Siano i moti componenti:

$$x_1(t) = X\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = X\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Il moto risultante sarà dato da:

$$x(t) = X\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$$

Tenendo presente che è:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

si può scrivere:

$$x(t) = 2X\left(\cos\frac{\omega_1 t + \varphi_1 - \omega_2 t - \varphi_2}{2} + \cos\frac{\omega_1 t + \varphi_1 + \omega_2 t + \varphi_2}{2}\right) =$$
$$= 2X\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos(\overline{\omega}t + \overline{\varphi})$$

in cui è:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1;\quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1;\quad \overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2};\quad \overline{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2};$$

L'espressione ottenuta corrisponde ad un moto risultante che è ancora del tipo:

$$x(t) = X(t)\cos(\omega t + \Phi)$$

in cui è:

$$X(t) = 2X\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\Phi}{2}\right);\qquad \omega = \overline{\omega};\qquad \Phi = \overline{\varphi}$$

D) Vibrazioni forzate con forzante sinusoidale. Fattore di amplificazione.

L'espressione del fattore di amplificazione è data da:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}} \qquad \textbf{(D.1)}$$

Il valore di A=1 si ha quando vale 1 il denominatore e quindi quando:

$$\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2 = 1$$

Sviluppando si ha:

$$1 - 2r^2 + r^4 + 4d^2r^2 = 1$$

ossia:

$$\left[r^2 - 2\left(1-2d^2\right)\right]r^2 = 0$$

Sarà quindi A=1 per:

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = \sqrt{2\left(1-2d^2\right)} \quad \text{solo se è} \qquad d \le 1/\sqrt{2}$$

Inoltre si ha dA/dr=0 quando è:

$$r\left(r^2 + 2d^2 - 1\right) = 0 \qquad \textbf{(D.2)}$$

ossia quando è:

$$(r_p)_1 = r_1 = 0; \qquad \text{oppure:}$$

$$(r_p)_2 = \sqrt{1-2d^2} \quad \text{solo se è} \qquad d \le 1/\sqrt{2}$$

Per tali valori di r_p si ha:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 A}{dr^2}\right)_{r=0} < 0 \qquad \text{se è} \qquad d > 1/\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 A}{dr^2}\right)_{r=0} > 0 \qquad \text{se è} \qquad d < 1/\sqrt{2}$$

e poi:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 A}{dr^2}\right)_{r=r_{p2}} < 0 \qquad \text{se è} \qquad 0 < d < 1/\sqrt{2}$$

Quindi la funzione A(r) presenterà:

- se è: $0 < d < 1/\sqrt{2}$ $\quad \begin{cases} \text{un minimo} \quad \text{per } r = 0 \\ \text{un massimo} \quad \text{per } r = \sqrt{1-2d^2} \end{cases}$
- se è: $d > 1/\sqrt{2}$ $\quad$ un massimo $\quad$ per $r = 0$

Sostituendo nella (D.1) i valori di r_{p1} e di r_{p2} si hanno le corrispondenti ordinate:

$$\left(A_p\right)_1 = 1$$

$$\left(A_p\right)_2 = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}$$

Infine se dalla (D.2) si ricava:

$$d^2 = \left(1-r^2\right)/2$$

e lo si sostituisce nella (D.1), si ottiene:

$$(A)_{max} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

che è la curva lungo la quale si dispongono i valori massimi della A(r) per ogni valore del fattore di smorzamento.

E) Vibrazioni forzate con forzante inerziale - Fattore di amplificazione.

L'espressione del fattore di amplificazione è data da:

$$A^* = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2}} \qquad \textbf{(E.1)}$$

Il valore di A=1 si ha quando vale 1 il denominatore e quindi quando:

$$\left(1-r^2\right)^2 + (2dr)^2 = r^4$$

Sviluppando si ha:

$$1 - 2r^2 + r^4 + 4d^2r^2 = r^4$$

ossia:

$$2r^2\left(1-2d^2\right) = 1$$

Sarà quindi A^*=1 per:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-2d^2\right)}} \quad \text{solo se è} \qquad d \le 1/\sqrt{2}$$

e per r=∞, valore per il quale la (E.1) tende a 1.
Inoltre si ha dA^*/dr=0 quando è:

$$r\left(2d^2r^2 + 1 - r^2\right) = 0 \qquad \textbf{(E.2)}$$

ossia quando è:

$$\left(r_p\right)_1 = 0; \qquad \text{oppure:}$$

$$\left(r_p\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2d^2}} \quad \text{solo se è} \qquad d \le 1/\sqrt{2}$$

Per tali valori di r_p si ha:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 A^*}{dr^2}\right)_{r=0} > 0 \qquad \text{qualunque sia il valore di d}$$

e poi:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 A^*}{dr^2}\right)_{r=r_{p2}} < 0 \qquad \text{se è} \qquad 0 < d < 1/\sqrt{2}$$

Quindi la funzione $A^*(r)$ presenterà comunque:

- un massimo per $r = 1/\sqrt{1-2d^2}$ se è: $0 < d < 1/\sqrt{2}$
- un minimo per $r = 0$ qualunque sia d

Sostituendo nella (E.1) i valori di r_{p1} e di r_{p2} si hanno le corrispondenti ordinate:

$$\left(A_p^*\right)_1 = 0$$

$$\left(A_p^*\right)_2 = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}$$

Infine se dalla (E.2) si ricava:

$$d^2 = \frac{r^2-1}{2r^2}$$

e lo si sostituisce nella (E.1), si ottiene:

$$\left(A^*\right)_{max} = \frac{r^2}{\sqrt{r^4-1}}$$

che è la curva lungo la quale si dispongono i valori massimi della $A^*(r)$ per ogni valore del fattore di smorzamento.

F) Coefficiente di trasmissibilità - Forzante sinusoidale - Fattore di amplificazione.

L'espressione del fattore di amplificazione è data da:

$$\tau = \frac{\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2}} \qquad \textbf{(F.1)}$$

Si ha $\tau=1$ quando:

$$1+(2dr)^2 = \left(1-r^2\right)^2+(2dr)^2$$

ossia quando:

$r^2\left(r^2-2\right)=0$

e cioè per r=0 o per $r=\sqrt{2}$, indipendentemente quindi dal valore di d.
Dividendo numeratore e denominatore della (F.1) per r^2, si vede anche che:

$$\lim_{r\to\infty}\tau = 0$$

qualunque sia d.
Inoltre sarà:

$$\frac{d\tau}{dr}=0 \qquad \text{quando} \qquad r\left[(2d)^2r^4+2\left(r^2-1\right)\right]=0$$

e ciò ancora per $r=r_1=0$ oppure quando:

$$(2d)^2r^4+2\left(r^2-1\right)=0 \qquad \textbf{(F.2)}$$

ossia per:

$$r^2=\frac{\sqrt{1+8d^2}-1}{(2d)^2} \qquad \textbf{(F.3)}$$

Sarà quindi:

$$r_2=\frac{\sqrt{\sqrt{1+8d^2}-1}}{2d} \qquad \textbf{(F.4)}$$

Inoltre è $\left(\frac{d^2\tau}{dr^2}\right)_{r=0}>0$ e quindi per tale valore la funzione avrà un minimo per qualunque valore di d, mentre per $r=r_2$ dovrà avere necessariamente un massimo.
L'ordinata corrispondente di questi massimi la si ottiene sostituendo la (F.3) in (F.1); col che si ottiene:

$$\tau_p = \frac{(2d)^2}{\sqrt{(2d)^4 - 2(2d)^2 - 2\left(1-\sqrt{1+2(2d)^2}\right)}} \qquad \textbf{(F.5)}$$

Dividendo la (F.4) per d e calcolandone il limite per d→∞, si trova che r→0; ciò vuol dire che i picchi, man mano che d cresce, si spostano secondo valori decrescenti di r.
Analogamente, dividendo per d la (F.5) e passando al limite per d→∞, $\tau_p \to 1$, e quindi anche le ordinate saranno via via decrescenti al crescere di d.
La disposizione dei picchi si ha appunto lungo la curva che si ottiene ricavando dalla (F.2):

$$(2dr)^2 = \frac{2\left(1-r^2\right)}{r^2}$$

e sostituendolo nella (F.1); si ottiene:

$$\tau_{max} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

- Fase -
L'espressione dello sfasamento è data da:

$$\beta = \text{arctg}\left[-\frac{2dr^3}{1-r^2+(2dr)^2}\right] \qquad \textbf{(F.6)}$$

Il rapporto entro parentesi, qualunque sia d, vale 0 per r=0, mentre tende a -∞ per r→∞, e quindi il valore di β varierà sempre fra 0 e -90°.
Inoltre sarà:

$$\frac{d\beta}{dr} = 0 \qquad \text{quando} \qquad r\left[r^2\left(4d^2-1\right)+3\right] \qquad \textbf{(F.7)}$$

ossia per $r_1 = 0$ e per:

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-(2d)^2}} \qquad \text{ma solo se} \qquad d \le \frac{1}{2} \qquad \textbf{(F.8)}$$

Inoltre per $r=r_1=0$ è $\frac{d^2\beta}{dr^2} = 0$, ma è $\frac{d^3\beta}{dr^3} < 0$ per cui la funzione è decrescente in r_1; in r_2 presenterà allora un minimo il cui valore, sostituendone l'espressione nella (F.6), sarà dato da:

$$\beta_{min} = \text{arctg}\left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\left(1-4d^2\right)^3}}\right] - \pi$$

La curva lungo la quale si spostano i minimi si ottiene ricavando dalla espressione in (F.7):

$$d = \frac{\sqrt{r^2 - 3}}{2r}$$

e sostituendo tale valore in (F.6); si ottiene così la funzione:

$$\beta(r)_{\min} = \operatorname{arctg}\left[\frac{r^2\sqrt{r^2-3}}{2}\right] - \pi$$

In particolare, si noti ancora che quando in (F.8) si pone d=1/4 si ha r_2=2 e, con tali valori è nulla la derivata prima (F.7).

G) Coefficiente di trasmissibilità - Forzante inerziale - Fattore di amplificazione.

L'espressione del fattore di amplificazione è data da:

$$\tau^* = \frac{r^2\sqrt{1+(2dr)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2dr)^2}} \qquad \textbf{(G.1)}$$

Dividendo numeratore e denominatore della (G.1) per r^2, si vede che:

$$\lim_{r\to\infty} \tau^* = \infty$$

qualunque sia d.

Se poi si pone in (G.1) $r = \sqrt{2}$ si ha τ^*=2 ancora indipendentemente dal valore del parametro d.

Si ha τ^*=1 quando:

$$r^4\left[1+(2dr)^2\right] = (1-r^2)^2 + (2dr)^2$$

ossia quando:

$$4d^2r^6 - (4d^2-2)r^2 - 1 = 0 \qquad \textbf{(G.2)}$$

L'analisi delle soluzioni della equazione di 3° grado in r^2 che da questa deriva, mostra che, qualunque sia il valore di d, esiste sempre una sola soluzione reale e positiva; quindi le curve taglieranno una sola volta il valore τ^*=1; e ciò accade per 0≤r<1: infatti la (G.2) non ammette soluzione per r=1.

Inoltre sarà $\frac{d\tau^*}{dr} = 0$ quando:

$$r\left\{(2d)^2 r^6 + 2(2d)^2\left[(2d)^2-2\right]r^4 + 2\left[2(2d)^2-1\right]r^2 + 2\right\} = 0 \qquad \textbf{(G.3)}$$

quindi, certamente, per r_1=0, valore per il quale è positiva la derivata seconda;

quindi la funzione presenta un minimo per tale valore indipendentemente dal valore di d.
Ponendo nella (G.3) r^2=y, e cercando gli zeri della funzione:

$$(2d)^2 y^3 + 2(2d)^2\left[(2d)^2 - 2\right]y^2 + 2\left[2(2d)^2 - 1\right]y + 2 = 0$$

si vede che questa ammette due radici reali e positive quando è:

$$0 \le d \le \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Le due radici daranno quindi, la prima, l'ascissa del massimo relativo e l'altra quella del minimo.
In particolare si ha che per d=0,25 una soluzione della (G.3) si ha per r=2, e questa è la stessa coppia di valori soluzione della (F.7).
Le ordinate corrispondenti ai massimi e ai minimi della funzione τ^* si possono ottenere ricavando da (G.3):

$$2(2d)^4 r^6 + (2d)^2 r^2\left(r^4 - 4r^2 + 4\right) - 2\left(r^2 - 1\right) = 0$$

l'espressione:

$$(2dr)^2 = \frac{1}{4}\left[Qr - \left(r^2 - 2\right)^2\right]$$

con

$$Q = \sqrt{r^6 - 8r^4 + 24r^2 - 16}$$

che, sostituita nella (G.1), da' la curva:

$$\tau^*(r) = \frac{r^2\sqrt{r\left[Q - r\left(r^2 - 4\right)\right]}}{\sqrt{r\left[Q + r\left(3r^2 - 4\right)\right]}}$$

le cui ordinate decrescono al crescere di r, indicando che i massimi ed i minimi della famiglia di curve si spostano verso destra.