DEF

Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Una norma su X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \quad e \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in X$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

Esempi

(1) $X = \mathbb{C}^n = \{ z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C} \}$

- $\|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|z\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j| \right)$
- $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$

Questo è un esempio di spazio finito dimensionale, vediamo ora un esempio di spazio infinito dimensionale

(2) Sia $T \subseteq \mathbb{C}$ sottoinsieme

$X = \ell^\infty(T) := \left\{ f : T \longrightarrow \mathbb{C} \mid \sup_{t \in T} |f(t)| < +\infty \right\}$ con le operazioni

$(f+g)(t) := f(t) + g(t) \qquad \forall t \in T$

$(\alpha f)(t) := \alpha f(t) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Dunque su questo spazio con le seguenti operazioni posso definire una norma:

$\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} |f(t)|$

Mostriamo che è effettivamente una norma:

1) $\|f\|_\infty = 0 = \sup_{t \in T} |f(t)| \implies |f(t)| = 0 \ \forall t \in T \implies f = 0$

2) $\|\alpha f\|_\infty = \sup_{t \in T} |\alpha f(t)| = |\alpha| \sup_{t \in T} |f(t)| = |\alpha| \|f\|_\infty$

3) $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \sup_{t \in T} |f(t)| + \sup_{t \in T} |g(t)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\implies \|f+g\|_\infty = \sup_{t \in T} |f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(3) $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continua} \}$

OSS

f continua su $[a,b] \implies$ per il Teorema di Weierstrass

$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| < +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}([a,b]) \subseteq \ell^\infty([a,b]) \Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ è una norma su $\mathcal{C}([a$

Possiamo definire un'altra norma, sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$

$\Rightarrow \|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$. Mostriamo che è una norma

1) $\|f\|_1 = 0 = \int_a^b |f(t)|\,dt \Rightarrow f \equiv 0$

Supp. per assurdo che $\exists\, t_0 \in [a,b]$ t.c. $|f(t_0)| > 0$,
f continua $\Rightarrow$ per la permanenza del segno $\exists\, \delta > 0$:
$\forall t \in \underbrace{B_\delta(t_0) \cap [a,b]}_{I} \quad |f(t)| > \frac{|f(t_0)|}{2}$

$\Rightarrow \int_a^b |f(t)|\,dt \geq \int_I |f(t)|\,dt > \frac{|f(t_0)|}{2}\,|I| > 0$ assurdo

2) $\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha|\,|f(t)|\,dt = |\alpha|\,\|f\|_1$

3) $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt =$
$= \|f\|_1 + \|g\|_1$

O ancora:
$\|f\|_2 := \left[\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$

Ricordando che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2\|g\|_2$$

Mostriamo che $\|f\|_2$ è una norma, faremo vedere però solo che $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \Leftrightarrow \|f+g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$.
prima però:

<u>OSS</u>
Sia $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z+w|^2 = |z|^2 + 2\,Re(z\bar{w}) + |w|^2$

$\Rightarrow \|f+g\|_2^2 = \int_a^b |f+g|^2 = \int_a^b |f|^2 + |g|^2 + 2\,Re(f\bar{g}) =$

$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_a^b Re(f\bar{g})\,dt \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2$

$\hookrightarrow \int_a^b Re(f\bar{g})\,dt \leq \left|\int_a^b Re(f\bar{g})\,dt\right| \leq \left(\left|\int_a^b Re(f\bar{g})\,dt\right|^2 + \left|\int_a^b Im(f\bar{g})\,dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left| \int_a^b f \bar{g} \, dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
$\uparrow$ CS

DEF
Sia X $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, 2 norme $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ si dicono equivalenti se $\exists\, c, C > 0$ t.c. $c\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq C\|x\|_\beta$ e lo indicheremo con $\lesssim$, cioé $\|x\|_\beta \lesssim \|x\|_\alpha \iff \exists C>0$: $\|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha$

TEOREMA
Sia X $\mathbb{C}$-spazio vettoriale finito dimensionale $\Rightarrow$ tutte le norme sono equivalenti.

dim
Poichè X ha dimensione finita $\exists \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq X$ base.
Definisco allora $\|x\|_1 := \|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$
Sia adesso $\|\cdot\|$ una norma su X $\Rightarrow$ basta dimostrare che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$\leq$) $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|\xi_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|e_i\| \leq \overbrace{\max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|}^{C} \sum_{i=1}^n |\xi_i|$
$= C\|x\|_1$

$\geq$) Ci domandiamo se $\exists\, c>0$ t.c. $\|x\| \geq c\|x\|_1$ $\forall x \in X \setminus \{0\}$
$\iff \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq c \quad \forall x \neq 0$
Chiamiamo $y = \frac{x}{\|x\|_1} \Rightarrow \forall y \ \|y\|_1 = 1$
$\Rightarrow \|x\| \geq c\|x\|_1 \iff \inf_{\substack{y \in X \\ \|y\|_1 = 1}} \|y\| \geq c$

Sia $y = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i| = 1$
Vogliamo vedere se $\exists\, c>0$: $\inf_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^n \\ \sum |\xi_i| = 1}} \|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\| \geq c$
Sia allora $S = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |\xi_i| = 1\}$ chiuso (antimmagine di $\{1\}$) e limitato (ogni componente ≤ 1)
$\xi \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\|$ è continua, infatti:
$\left| \|\sum \xi_i e_i\| - \|\sum \eta_i e_i\| \right| \leq \|\sum (\xi_i - \eta_i) e_i\| \leq C\|\xi - \eta\|_1$
$\uparrow$ (*)

$\Rightarrow$ funzione continua su un compatto

$\Rightarrow$ per Weierstrass $\exists$ minimo

$$\Rightarrow \inf_{\xi \in S} \|\sum \xi_i e_i\| = \min_{\xi \in S} \|\sum \xi_i e_i\| := c > 0$$

$\Rightarrow$ Ho trovato la c t.c. $\|x\| \geq c\|x\|_1$

OSS ⊛

$\forall x, y \in X$

$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$

dim

Dobbiamo mostrare che $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

$\leq$) $\|x\| - \|y\| = \|(x-y)+y\| - \|y\| \leq \|x-y\| + \|y\| - \|y\| = \|x-y\|$

$\geq$) $\|x\| - \|y\| = \|x\| - \|(y-x)+x\| \geq \|x\| - \|y-x\| - \|x\| = -\|x-y\|$

OSS

Non è vero che sugli spazi infinito dimensionali tutte le norme sono equivalenti. Sia ad esempio $X = \mathcal{C}([0,1])$ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti. È vero che:

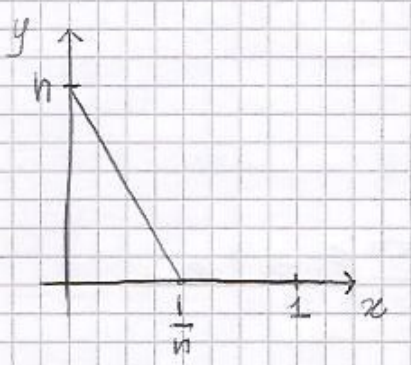
$$\|f\|_1 \lesssim \|f\|_2 \lesssim \|f\|_\infty$$

$\uparrow$ CS

Ma non sono vere le altre

Esempi:

- $\|\cdot\|_1 \not\geq \|\cdot\|_\infty$



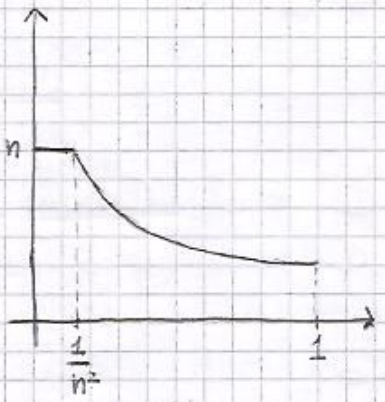
$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2 x + n & x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\|f_n\|_1 = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n| = n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

Un altro esempio poteva essere $f_n(x) = x^n$

• $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_2$



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right] \\ n & x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \end{cases}$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n^2}} n\,dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2n-1}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_n \|f_n\|_1 = 2 < \infty$$

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^{1/n^2} n^2\,dx + \int_{1/n^2}^1 \frac{1}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + -\log\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + 2\log n)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

DEF
Sia X spazio normato, $\{x_n\}_n \subset X$
diciamo che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ $(x \in X) \iff \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_\varepsilon \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$

DEF
X spazio normato, $\{x_n\}_n \subset X$ è di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $n, m > N_\varepsilon \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

OSS
$\{x_n\}_n$ convergente $\Rightarrow$ $\{x_n\}_n$ di Cauchy

DEF
X spazio normato si dice di Banach se $\forall \{x_n\}_n$ di Cauchy è convergente.

Esempio
X spazio finito dimensionale è di Banach

PROP
$(\ell^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach

dim

Sia $\{f_n\}_n \subseteq \ell^\infty(T)$ di Cauchy cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n, m > N_\varepsilon \quad \sup_{t \in T} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

$\forall t \in T \quad |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

Puntualmente, cioè fissato $t \in T$, $\{f_n(t)\}_n \subseteq \mathbb{C}$ è di Cauchy

$\Rightarrow \forall t \in T \ \exists f(t) := \lim_{m \to +\infty} f_m(t)$, poiché $\mathbb{C}$ è completo, cioè di Banach.

Mostriamo adesso che: 1) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

2) $f \in \ell^\infty(T)$

1) $|f_n - f| = \lim_{m \to +\infty} |f_n - f_m| \leq \lim_{m \to +\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$

2) $|f| = |(f - f_n) + f_n| \leq |f - f_n| + |f_n| \leq \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|f_n\|_\infty}_{< \infty \text{ poiché } f_n \in \ell^\infty \ \forall n}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty < +\infty \rightarrow f \in \ell^\infty$

DEF

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ X = \{x_n\}_n \subset \mathbb{C} \mid \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ X = \{x_n\}_n \subset \mathbb{C} \mid \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

PROP

$(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati, in particolare sono spazi di Banach

dim

Mostriamo che $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ è di Banach.

Sia $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^1(\mathbb{N})$ di Cauchy, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : h, K > N_\varepsilon \quad \|x^{(k)} - x^{(h)}\|_1 < \varepsilon$

Non scordiamoci che $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_n$ è una successione in $\ell^1(\mathbb{N})$

Se dunque fissiamo un $n \in \mathbb{N}$

$|x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| = \|x^{(k)} - x^{(h)}\|_1 < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \{x_n^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ è di Cauchy

$\Rightarrow \exists x_n := \lim_{k \to +\infty} x_n^{(k)} \quad \forall n \Rightarrow$ rimane definito $x = \{x_n\}$

Dobbiamo adesso dimostrare che:

1) $\|x^{(k)} - x\|_1 \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

2) $x \in \ell^1(\mathbb{N})$

1) $\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(h)}| = \|x^{(k)} - x^{(h)}\|_1 < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |x_n - x_n^{(k)}| = \lim_{h\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} |x_n^{(h)} - x_n^{(k)}| < \varepsilon$

Dunque $\|x - x^{(k)}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(k)}| < \varepsilon \quad \forall K > N_\varepsilon$

2) $\sum_{n=1}^{N} |x_n| \le \sum_{n=1}^{N} |x_n - x_n^{(k)}| + \sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)}| \le \|x - x^{(k)}\|_1 + \|x^{(k)}\|_1 \quad \forall N$

$\Rightarrow \|x_1\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \le \underbrace{\|x - x^{(k)}\|_1}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|x^{(k)}\|_1}_{<+\infty \text{ poiché } \{x^{(k)}\} \subset \ell^1(\mathbb{N})} < +\infty$

OSS

$\mathcal{C}([a,b])$ è di Banach con $\|\cdot\|_\infty$

dim

Sia $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ di Cauchy

Poiché $\mathcal{C} \subseteq \ell^\infty$ Banach $\Rightarrow \exists f \in \ell^\infty : \|f_n \to f\|_\infty \to 0$

$\|f_n - f\|_\infty = \underbrace{\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0}$

$\Leftrightarrow f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ unif. in $[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{C}([a,b])$

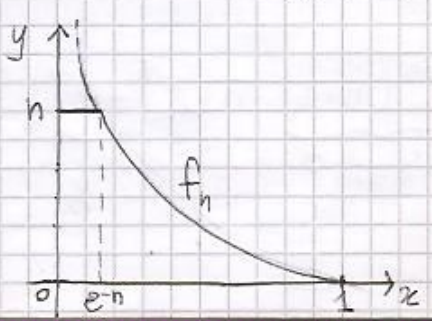
OSS

$(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1)$, $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_2)$ non sono spazi di Banach.

dim

Sia $[a,b] = [0,1]$

e sia $f_n(t) = \begin{cases} n & t \in [0, e^{-n}] \\ -\log t & t \in [e^{-n}, 1] \end{cases}$



$\{f_n\}_n$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$ ($\Rightarrow$ lo è anche rispetto $\|\cdot\|_1$ poiché $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$

infatti:

$$\|f_{n+p} - f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_{n+p} - f_n|^2 = \int_0^{e^{-n}} |f_{n+p} - f_n|^2 \leq \int_0^{e^{-n}} (|f_{n+p}| + |f_n|)^2 \leq$$

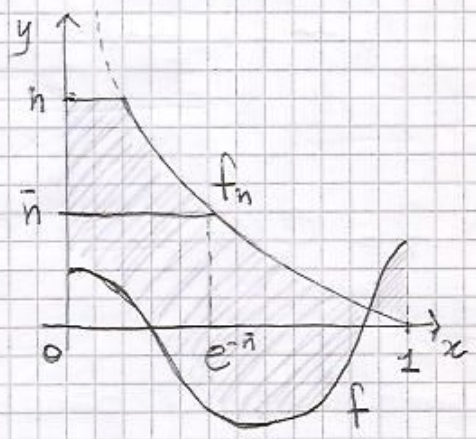
$$\int_0^{e^{-n}} (-\log t - \log t)^2 \, dt = \int_0^{e^{-n}} 4 \log^2 t \, dt \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Dimostriamo adesso che non converge a nessuna funzione continua. L'idea è di supporre che converge ad una funzione continua f; le norme 1 e 2 "misurano" l'area tra il grafico di f_n ed f. Riusciamo quindi a mostrare che l'area tra i due grafici non tende a zero.

$f_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\log t$ (non continua in $[0,1]$)

Vogliamo mostrare che:

$\nexists\, f \in \mathcal{C}([0,1])$ t.c. $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ (e quindi nemmeno per $\|\cdot\|_2$)



Sia allora $f \in \mathcal{C}([0,1]) \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: $\bar{n} \geq \max_{x \in [0,1]} |f|$

$$n > \bar{n} \quad \|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n - f| \geq \int_0^{e^{-\bar{n}}} |f_n - f| = \int_0^{e^{-\bar{n}}} f_n - f \geq$$

$$\int_0^{e^{-\bar{n}}} f_n - \bar{n} = \int_0^{e^{-\bar{n}}} n - \bar{n} \, dt + \int_{e^{-n}}^{e^{-\bar{n}}} (-\log t - \bar{n}) \, dt$$

$$= \underbrace{(n-\bar{n})e^{-n}}_{\to 0 \text{ per } n \to +\infty} + e^{-\bar{n}}(\bar{n}+1) - \underbrace{e^{-n}(n+1)}_{\to 0 \text{ per } n \to +\infty} - \bar{n}(e^{-\bar{n}} - \underbrace{e^{-n}}_{\to 0 \text{ per } n \to +\infty})$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} \cancel{\bar{n}e^{-\bar{n}}} + e^{-\bar{n}} - \cancel{\bar{n}e^{-\bar{n}}} > 0$$

DEF

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati

$f: X \longrightarrow Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\|x - x_0\|_X < \delta$ $\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$

DEF

X, Y spazi normati

$T: X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare se

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

DEF

X, Y spazi normati, $T: X \longrightarrow Y$ lineare

T si dice limitato se $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$

OSS

In poche parole un operatore limitato trasforma la palla unitaria del dominio X in un sottoinsieme limitato di Y

TEOREMA

X, Y spazi normati, $T: X \longrightarrow Y$ lineare. Sono equivalenti:

1) T è limitato
2) T è continuo in $0 \in X$
3) T è continuo $\forall x \in X$

dim

3) $\Rightarrow$ 2) ovvio

2) $\Rightarrow$ 1) T è continuo in $0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$

Dobbiamo mostrare che T è limitato

Sia $x \in X$; $\|x\| \leq 1$

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2} x \cdot \frac{2}{\delta}\right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta x}{2}\right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

$$\left\| \frac{\delta x}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} \|x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} < +\infty$$

1) $\Rightarrow$ 3) Fissiamo $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$

$$\|Tx - Tx_0\| \underset{\text{per linearità}}{=} \|T(x - x_0)\| = \|x - x_0\| \cdot \left\| T\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \right\| \leq \underbrace{\|T\| \|x - x_0\|}_{\leq \|T\| \delta}$$

Fissiamo allora $\delta := \frac{\varepsilon}{\|T\|} \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$

Esempio

Sia $X = (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e sia $c \in (0,1)$

Consideriamo $\delta_c : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (delta di Dirac)

$f \longmapsto f(c)$

È limitata?

$$\|\delta_c\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\delta_c(f)| \leq 1$$

$$|\delta_c(f)| = |f(c)| \leq \|f\|_\infty \leq 1$$

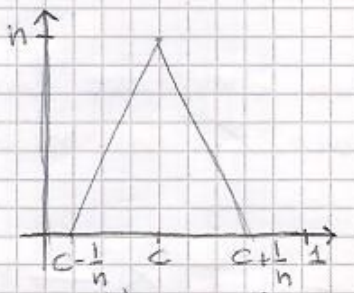
In particolare $f(x) = 1 \ \forall x \in [0,1] \in X$

$$\Rightarrow \delta_c(f) = f(c) = 1 \Rightarrow \|\delta_c\| = 1$$

Sia ora, invece, $\delta_c : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ è limitata

$$\Leftrightarrow \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |f(c)| < +\infty$$

Sia allora f_n fatta così:



$$\|f_n\|_1 = n \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

ma $f_n(c) = n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

dunque in questo caso l'operatore non è limitato

NOTAZIONE

$$B(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \mid T \text{ è limitato}\}$$

TEOREMA

X, Y normati

1) $B(X,Y)$ con le operazioni

$(T+S)x := Tx + Sx \quad x \in X, \ T, S \in B(X,Y)$

$(\alpha T)x := \alpha Tx \quad x \in X, \ \alpha \in \mathbb{C}, \ T \in B(X,Y)$

e con $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ è uno spazio normato

2) Z spazio normato, $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$

$\Rightarrow S \circ T \in B(X,Z)$, $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

3) Y Banach $\Rightarrow B(X,Y)$ Banach

dim

1) • $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \ \forall x \in X$; $\|x\| \leq 1 \Rightarrow Tx = 0$ (perché Y normato)

invece $\forall x \in X \quad \|Tx\| = \underbrace{\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|}_{=0} \cdot \|x\| = 0 \Rightarrow Tx = 0$

• $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup \|Tx\| = |\alpha| \, \|T\|$

- per $\|x\| \leq 1$

$\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\| + \|S\|$

$\Rightarrow \|T+S\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T+S)x\| \leq \|T\| + \|S\|$

2) $x \in X$, $\|x\| \leq 1$

$\|(S \circ T)x\| = \|S(Tx)\| = \frac{\|S(Tx)\|}{\|Tx\|} \cdot \|Tx\| = \|S\left(\frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\| \, \|Tx\| \leq \|S\|\|T\|$

(se $Tx \neq 0$)

3) Y Banach, $\{T_n\}_n \subseteq B(X,Y)$ di Cauchy, allora $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon$:

$\forall x \in X \quad \|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$ ($n, m > n_\varepsilon$)

$\Rightarrow \forall x \in X \; \{T_n x\} \subseteq Y$ è di Cauchy

$\Rightarrow \exists \, Tx := \lim_{n \to +\infty} T_n x \quad \forall x \in X$

Mostriamo che T è lineare

$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to +\infty} T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to +\infty} \alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2$

$= \alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2$

$|(\|x\| - \|y\|)| \leq \|x - y\|$

$\|Tx - T_n x\| \leq \lim_{m \to +\infty} \|T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\|$

$\Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \quad n > n_\varepsilon$

Mostriamo infine che T è limitato, $\|x\| \leq 1$

$\|Tx\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$

$\Rightarrow \|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\| < +\infty \Rightarrow T \in B(X,Y)$ ■

OSS

X Banach $\Rightarrow B(X) := B(X,X)$ è un Banach ed un algebra con il prodotto $(T,S) \in B(X) \times B(X) \longmapsto T \circ S \in B(X)$

($\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$) $\Rightarrow B(X)$ è un algebra di Banach

A me piacerebbe sempre lavorare con operatori limitati, poichè più comodi, ma a volte ho limitatezza solo su sottoinsieni

DEF

X sp. normato, $S \subseteq X$

La chiusura di S è $\overline{S} = \{x \in X \mid \exists \{x_k\} \subseteq S : x_k \to x\}$

$S \subseteq X$ si dice denso se $\overline{S} = X$

TEOREMA (estensione di operatori limitati)

X normato, Y Banach, $D \subseteq X$ denso e $T : D \to Y$ limitato

$\Rightarrow \exists! \, \overline{T} \in B(X,Y)$ che estende T (cioè $\overline{T}x = Tx \; \forall x \in D$) e inoltre $\|\overline{T}\| = \|T\|$

dim

Dato $x \in X$ $\exists \{x_n\} \subseteq D$ t.c. $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$

$\Rightarrow \{x_n\}_n$ è di Cauchy $(\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon)$.

Definisco: $\overline{T}x := \lim_{n \to +\infty} Tx_n$

- Mostriamo che il limite esiste

$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| = \|T\left(\frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|}\right)\| \|x_n - x_m\| \leq \|T\| \|x_n - x$

$< \varepsilon \|T$

$\Rightarrow \{Tx_n\} \subseteq Y$ è di Cauchy

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} Tx_n = \overline{T}x$, ma è una buona definizione?

- Dobbiamo cioè far vedere che non dipende da $\{x_n\}$

Sia $\{x_n'\} \subseteq D$ t.c. $x_n' \to x$

$\|Tx_n' - \overline{T}x_n\| \leq \|T\| \|x_n' - x_n\| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} Tx_n' = \lim_{n \to +\infty} Tx_n$

- Mostriamo che $\overline{T}$ è lineare:

$x, y \in X \Rightarrow \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset D$ t.c. $x_n \to x$, $y_n \to y$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$

(↑ D sottospazio)

$\Rightarrow \overline{T}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to +\infty} T(\alpha x_n + \beta y_n) =$ (T è lineare)

$= \lim_{n \to +\infty} \alpha Tx_n + \beta Ty_n = \alpha \overline{T}x + \beta \overline{T}y$

- Mostriamo che $\overline{T}$ estende T:

$\forall x \in D$ scegliamo $x_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{T}x = \lim_{n \to +\infty} Tx_n = \lim_{n \to +\infty} Tx =$

- Mostriamo infine che $\|\overline{T}\| = \|T\|$

$\|\overline{T}\| \leq \|T\|$ $(< +\infty)$: $x \in X$, $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x$

$\|\overline{T}x\| = \lim_{n \to +\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n \to +\infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|x\|$

(↑ $(|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|)$)

$\Rightarrow \|\overline{T}\| \leq \|T\|$

$\|\overline{T}\| \geq \|T\|$:

$\|\overline{T}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|\overline{T}x\| \geq \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\| \leq 1}} \|\overline{T}x\| = \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\| = 1}} \|Tx\| = \|T\|$

$\Rightarrow$ segue proprio dal fatto che $\overline{T}$ estende T

$\Rightarrow \|\overline{T}\| = \|T\|$

■

Teoria della misura

NOTAZ

X insieme, $\mathcal{P}(X) := \{E \subseteq X\}$ insieme delle parti di X

DEF

Un anello di insiemi di X è una famiglia $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.

1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$

2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

Un anello si dice un' algebra se $X \in \mathcal{R}$

Un' algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice una σ-algebra se

$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{M}$

DEF (misura)

1) $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ anello, una misura (additiva) su $\mathcal{R}$ è un' applicazione $\mu: \mathcal{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che

$A, B \in \mathcal{R}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

2) $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, una misura (σ-additiva) su $\mathcal{M}$ è un' applicazione $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che

dati $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ con $A_k \cap A_j = \emptyset \ \forall k \neq j$

$\Rightarrow \mu\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k}_{\in \mathcal{M}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$ (serie a termini positivi $\Rightarrow$ convergente o divergente $\neq +\infty$)

OSS

Sia $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra e sia $\{A_k\}_k \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{M}$,

infatti $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^c}_{\in \mathcal{M}}\right)^c$ ← $A_k^c = \underset{\in \mathcal{M}}{X} \setminus \underset{\in \mathcal{M}}{A_k} \in \mathcal{M}$

Sia adesso $X = \mathbb{R}^n$

DEF

Un intervallo in $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $I = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ con $J_k \subseteq \mathbb{R}$ intervallo limitato (aperto, chiuso o semiaperto)

La misura di I è $m(I) = \prod_{k=1}^{n} |J_k|$, con $|J_k|$ = lunghezza di J_k

DEF

Un plurintervallo o insieme elementare è l'unione di un numero finito di intervalli, $\mathcal{E} := \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E$ è un insieme elementare$\}$

TEOREMA (proprietà degli insiemi elementari)

1) $\mathcal{E}$ è un anello in $\mathbb{R}^n$

2) $\forall E \in \mathcal{E}$ esistono intervalli disgiunti $I_1, I_2, \dots, I_r$ tali che

$E = \bigcup_{k=1}^{r} I_k$

3) Se E è come in (2) il numero $m(E) := \sum_{k=1}^{r} m(I_k)$ non dipende dalla decomposizione di E in unione di intervalli disgiunti

4) L'applicazione $m: \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty)$ definita in (3) è una misura additiva

5) m è una misura regolare cioè $\forall E \in \mathcal{E}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A, C \in \mathcal{E}$ tali che A è aperto, C è chiuso, $C \subset E \subset A$ e $m(A) < m(E) + \varepsilon$, $m(C) > m(E) - \varepsilon$

Abbiamo dunque costruito una misura su un anello, adesso vogliamo estendere questa misura su una σ-algebra

DEF

Per $n = 1$, sia $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e continua a destra (cioè $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$)

$F(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} F(x)$ $(\leq F(x_0))$ che $\exists$ per monotonia

Definisco allora $m_F((a,b]) := F(b) - F(a)$

$m_F([a,b)) := F(b^-) - F(a^-)$

$m_F((a,b)) := F(b^-) - F(a)$

$m_F([a,b]) := F(b) - F(a^-)$

m_F si estende ai plurintervalli come nel teorema precedente

se $F(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m_F = m$

DEF

$\mu: \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty)$ misura additiva regolare ($\mu = m, m_F, \dots$).

La misura esterna definita da μ è un'applicazione

$\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ definita da

$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) \mid E_k \in \mathcal{E} \text{ aperto } \forall k \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right\}$

NOTAZ.

$A, B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ differenza simmetrica

DEF

$\mathcal{M}_F(\mu) := \left\{ A \subset \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists E \in \mathcal{E} \text{ t.c. } \mu^*(A \triangle E) < \varepsilon \right\}$

$\mathcal{M}(\mu) := \left\{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k, A_k \in \mathcal{M}_F(\mu) \right\}$

TEOREMA (prolungamento di Lebesgue della misura)
$\mu: \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ misura regolare. Allora $\mathcal{M}(\mu)$ è una σ-algebra (detta σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue) e $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mu)}$ è l'unica misura σ-additiva che estende μ a $\mathcal{M}(\mu)$ (e si indica ancora con μ).

Esempio
$\mu = m \Rightarrow$ l'estensione agli insiemi misurabili è la misura di Lebesgue
$\mu = m_F \Rightarrow$ l'estensione agli insiemi misurabili è la misura di Lebesgue - Stieltjes (associata ad F)

DEF
X spazio normato, $A \subset X$ è aperto se $\forall x \in A, \exists r > 0$ t.c $B_r(x) = \{y \in X \mid \|x-y\| < r\} \subset A$

DEF
X spazio normato la σ-algebra dei boreliani di X è la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli insiemi aperti, e si indica con $\mathcal{B}(X)$

TEOREMA
$\mu: \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ misura regolare. Allora $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mu)$ e $\forall A \in \mathcal{M}(\mu)$ $\exists F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, F unione numerabile di chiusi e G intersezione numerabile di insiemi aperti, tali che $F \subset A \subset G$ e $\mu(G \setminus A) = 0 = \mu(A \setminus F)$.

DEF
Uno spazio di misura è una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dove X è un'insieme, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra e $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura (σ-additiva). Un insieme $A \in \mathcal{M}$ è detto misurabile.

Esempi
a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m)$ (insiemi misurabili secondo Lebesgue), $\mu = m$ misura di Lebesgue
b) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m_F)$ $\mu = m_F$ misura di Lebesgue-Stieltjes
c) X insieme arbitrario, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \delta_x$ $(x \in X)$ così definita

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

misura di Dirac concentrata in $x \in X$, ed è effettivamente una misura, basta prendere infatti una famiglia

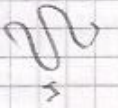
numerabile di insiemi a due a due disgiunti e verificare che $\delta_x(U) = \sum \delta_x$ ma siccome sono insiemi disgiunti:

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $E_k \cap E_h = \emptyset$ $k \neq h$ e $x \in E \iff \exists! k \in \mathbb{N}$ t.c. $x \in E_k$

$\delta_x(E_k) = 1$

$\delta_x(E_h) = 0$ $h \neq k$

$\Rightarrow 1 = \delta_x(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_x(E_n)$



OSS

Abbiamo già visto che la delta di Dirac è un funzionale sulle funzioni continue, adesso vediamo che è una misura su un insieme, e queste cose sono equivalenti (∃ identificazioni)

Ritornando all'esempio: fissando $X = \mathbb{R}$ e $\delta_x = m_{F_x}$ dove $F_x = \chi_{[x,+\infty)}$ (dimostrare: la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a F_x m_{F_x} è proprio la misura di Dirac δ_x)

d) X = insieme arbitrario $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ si può definire

$$\mu^*(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } \#E < +\infty \\ +\infty & \text{se } \#E = +\infty \end{cases}$$

(la misura che conta)

DEF

Siano X, Y insiemi e $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-algebre. Una funzione $f: X \to Y$ si dice misurabile se $\forall A \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\} \in \mathcal{M}$.

I casi importanti che considereremo sono:

- $Y = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, o $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, quindi a meno che non sia specificato sullo spazio di arrivo metto sempre la σ-algebra dei boreliani
- $Y = \tilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\tilde{\mathbb{R}})$ che è la più piccola σ-algebra contenente tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ e anche le semirette $(a, +\infty]$ e $[-\infty, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

PROP (proprietà delle funzioni misurabili)

X insieme arbitrario, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra $\Rightarrow$

1) Y spazio normato, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(Y) \Rightarrow f: X \to Y$ è misurabile $\iff \forall A \subset Y$ aperto $\Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$
2) $f: X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile $\iff \{f > a\} := \{x \in X \mid f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\iff \{f < a\} \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\iff \{f \geq a\} \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\iff \{f \leq a\} \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

3) $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ misurabile $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_n f_n$, $\sup_n f_n$ sono misurabili

4) $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ misurabili $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow E := \{x \in X \mid \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ $E \in \mathcal{M}$ e la funzione $f_0 : E \to \tilde{\mathbb{R}}$ definita da $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_E := \{F \cap E \mid F \in \mathcal{M}\}$

5) Y, Z spazi normati, $f : X \to Y$ misurabile, $g : Y \to Z$ continua $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ è misurabile

6) $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ misurabili $\Rightarrow f = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ è misurabile

7) $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile $\Leftrightarrow \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili

8) $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$ misurabili $\Rightarrow f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{C}$ sono misurabili

OSS

X, Y spazi normati, $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow \forall A \subset Y$ aperto $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto $\Rightarrow$ è boreliano $\Rightarrow f$ è misurabile per (1)

La precedente proposizione essenzialmente ci dice che qualunque funzione definita mediante operazioni analitiche tra funzioni misurabili è ancora misurabile.
Introduciamo adesso il concetto di funzione semplice che giocano un ruolo fondamentale nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue come lo erano le funzioni a gradini per la teoria dell'integrazione di Riemann.

DEF

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura. Una funzione misurabile $s : X \to \mathbb{C}$ è detta semplice se $s(X) \subset \mathbb{C}$ è un insieme finito.
Quindi se $s(X) = \{c_1, c_2, \dots c_n\}$ $c_n \neq c_k$ se $h \neq k$ $E_k := s^{-1}(\{c_k\}) = \{x \in X \mid s(x) = c_k\} \in \mathcal{M}$ (controimmagine di un chiuso)
Vediamo le proprietà di questi insiemi:

- $E_k \cap E_h = \varnothing$ se $h \neq k$
- $X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ cioè gli $\{E_k\}$ sono una partizione misurabile di X

Definiti questi insiemi possiamo dunque scrivere:

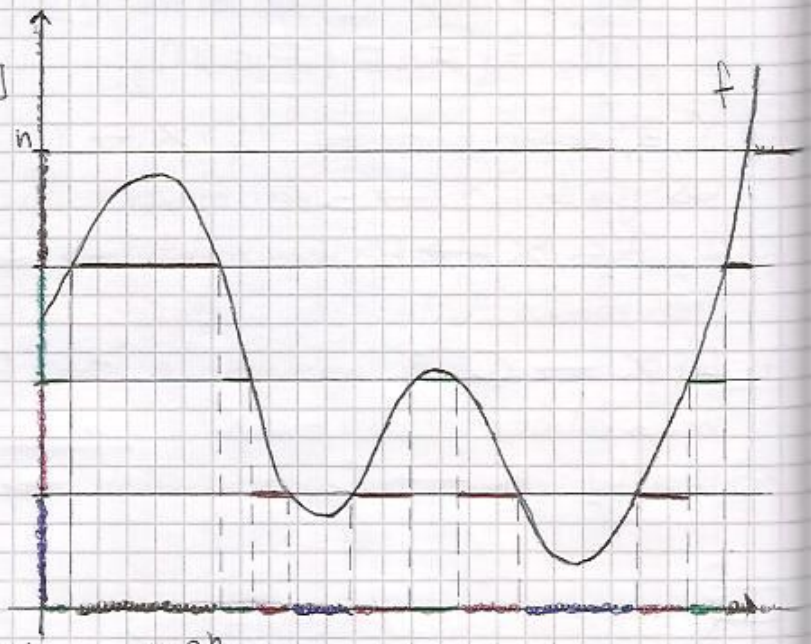
$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

È chiaro che somme e prodotti di funzioni semplici sono semplici

TEOREMA

Data $f: X \to \mathbb{C}$ misurabile $\exists \{s_n\}$ di funzioni semplici t.c. $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in X$. Inoltre se $f \geq 0 \Rightarrow \{s_n\}$ è crescente

Idea della dimostrazione



Supponiamo $f \geq 0$ e fissiamo n. Prendiamo l'intervallo $[0,n]$ e lo dividiamo in intervallini di ampiezza $\frac{1}{2^n}$. In corrispondenza di questi intervallini definisco la funzione semplice come l'inf del corrispondente intervallo nel codominio. Sia allora

$F_n = f^{-1}([n, +\infty))$

$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right)$ con $k = 1, \dots, n2^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n \chi_{F_n}$$

$$\Rightarrow s_n(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in X$$

Se invece f è una qualsiasi funzione a valori complessi definiamo $f_1 = \mathrm{Re} f$, $f_2 = \mathrm{Im} f$

e poi $f_i^+ = \max\{f_i, 0\}$, $f_i^- = -\min\{f_i, 0\}$

f_i^+ parte positiva di f_i; f_i^- parte negativa di f_i

$f_i^\pm \geq 0$ e misurabili poiché la parte reale e parte immaginaria di una funzione misurabile è misurabile e il massimo ed il minimo tra funzioni misurabili è misurabile per la proposizione precedente e $f = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-)$.

Basta dunque approssimare $f_i^\pm$ con funzioni semplici. ∎

OSS

Dunque l'idea principale dell'integrazione secondo Lebesgue è quella di ribaltare il punto di vista: mentre con Riemann si prendeva l'intervallo di definizione della funzione e lo si tagliava in tanti intervalli, qui si taglia in intervalli il codominio, che a posteriori ha il vantaggio di approssimare

meglio la funzione però ha lo svantaggio che le controimmagini degli intervalli in cui affettiamo il dominio non sono più intervalli (potrebbero essere ad esempio unione numerabile di intervalli) per questo serve una misura "più potente" della misura di Peano - Jordan.

DEF
$(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura

1) $s: X \to \mathbb{C}$ semplice $\quad s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$

$$\int_X s\,d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$$

2) $f: X \to [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{ \int_X s\,d\mu \mid s: X \to [0,+\infty] \text{ è semplice e } s \leq f \right\} \subseteq [0,+\infty]$$

3) $f: X \to \tilde{\mathbb{R}}$ misurabile

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu \quad \text{se almeno uno dei due è finito}$$

4) $f: X \to \mathbb{C}$ misurabile t.c. $\int_X |f|\,d\mu < +\infty$

$$\int_X f\,d\mu := \int_X \mathrm{Re}\, f\,d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f\,d\mu.$$

Indichiamo con $L^1(X,\mu) := \left\{ f: X \to \mathbb{C} \mid f \text{ è misurabile e } \int_X |f|\,d\mu < +\infty \right\}$

OSS
Poiché $\int_X |f|\,d\mu < +\infty$ e $0 \leq (\mathrm{Re} f)^{\pm} \leq |\mathrm{Re} f| \leq |f|$
$0 \leq (\mathrm{Im} f)^{\pm} \leq |\mathrm{Im} f| \leq |f|$
Allora $\int_X f\,d\mu$ ha senso per come l'ho definito

OSS
Sia $E \subset X$ misurabile $\Rightarrow \int_E f\,d\mu := \int_X f \chi_E\,d\mu$

PROP (Proprietà dell'integrale)
$(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura

1) $f, g \in L^1(X,\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu$$ (linearità dell'integrale)

2) $f \geq 0 \Rightarrow$ l'applicazione $E \in \mathcal{M} \longmapsto \lambda(E) := \int_E f\,d\mu \in [0,+\infty]$ è una misura (σ-additiva)

3) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$

4) $\left| \int_X f\,d\mu \right| \leq \int_X |f|\,d\mu$ se $f \in L^1(X,\mu)$

5) $f \geq 0$ e $\int_X f\,d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ q.o. (cioè $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = 0$)

6) $f \in L^1(X,\mu)$ e $\int_E f\,d\mu = 0$ $\forall E \in \mathcal{M} \Rightarrow f = 0$ q.o.

7) $f \in L^1(X,\mu) \Rightarrow |f| < +\infty$ q.o.

TEOREMA (convergenza monotona di Beppo Levi)
Sia $f: X \to [0,+\infty]$ misurabile, $f_n : X \to [0,+\infty]$ misurabile $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per q.o. $x \in X$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. x

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

LEMMA (Fatou)
$f_n : X \to [0,+\infty]$ misurabile $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_X (\liminf_n f_n) \leq \liminf_n \int_X f_n$$

dim
Osserviamo innanzitutto che $\int_X (\liminf_n f_n)$ esiste perché $\liminf f_n$ è misurabile e non negativo.
Sia $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} = \inf_{k\geq n}\{f_k(x)\}$ $x \in X$ $\forall n$
g_n è misurabile e $g_n(x) \nearrow \liminf f_n(x)$, inoltre

$$0 \leq g_n \leq f_k \quad \forall k \geq n$$

Dunque per il teorema di convergenza monotone

$$\int_X g_n \nearrow \int_X (\liminf_n f_n)$$

e per monotonia $\int_X g_n \leq \int_X f_k$ $\forall k \geq n$
Quindi

$$\int_X g_n \leq \inf\left\{\int_X f_n, \int_X f_{n+1}, \dots\right\} = \inf_{k\geq n}\left(\int_X f_k\right)$$

$$\int_X (\liminf_n f_n) \leq \liminf_n \int_X f_n$$

TEOREMA (convergenza dominata di Lebesgue)
$f \in L^1(X,\mu)$, $\{f_n\} \subset L^1(X,\mu)$ tali che:
1) $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$
2) $\exists\, g \in L^1(X,\mu)$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

Quindi

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)\,d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n = \int_X f$$

dim

Vogliamo dimostrare che

$$\limsup_n \int_X |f_n - f|\,d\mu \leq \liminf_n \int_X |f_n - f|\,d\mu \leq \limsup_n \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

(la prima $\leq$ è ovvia)

Per Fatou sappiamo già che

$$0 = \int_X \liminf |f_n - f| \leq \liminf_n \int_X |f_n - f|$$

Consideriamo $h_n = 2g - |f_n - f| \geq 0$ su cui vale Fatou

$$\int_X \liminf_n h_n \leq \liminf_n \int_X h_n \qquad \text{(Ricordiamo che } -\liminf a_n = \limsup(-a_n)\text{)}$$

$$\int_X 2g \leq \liminf_n \int_X 2g - |f_n - f| = \int_X 2g - \limsup_n \int_X |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \limsup_n \int_n |f_n - f|\,d\mu \leq 0 \leq \liminf \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

■

DEF

$A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se posto

$m_e(A) := \inf\{ m(E) \mid E \in \mathcal{E},\ A \subset E\}$ (misura esterna di Peano-Jordan)

$m_i(A) := \sup\{ m(E) \mid E \in \mathcal{E},\ E \subset A\}$ (misura interna di Peano-Jordan)

$$\Rightarrow m_e(A) = m_i(A)$$

TEOREMA (Vitali-Lebesgue)

$E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan, $f: E \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann $\Leftrightarrow$ l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla (secondo Lebesgue). E in tal caso l'integrale di Riemann e di Lebesgue di f coincidono.

OSS

Tale teorema è importante perché lega l'integrale di Riemann a quello di Lebesgue ed è utile da un punto di vista soprattutto operativo

OSS

Vedremo adesso un altro importante teorema che è la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo che nella sua versione elementare afferma che:

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

Con l'integrale di Lebesgue però vorrei non limitarmi ad trovare primitive di funzioni continue ma di una classe più ampia come quelle L^1. In generale però ciò non è vero, sia infatti
$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \in L^1([0,1])$ che è una funzione semplice e misurabile perché $\mathbb{Q}$ è misurabile ($\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{q_n\}$, $\{q_n\}$ è chiuso $\Rightarrow \{q_n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(m)$ $\leftarrow$ Lebesgue misurabili).

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \sum_{n:q_n\in[0,1]} m(\{q_n\}) = 0$$

$\Rightarrow$ se definisco $F(x) = \int_0^x \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow F'(x) = 0 \neq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ se $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$

In generale, dunque accade che

TEOREMA (fondamentale del calcolo)
$f \in L^1([a,b])$, posto $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F$ è derivabile q.o. e $F'(x) = f(x)$ per q.o. $x \in [a,b]$.
Viceversa se $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che $\exists\, F'(x) =: f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e $f \in L^1([a,b])$ allora

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

OSS
In merito a quest'ultima affermazione si può pensare che basti che F sia derivabile q.o. ma così non è, infatti si può dimostrare che $\exists\, g: [0,1] \to [0,1]$ continua e crescente t.c. $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g'(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$
$\Rightarrow \int_0^1 g'(x)\,dx = 0 \neq g(1) - g(0)$ (funzione di Cantor-Vitali)

DEF
$(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura, sia $p \geq 1$
$L^p(X,\mu) := \{ f: X \to \mathbb{C} \mid f$ è misurabile e $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < +\infty \}$

OSS
Chiaramente $\|f\|_p = 0 \iff \int_X |f|^p\,d\mu = 0 \not\Rightarrow f = 0$
infatti $\int_X |f|^p\,d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ q.o.
Dunque per risolvere questo problema, d'ora in poi le funzioni saranno classi di funzioni in cui due funzioni saranno identificate se sono uguali q.o.
$\Rightarrow$ in tal modo $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$

TEOREMA

$(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato $\forall p \geq 1$

dim

$p=1$: $\|f+g\|_1 = \int_X |f+g|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$

$p=2$: Mostriamo innanzitutto che L^2 è uno spazio vettoriale

$f, g \in L^2 \Rightarrow f+g \in L^2$

$|f+g|^2 \leq (|f|+|g|)^2 \leq (2\max\{|f|,|g|\})^2$

$= 4\max\{|f|^2, |g|^2\} \leq 4(|f|^2+|g|^2) \in L^1$

($|f|^2 \in L^1$ perché $f \in L^2$; $|g|^2 \in L^1$ perché $g \in L^2$)

Infine per dimostrare che $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$, si usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz però per poterla usare dobbiamo verificare che $\langle f,g\rangle := \int_X \bar{f} g\,d\mu$ è un prodotto scalare.

Verifichiamo quindi che $f, g \in L^2 \Rightarrow \bar{f}g \in L^1$

$|\bar{f}g| \leq |f||g| \leq (\max\{|f|,|g|\})^2 \leq |f|^2+|g|^2 \in L^1$

$\Rightarrow \langle f,g\rangle$ è ben definito $\Rightarrow$ vale Cauchy-Schwarz

$\Rightarrow \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ (già visto)

$p>2$: non vedremo la dimostrazione ∎

DEF

$f: X \to \mathbb{C}$ è <u>essenzialmente limitata</u> se $\exists M>0$ t.c. $\mu(\{|f|>M\}) = 0$

DEF

$L^\infty(X,\mu) := \{ f: X \to \mathbb{C} \mid f$ è misurabile ed essenzialmente limitata$\}$

$\|f\|_\infty := \inf\{M>0 \mid \mu(\{|f|>M\}) = 0\}$ (norma dell'estremo superiore essenziale)

TEOREMA (Riesz-Fischer)

$(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach $\forall p \in [1,+\infty]$

dim

Sia $p<+\infty$ e sia $\{f_n\}_n \subset L^p(X,\mu)$ di Cauchy, vogliamo dimostrare che f_n converge in L^p; per farlo passiamo ad una sottosuccessione, così costruita:

(Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$)

Sia allora $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, n_1$ se $n, m \geq n_1 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \exists\, n_2 > n_1$ t.c. $n, m \geq n_2 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{4}$

in particolare $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$

e possiamo così continuare

$\varepsilon = \frac{1}{8} \Rightarrow \exists\, n_3 > n_2$ t.c. $n, m \geq n_3 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{8}$

e in particolare $\|f_{n_3} - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{4}$

$\vdots$ iterando

$\exists\, \{n_k\}_k$ crescente t.c. $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Definiamo:

$$g_r := \sum_{k=1}^{r-1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad , \quad g := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

$g_r, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$

$$\int_X g^p \, d\mu = \int_X \left(\lim_{r \to +\infty} g_r^p\right) d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{r \to +\infty} \int_X g_r^p \, d\mu =$$

$$= \liminf_{r \to +\infty} \|g_r\|_p^p \leq \liminf_{r \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p\right)^p \leq$$

$\leq$ norma della somma $\leq$ somma delle norme

$$\leq \liminf_{r \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{2^k}\right)^p \leq 1$$

$\Rightarrow g \in L^p \Rightarrow g(x) < +\infty$ per q.o. $x \in X$

Possiamo quindi definire

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

assolutamente convergente per q.o. $x \in X$

Adesso, f si può estendere ad una funzione misurabile definita su tutto X. Abbiamo dunque il candidato limite della successione di Cauchy e mostriamo che è effettivamente il limite.

Osserviamo prima che

$$f(x) = \lim_{r \to +\infty} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{r-1} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right) \overset{\text{serie telescopica}}{=}$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \cancel{f_{n_1}(x)} + f_{n_r}(x) - \cancel{f_{n_1}(x)} = \lim_{r \to +\infty} f_{n_r}(x)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, $m > n_\varepsilon \Rightarrow \int_X |f - f_m|^p \, d\mu =$

$$= \int_X \lim_{r\to+\infty} |f_{n_r} - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{r\to+\infty} \int_X |f_{n_r} - f_m|^p \, d\mu =$$

(↑ Fatou)

$$= \liminf_{r\to+\infty} \|f_{n_r} - f_m\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

$\Rightarrow$ se $m > n_\varepsilon \Rightarrow \|f - f_m\|_p < \varepsilon \Rightarrow f_m \to f$ in L^p

ed $f = \underbrace{(f - f_m)}_{\in L^p} + \underbrace{f_m}_{\in L^p} \in L^p$

(Rimane il caso $p = +\infty$)

■

DEF

Y spazio normato, $X \subset Y$, $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ misura (σ-additiva) si dice regolare se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ $\exists C \subset E$ chiuso, $A \supset E$ aperto tali che

$$\mu(E \setminus C) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus E) < \varepsilon$$

TEOREMA

Y spazio normato, $X \subset Y$, μ misura di Borel regolare su X t.c. $\mu(X) < +\infty$. Allora $C_b(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ è continua e limitata} \}$ è denso in $L^p(X, \mu)$ $\forall p \in [1, +\infty)$

dim

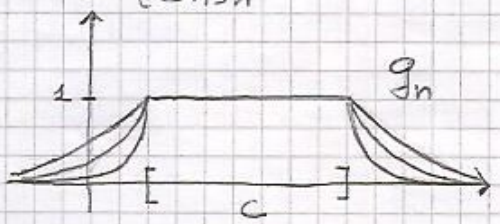
Osserviamo innanzitutto che $C_b(X) \subset L^p(X, \mu)$, infatti sia $g \in C_b(X) \Rightarrow g$ è misurabile perché continua e

$$\int_X |g|^p \, d\mu \leq \|g\|_\infty^p \int_X 1 \, d\mu = \|g\|_\infty^p \, \mu(X) < +\infty \to g \in L^p$$

Dimostriamo quindi che è denso:

Sia $C \subset X$ chiuso ($\Leftrightarrow C^c$ aperto) e, ricordando che $\operatorname{dist}(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$, definiamo $\{g_n\}_n \subset C_b(X)$ così:

$$g_n(x) := \frac{1}{1 + n \operatorname{dist}(x, C)}, \quad n \in \mathbb{N}$$



$x \notin C \Rightarrow \operatorname{dist}(x, C) > 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$, mentre se $x \in C \Rightarrow g_n(x) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow g_n(x) \longrightarrow \chi_C(x) \ \forall x \in X$, inoltre $|g_n(x)| \leq 1 \ \forall x \in X$

$\Rightarrow |g_n(x) - \chi_C(x)|^p \leq (\underbrace{|g_n(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\chi_C(x)|}_{\leq 1})^p \leq 2^p \in L^1(X, \mu) \ \forall n$ (↑ $\mu(X) < +\infty$)

$\Rightarrow$ (↑ converg. dominata) $\|g_n - \chi_C\|_p^p = \int_X |g_n - \chi_C|^p \, d\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Sia adesso $E \in \mathcal{B}(X) \overset{\mu \text{ regolare}}{\Longrightarrow} \exists\, C \subset E$ chiuso t.c. $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$

$$\|\chi_E - \chi_C\|_p^p = \int_X |\chi_E - \chi_C|^p \, d\mu = \int_X |\chi_{E \setminus C}|^p \, d\mu = \int_X \chi_{E \setminus C} \, d\mu =$$
$$= \mu(E \setminus C) < \varepsilon$$

Per quanto visto prima
$\exists\, g \in C_b(X)$ t.c. $\|g - \chi_C\|_p < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|g - \chi_E\|_p \leq \|g - \chi_C\|_p + \|\chi_C - \chi_E\|_p < \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

Sia poi $s: X \to \mathbb{C}$ semplice, $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$, $E_j \in \mathcal{B}(X)$
basta allora approssimare ogni χ_{E_j} con funzioni in $C_b(X)$
e fare la combinazione lineare.

Data $f \in L^p(X,\mu)$, $f \geq 0 \Rightarrow \exists\, \{s_n\}$ semplici t.c. $s_n \nearrow f$

$|f - s_n|^p = (f - s_n)^p \leq f^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($f^p \in L^1$)

$\overset{\text{T.C.D.}}{\Longrightarrow} \|f - s_n\|_p^p = \int_X |f - s_n|^p \, d\mu \longrightarrow 0$

Dunque dato $\varepsilon > 0$ $\exists n$: $\|f - s_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists\, g \in C_b(X)$ t.c.
$\|s_n - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|f - g\|_p \leq \|f - s_n\|_p + \|s_n - g\|_p < \varepsilon$

Infine data $f \in L^p(X,\mu)$, si ha $f = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-)$
e $f_i^{\pm} \in L^p$, $f_i^{\pm} \geq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, g_i^{\pm} \in C_b(X)$ t.c.
$\|g_i^{\pm} - f_i^{\pm}\|_p < \varepsilon \Rightarrow g := (g_1^+ - g_1^-) + i(g_2^+ - g_2^-) \Rightarrow \|f - g\| \leq 4\varepsilon$ ∎

Spazi di Hilbert

DEF

H spazio vettoriale complesso. Una forma sesquilineare su H è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che:

(1) $\forall x \in H$, $y \in H \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ è lineare

(2) $\forall y \in H$, $x \in H \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ è antilineare

$(\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle x_1, y \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle x_2, y \rangle \quad \forall x_1, x_2 \in H \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$

Una forma sesquilineare si dice hermitiana se

(3) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H$

Una forma hermitiana si dice semidefinita positiva se

(4) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

Una forma hermitiana si dice un prodotto scalare (o definita positiva)

(4') $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in H, x \neq 0$

$(\langle 0, 0 \rangle = 0$ per linearità$)$

TEOREMA (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ forma hermitiana semidefinita positiva

$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \forall x, y \in H$

Inoltre se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare vale l'uguaglianza

$\Leftrightarrow$ x e y sono lin. dipendenti

dim

Se $\langle x, y \rangle = 0$ è banale $\Rightarrow$ supp. $\langle x, y \rangle \neq 0$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle \lambda y + \langle x, y \rangle x, \lambda y + \langle x, y \rangle x \rangle =$$
$$= \lambda^2 \langle y, y \rangle + \lambda \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle + |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle$$
$$= \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda |\langle x, y \rangle|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle$$

che è un polinomio in $\lambda \in \mathbb{R} \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^4 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle |\langle x, y \rangle|^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Supp. adesso che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sia un prodotto scalare e sia

$|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$

Allora come prima

$$0 \leq \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda |\langle x, y \rangle|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle \quad \text{e sostituendo}$$
$$= \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle + \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle^2$$
$$= (\lambda \sqrt{\langle y, y \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \langle x, x \rangle)^2 = 0$$
$$\uparrow \text{ se } \lambda = -\langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda y + \langle x, y \rangle x = 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ lin. dip.}$$

Il viceversa è ovvio.

COROLLARIO

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su $H \Rightarrow \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in H$ è una norma su H

dim

- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \implies x = 0$ ($\uparrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è prodotto scalare)
- $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle =$
  $= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle =$ ($\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$)
  $= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle|$ ($\uparrow$ $\operatorname{Re} z \leq |z|$)
  $\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| =$ ($\uparrow$ C.S.)
  $= (\|x\| + \|y\|)^2$

■

DEF

Uno spazio di Hilbert è una coppia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con H spazio vettoriale complesso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su H tale che H sia uno spazio di Banach con la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

OSS

Poiché per il precedente corollario abbiamo visto che un prodotto scalare induce una norma, possiamo domandarci se questo spazio normato sia di Banach e se così fosse lo spazio H è detto di Hilbert. Se invece lo spazio normato non è di Banach, H si dice spazio preHilbertiano e si può dimostrare che ogni spazio preHilbertiano è denso in uno spazio di Hilbert.

Esempi

a) $H = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k$, $x, y \in \mathbb{C}^n$

$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$

b) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura, $H = L^2(X, \mu)$

$\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f} g \, d\mu \quad f, g \in L^2(X, \mu)$

$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$

c) $\mu = \mu^\# \Rightarrow L^2(X, \mu^\#) =: \ell^2(X)$ ($\ell^2(\mathbb{N}) = L^2(\mathbb{N}, \mu^\#)$)

$\int_X f \, d\mu^\# =: \sum_{x \in X} f(x)$ (ma non è una serie perché X potrebbe essere non numerabile)

OSS

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una forma sesquilineare e consideriamo:

$$\|x + i^k y\|^2 = \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i^k \langle x, y \rangle + (-i)^k \langle y, x \rangle \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow (-i)^k \|x + i^k y\|^2 = (-i)^k \|x\|^2 + (-i)^k \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + (-1)^k \langle y, x \rangle$$

e sapendo che $\sum_{k=0}^{3} (-i)^k = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k = 0$

$$\sum_{k=0}^{3} (-i)^k \|x + i^k y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \|x + iy\|^2$$ ← identità di polarizzazione

che permette di calcolare il prodotto scalare di ogni coppia di elementi se se ne conoscono le norme.

Sia adesso $k \in \{0, 2\} \Rightarrow$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle$$

$$\Rightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$ ← identità del parallelogramma

OSS

H, K spazi di Hilbert

$j : H \longrightarrow K$ lineare è isometrica (cioè $\|j(x)\| = \|x\| \ \forall x \in H$)

$\Leftrightarrow$ j preserva i prodotti scalari di H e K (cioè $\langle j(x), j(y) \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$)

dim

$\Leftarrow$) $\|j(x)\|^2 = \langle j(x), j(x) \rangle_K = \langle x, x \rangle_H = \|x\|^2$

$\Rightarrow$) $\langle j(x), j(y) \rangle_K = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \|j(x) + i^k j(y)\|^2 \overset{j \text{ è lineare}}{=}$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \|j(x + i^k y)\|^2 \overset{j \text{ è isometrico}}{=}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \|x + iy\|^2 = \langle x, y \rangle$$

■

Cominciamo a vedere adesso la geometria di uno spazio di Hilbert, sfruttando il fatto che il prodotto scalare ci permette di definire l'angolo tra vettori

NOTAZ. H spazio di Hilbert, $S \subset H$ sottoinsieme

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in S, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

è lo spazio vettoriale generato da S

$\overline{\langle S\rangle} := \{x \in H \mid \exists \{x_n\} \subset \langle S\rangle \text{ t.c } x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x\}$ che si può dimostrare essere un sottospazio chiuso di H, detto il sottospazio chiuso generato da S.

$S^\perp := \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in S\}$ è l'ortogonale di S.

PROP

1) $S \cap S^\perp = \{0\}$
2) $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^\perp \subset S_1^\perp$
3) $\overline{\langle S\rangle}^\perp = \langle S\rangle^\perp = S^\perp$

dim

1) $x \in S \cap S^\perp \Rightarrow \|x\|^2 = \langle \underset{\in S^\perp}{x}, \underset{\in S}{x}\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
2) $x \in S_2^\perp$, $\forall y \in S_1 \subset S_2 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in S_1^\perp$
3) È chiaro che $S \subset \langle S\rangle \subset \overline{\langle S\rangle} \Rightarrow$ per il punto (2) $\overline{\langle S\rangle}^\perp \subset \langle S\rangle^\perp \subset S^\perp$. Basta dimostrare che $S^\perp \subset \overline{\langle S\rangle}^\perp$.
Sia $x \in S^\perp$ e $y \in \overline{\langle S\rangle} \Rightarrow \exists \{y_n\} \subset \langle S\rangle$ t.c $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$
e ogni y_n è della forma $y_n = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{n_j} y_{n_j}$ con $\alpha_{n_j} \in \mathbb{C}$, $y_{n_j} \in S$

$$\Rightarrow \langle x, y_n\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{n_j} y_{n_j}\rangle = \sum_{j=1}^{r_n} \alpha_{n_j} \underbrace{\langle x, y_{n_j}\rangle}_{=0} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si può dimostrare che $\forall x \in H$ l'applicazione $y \in H \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ è un funzionale limitato

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle x, \lim_{n\to+\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\langle x, y_n\rangle}^{=0} = 0$$

$\Rightarrow x \in \overline{\langle S\rangle}^\perp$.

TEOREMA (della proiezione)

H spazio di Hilbert, $K \subset H$ sottospazio chiuso.
Allora $\forall x \in H \ \exists! \, y \in K$ e $y^\perp \in K^\perp$ t.c $x = y + y^\perp$

dim

- Unicità: supp. che $\exists \, \tilde{y} \in K$, $\tilde{y}^\perp \in K^\perp$ t.c.

$$x = y + y^\perp = \tilde{y} + \tilde{y}^\perp \Rightarrow \underbrace{y - \tilde{y}}_{\in K} = \underbrace{\tilde{y}^\perp - y^\perp}_{\in K^\perp} \in K \cap K^\perp = \{0\}$$

$$\Rightarrow y = \tilde{y} \text{ e } y^\perp = \tilde{y}^\perp$$

- Esistenza:
L'idea a cui ci aggrappiamo è la proprietà geometrica della proiezione di x su un sottospazio che è quella di essere il vettore appartenente al sottospazio più vicino a x.
Rivitalizzeremo allora il concetto di distanza.

Sia $d := \text{dist}(x,K) := \inf_{y\in K} \|x-y\|$ (la proiezione è il vettore che rende questo inf un minimo).

Allora siccome è un inf posso costruire una successione minimizzante, cioè $\exists \{y_n\} \subset K$ t.c. $\|x-y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Vogliamo dimostrare che $\{y_n\}$ è convergente, mostriamo allora che $\{y_n\}$ è di Cauchy:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 =$$

(identità del parallelogramma)

$$= 2\left(\underbrace{\|y_n - x\|^2}_{\leq d^2 + \frac{1}{n}} + \underbrace{\|y_m - x\|^2}_{d^2 + \frac{1}{m}}\right) - 4\,\Big\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K}\Big\|^2 - x\Big\|^2$$

$$\leq 2\left(2d^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \Rightarrow$$

per n, m abbastanza grandi, tale quantità è piccola a piacere

$\Rightarrow y_n$ è di Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} y_n =: y \in K$ (perché K è chiuso).

Adesso basta dimostrare che $y^\perp := x - y \in K^\perp$

Osserviamo preliminarmente che $d \leq \|x-y\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = d$

Dunque $\forall z \in K$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow d^2 \leq \|x - (y + \lambda z)\|^2 = \underbrace{\|x-y\|^2}_{=d^2} + \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle x-y, z\rangle$$

($y + \lambda z \in K$)

polinomio quadratico con un minimo per $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\langle x-y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in K$$

Ripercorrendo lo stesso ragionamento con iz ($iz \in K$) al posto di z abbiamo che $0 = \operatorname{Re}\langle x-y, iz\rangle = -\operatorname{Im}\langle x-y, z\rangle$

$$\Rightarrow \langle x-y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in K$$

$$\Rightarrow x - y \in K^\perp$$

COROLLARIO

H spazio di Hilbert, $K \subset H$ sottospazio chiuso

1) $\exists!\, P \in B(H)$ t.c. $\forall x \in H$ $Px \in K$, $(\mathbb{1} - P)x \in K^\perp$ e P è detto il proiettore ortogonale su K

2) $P \in B(H)$ è il proiettore ortogonale su $K = \{Px \mid x \in H\}$ $\iff P^2 = P$ e $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ $\forall x, y \in H$

dim

1) $\forall x \in H$ $\exists!\, y \in K$ e $y^\perp \in K^\perp$ t.c. $x = y + y^\perp$, definiamo

$Px := y \Rightarrow (\mathbb{1}-P)x = x - Px = x - y = y^\perp \in K^\perp$

$\Rightarrow$ siccome y e $y^\perp$ sono unici, P è univocamente determinato.

Mostriamo che P è lineare:

Siano $x_1, x_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in K$

$\alpha_1 y_1^\perp + \alpha_2 y_2^\perp \in K^\perp$

$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2$.

Mostriamo infine che P sia limitato:

$\|x\|^2 = \|Px + (\mathbb{1}-P)x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(\mathbb{1}-P)x\|^2 +$

$2\,\mathrm{Re}\,\langle \underset{\in K}{Px}, \underbrace{(\mathbb{1}-P)x}_{\in K^\perp}\rangle^{=0} = \|Px\|^2 + \underbrace{\|(\mathbb{1}-P)x\|^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \|P\| \leq 1 \quad \forall x \in H$

2) $\Rightarrow$) P proiettore ortogonale su K

$\mathrm{Im}(P) := \{Px \mid x \in H\} \subset K$, inoltre

Se $x \in K$, $x = \underset{\in K}{x} + \underset{\in K^\perp}{0} \Rightarrow Px = x \in \mathrm{Im}P \Rightarrow K = \mathrm{Im}P$

Inoltre sia $x \in H$

$\Rightarrow P^2x = P(\underbrace{Px}_{\in K}) = Px \Rightarrow P^2 = P$

Infine $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + (\mathbb{1}-P)y\rangle$

$= \langle Px, Py\rangle + \langle \underset{\in K}{Px}, \underbrace{(\mathbb{1}-P)y}_{\in K^\perp}\rangle^{=0} = \langle Px, Py\rangle =$

$= \langle Px + (\mathbb{1}-P)x, Py\rangle = \langle x, Py\rangle \quad \forall x, y \in H$

$\Leftarrow$) Sia $K := \mathrm{Im}P = \{Px \mid x \in H\}$. Mostriamo che è un sottospazio chiuso: è chiaro che è un sottospazio perché è immagine di un operatore lineare.

Sia $\{x_n\}_n \subset H$ t.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} Px_n =: y$

$\Rightarrow Py = \lim_{n\to+\infty} P^2 x_n \overset{P^2=P}{=} \lim_{n\to+\infty} Px_n = y \in \mathrm{Im}P = K$

($P \in \mathcal{B}(H)$, quindi è continuo)

$\Rightarrow K$ è chiuso

Basta infine dimostrare che $\forall x \in H \ (\mathbb{1}-P)x \in K^\perp$:

$\forall y \in H \quad \langle (\mathbb{1}-P)x, Py\rangle = \langle P(\mathbb{1}-P)x, y\rangle =$

$= \langle \underbrace{(P - P^2)}_{=0} x, y\rangle = 0$

$\Rightarrow P$ è il proiettore ortogonale su K ∎

OSS

Se P è il proiettore ortogonale su K, per simmetria $Q = \mathbb{1} - P$ è il proiettore ortogonale su $K^\perp$.

OSS
Il proiettore P ha solo gli autovalori $\lambda=0 \rightsquigarrow$ autospazio $K^{\perp}$
$\lambda=1 \rightsquigarrow$ autospazio K

I proiettori sono gli operatori più importanti poiché vedremo in seguito che ogni operatore autoaggiunto si può esprimere in termini di proiettori.

OSS
Abbiamo già visto che se abbiamo H spazio di Hilbert, $y\in H$ possiamo definire $f_y : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \langle y, x\rangle$

$\Rightarrow f_y \in H^* = B(H,\mathbb{C})$ (funzionali limitati \ continui)

H^*: duale topologico di H (più piccolo rispetto al duale algebrico poiché contiene solo i funzionali continui)

TEOREMA (della rappresentazione di Riesz)
$\forall f\in H^*\ \exists!\, y\in H$ t.c. $f=f_y$ e $\|f_y\| = \|y\|$, cioè l'applicazione $y\in H \longmapsto f_y \in H^*$ è un isomorfismo (antilineare) isometrico

dim
Sia $f\in H^*$ e poiamo $N := \ker f = \{x\in H \mid f(x)=0\} = f^{-1}(\{0\})$
$\Rightarrow N \subset H$ è chiuso perché antiimmagine tramite funzione continua di $\{0\}$. Possiamo quindi applicare il teorema della proiezione.
Se $N=H$ basta prendere $y=0$ ($N=H \Leftrightarrow f=0$).
Supponiamo allora $N \subsetneq H \Rightarrow \exists\, z\in H\setminus N$. Sia P il proiettore ortogonale su N, posso allora considerare il vettore $(\mathbb{1}-P)z$ che è ortogonale ad N.
$\Rightarrow \forall x\in H\ \exists \alpha\in\mathbb{C}$ t.c. $x-\alpha(\mathbb{1}-P)z \in N$, infatti
$f(x-\alpha(\mathbb{1}-P)z)) = f(x) - \alpha f((\mathbb{1}-P)z) = 0$
$\Rightarrow \alpha = \dfrac{f(x)}{f((\mathbb{1}-P)z)}$, ed $f((\mathbb{1}-P)z)\neq 0$ poiché $(\mathbb{1}-P)z \notin N$

Sia $y = \beta(\mathbb{1}-P)z$, vogliamo determinare β affinché y rappresenti il funzionale f. Calcoliamo allora:

$f(x) = \langle y, x\rangle = \langle \underbrace{y}_{\in N^{\perp}}, \alpha(\mathbb{1}-P)z + \underbrace{w}_{\in N}\rangle = \langle y, \alpha(\mathbb{1}-P)z\rangle =$ (↑ $y=\beta(\mathbb{1}-P)z$)

$= \langle \beta(\mathbb{1}-P)z, \alpha(\mathbb{1}-P)z\rangle = \alpha\bar\beta\,\|(\mathbb{1}-P)z\|^2 = \dfrac{f(x)}{f((\mathbb{1}-P)z)}\,\bar\beta\,\|(\mathbb{1}-P)z\|^2$ (↑ $\alpha = \frac{f(x)}{f((\mathbb{1}-P)z)}$)

$= f(x)$

$$\Rightarrow \frac{\bar{\beta}\,\|(\mathbb{1}-P)z\|^2}{f((\mathbb{1}-P)z)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\overline{f((\mathbb{1}-P)z)}}{\|(\mathbb{1}-P)z\|^2} \qquad (\|(\mathbb{1}-P)z\| \neq 0 \Leftrightarrow z \notin N)$$

Dimostriamo adesso che $\|f_y\| = \|y\|$

$|f_y(x)| = |\langle y, x\rangle| \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|y\|\,\|x\| \quad \forall x \in H \quad \Rightarrow \|f_y\| \leq \|y\|$

$f_y(y) = \langle y, y\rangle = \|y\|^2 \Rightarrow \frac{f_y(y)}{\|y\|} = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$

$\Rightarrow \|f_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_y(x)| \geq \|y\|$

$\Rightarrow \|f_y\| = \|y\|$

OSS

Quindi tutti i funzionali limitati su uno spazio di Hilbert si ottengono facendo il prodotto scalare con un vettore fissato. Questo non è altro che una generalizzazione di ciò che accade negli spazi finitodimensionale dove ogni funzionale lineare si ottiene facendo il prodotto scalare con un vettore.

DEF

H spazio di Hilbert, una famiglia $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ (I insieme arbitrario) è detta un sistema ortonormale se $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$

Una base ortonormale è un sistema ortonormale massimale (cioè $\forall x \in H \ \langle x, e_\alpha\rangle = 0 \ \forall \alpha \in I \Rightarrow x = 0$)

Esempi

a) $L^2([0, 2\pi])$ $\quad e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è un S.O.N.:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \cdot e^{imt}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$$

Inoltre è anche una base ortonormale (si può dimostrare con la teoria sulle serie di Fourier oppure sfruttando la densità dei polinomi nello spazio delle funzioni continue)

b) $H = \ell^2(I) = \left\{ x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|^2 = \int_I |x_\alpha|^2 \, d\mu^{\#}(\alpha) < +\infty \right\}$

e definiamo $\delta_\alpha = (\delta_{\alpha\beta})_{\beta \in I} \in \ell^2(I)$

$(\delta_\alpha)_{\alpha\in I}$ è un S.O.N. in $\ell^2(I)$: $\langle \delta_\alpha, \delta_\beta\rangle = \sum_{\gamma\in I} \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}$

ed è anche una B.O.N. infatti dato $x\in\ell^2(I)$

$0 = \langle x, \delta_\alpha\rangle = \sum_{\beta\in I} x_\beta \delta_{\alpha\beta} = x_\alpha \iff x_\alpha = 0 \ \forall \alpha\in I \iff x = 0$

Base ortonormale canonica di $\ell^2(I)$.

DEF

X spazio normato, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}\subset X$, si pone $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ (sono vettori e non num. comp.) (che al solito non è una serie)

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists F_\varepsilon \subset I$ finito t.c. $\forall F\subset I$ finito con $F_\varepsilon \subset F$

si ha $\| x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\| < \varepsilon$ (la definizione si basa sul fatto che le somme finite di vettori le so fare)

e si scrive anche $x = \lim_F \sum_{\alpha\in F} x_\alpha$

LEMMA

Sia $(e_\alpha)_{\alpha\in I}\subset H$ S.O.n. Allora

1) $\forall x\in H \ \sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$ (disuguaglianza di Bessel)

2) $\exists U : \ell^2(I)\to H$ isometrico t.c. se $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\ell^2(I)$

$Ux = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha$

3) $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha$ converge in $H \iff x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\ell^2(I)$

dim

1) Cominciamo considerando $F\subset I$ finito

$$0 \le \|x - \sum_{\alpha\in F}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha\|^2 = \langle x - \sum_{\alpha\in F}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha, x - \sum_{\alpha\in F}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F}\underbrace{\langle e_\alpha, x\rangle\langle x, e_\alpha\rangle}_{|\langle e_\alpha, x\rangle|^2} - \sum_{\alpha\in F}\underbrace{\langle x, e_\alpha\rangle\langle e_\alpha, x\rangle}_{|\langle e_\alpha, x\rangle|^2} + \sum_{\alpha,\beta\in F}\langle e_\alpha, x\rangle\langle x, e_\beta\rangle\underbrace{\langle e_\beta, e_\alpha\rangle}_{\delta_{\alpha\beta}}$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{\alpha\in F}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 + \sum_{\alpha\in F}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha\in F}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall F\subset I \text{ finito}$$

da dim.

$$\Rightarrow \sum_{\alpha\in I}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \sup_{\substack{F\subset I\\ \text{finito}}}\left\{\sum_{\alpha\in F}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2\right\} \le \|x\|^2$$

2) Definiamo innanzitutto

$$C_c(I) := \left\{x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}\subset\mathbb{C} \mid x_\alpha\neq 0 \text{ solo per un numero finito di indici } \alpha\in I\right\}$$

Dunque per come definito $C_c(I)\subset\ell^2(I)$.

Inoltre si può dimostrare che $C_c(I)$ è denso in $\ell^2(I)$, l'idea, infatti, è che $\forall x\in\ell^2(I)$, $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$

$\Rightarrow x = \lim_F \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\delta_\alpha$ con $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha\delta_\alpha \in C_c(I)$.

definiamo allora $U : C_c(I) \longrightarrow H$
con $U(x_\alpha)_{\alpha\in I} := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha$ (somma finita proprio perché la famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in C_c(I)$)

Dimostriamo che U è isometrico:

$$\|U(x_\alpha)_{\alpha\in I}\|^2 = \Big\|\sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in I} x_\beta e_\beta\Big\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta\in I} \bar{x}_\alpha x_\beta \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|^2 = \|(x_\alpha)_{\alpha\in I}\|^2$$

Dunque per il teorema di estensione di operatori limitati
$\exists!\ U : \ell^2(I) \longrightarrow H$ limitato che estende U ed è isometrico anch'esso, infatti:

$$\|Ux\| = \Big\|U\Big(\lim_F \sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha\Big)\Big\| \underset{\uparrow U \text{ è limitato}}{=} \lim_F \Big\|U\Big(\underbrace{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha}_{\in C_c(I)}\Big)\Big\| \underset{\uparrow U \text{ è isometrico su } C_c(I)}{=}$$

$$= \lim_F \Big\|\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha\Big\| = \|x\|$$

3) $\Rightarrow$) $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha \Rightarrow \langle e_\beta, x\rangle = \langle e_\beta, \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha\rangle =$

$$= \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \underbrace{\langle e_\beta, e_\alpha\rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = x_\beta \Rightarrow \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \underset{\uparrow \text{Bessel}}{\leq} \|x\|^2 < +\infty$$

$\Leftarrow$) Se $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \ell^2(I) \underset{\uparrow (2)}{\Rightarrow} Ux = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha e_\alpha \in H$ ∎

TEOREMA

H spazio di Hilbert, $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subset H$ s.o.n. Sono equivalenti:

1) $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ è b.o.n.
2) $\forall x\in H \quad x = \sum_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$
3) l'operatore $U : \ell^2(I) \longrightarrow H$ (definito nel lemma) è suriettivo
4) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle\langle e_\alpha, y\rangle$
5) $\forall x\in H \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2$ (identità di Parseval)
6) $\forall x\in H$ se $\langle x, e_\alpha\rangle = 0\ \forall \alpha\in I \Rightarrow x = 0$.

dim

1) $\Rightarrow$ 2) Sia $x\in H \Rightarrow$ per Bessel $\sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 < +\infty$

$\Rightarrow \exists\, y = \sum_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$ (↑ punto 3 del lemma)

Vogliamo allora mostrare che $x = y$

$$\langle y - x, e_\beta\rangle = \Big\langle \sum_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha - x, e_\beta\Big\rangle =$$

$$\sum_{\alpha\in I} \overline{\langle e_\alpha, x\rangle}\,\underbrace{\langle e_\alpha, e_\beta\rangle}_{=\delta_{\alpha\beta}} - \langle x, e_\beta\rangle =$$

$= \langle x, e_\beta \rangle - \langle x, e_\beta \rangle = 0 \quad \forall \beta \in I$

$\Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y = \sum_{\alpha \in I} \langle e_\alpha, x \rangle e_\alpha$

2) $\Rightarrow$ 3) Dato $x \in H$

$$x = \sum_{\alpha \in I} \langle e_\alpha, x \rangle e_\alpha = U(\underbrace{(\langle e_\alpha, x \rangle)_{\alpha \in I}}_{\in \ell^2(I)})$$

$\Rightarrow U$ è suriettivo

3) $\Rightarrow$ 4) Sappiamo che U è suriettivo e isometrico

$\Rightarrow U$ è invertibile e $U^{-1}: H \longrightarrow \ell^2(I)$

$x \longmapsto (\langle e_\alpha, x \rangle)_{\alpha \in I}$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle U^{-1}x, U^{-1}y \rangle = \langle (\langle e_\alpha, x \rangle)_{\alpha \in I}, (\langle e_\alpha, y \rangle)_{\alpha \in I} \rangle =$$

(U^{-1} isometrico)

$$= \sum_{\alpha \in I} \overline{\langle e_\alpha, x \rangle} \langle e_\alpha, y \rangle =$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle \langle e_\alpha, y \rangle$$

4) $\Rightarrow$ 5) basta prendere $y = x$

5) $\Rightarrow$ 6) ovvio

6) $\Rightarrow$ 1) Segue dalla definizione di b.o.n. ∎

Dunque H spazio di Hilbert $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ b.o.n. di $H \Leftrightarrow$ $\exists\, U: \ell^2(I) \longrightarrow H$ biunivoco e isometrico $\Rightarrow$ e quindi H e $\ell^2(I)$ si identificano (poiché l'isometria preserva i prodotti scalari).

Si può dimostrare che ogni spazio di Hilbert ha una base ortonormale, tuttavia la dimostrazione è astratta e poco istruttiva quindi la tralasciamo.

Se invece lo spazio di Hilbert ha una proprietà aggiuntiva, esiste un modo più costruttivo per trovare basi ortonormali.

DEF

X spazio normato si dice separabile se $\exists\, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ densa (cioé ammette un sottoinsieme denso e numerabile).

Esempi

$\mathbb{R}$ è separabile ($\mathbb{Q}$ è denso e numerabile)

$\mathbb{C}^n$ è separabile ($\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ denso e numerabile)

TEOREMA

H spazio di Hilbert è separabile $\Leftrightarrow \exists\, (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ b.o.n. (numerabile)

dim

$\Rightarrow$) Sia $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset H$ denso e numerabile.

Vogliamo estrarre una sottosuccessione di vettori linearmente indipendenti:

definiamo $x_1 := y_1$

$x_2 := y_{n_2}$ il primo vettore di $\{y_2, y_3, \dots\}$ lin. indip. da x_1

$x_3 := y_{n_3}$ il primo vettore di $\{y_{n_2+1}, y_{n_2+2}, \dots\}$ lin. indip. da x_1, x_2

$\vdots$

$\Rightarrow \{x_1, \dots\}$ lin indip. e t.c. $\langle x_1, x_2, \dots \rangle = \langle y_1, y_2 \dots \rangle$

Adesso utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt

$\Rightarrow e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$

$f_2 := x_2 - \langle e_1, x_2 \rangle e_1 \qquad e_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|}$

$\vdots$

$f_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j, x_k \rangle e_j \qquad e_k := \frac{f_k}{\|f_k\|}$

Si dimostra che sono un S.O.N. t.c. $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

Dimostriamo che $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è in realtà un b.o.n.:

$$\left(\overline{\langle e_1, e_2, \dots \rangle}\right)^\perp = \left(\overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle}\right)^\perp = \left(\overline{\langle y_1, y_2, \dots \rangle}\right)^\perp = H^\perp = \{0\}$$

$$H = \overline{\{y_1, y_2, \dots\}} \subset \overline{\langle y_1, y_2, \dots \rangle}$$

Inoltre $\left(\overline{\langle e_1, e_2, \dots \rangle}\right)^\perp = \{e_1, e_2, \dots\}^\perp$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, \dots\}^\perp = \{0\} \iff \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è b.o.n.

$\Leftarrow$) Si dimostra che se $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è b.o.n. $\Rightarrow$

$\left\{ \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \mid c_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ k = 1, \dots, N,\ N \in \mathbb{N} \right\}$ è denso e numerabile.

■

Cominciamo ora a studiare le proprietà degli operatori su spazi di Hilbert.

DEF

H, K spazi di Hilbert. Una forma sesquilineare $s: H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ è detta limitata se $\exists\ C > 0$ t.c.

$|s(x,y)| \leq C \|x\| \|y\| \qquad \forall (x,y) \in H \times K$

LEMMA

H, K spazi di Hilbert. $s: H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilineare è limitata $\Longleftrightarrow \exists! T \in B(K,H)$ t.c.

$$s(x,y) = \langle x, Ty \rangle \quad \forall (x,y) \in H \times K$$

Inoltre $\|T\| \leq C$

dim

$\Rightarrow$) Sia $s: H \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ limitata $\Rightarrow \forall y \in K$ fissato $x \in H \longmapsto \overline{s(x,y)} \in \mathbb{C}$ è un funzionale lineare limitato su H:

$$|\overline{s(x,y)}| \leq (C\|y\|)\|x\| \Rightarrow \|\overline{s(\cdot,y)}\| \leq C\|y\|$$

$\Rightarrow \exists! Ty \in H$ t.c. $\overline{s(x,y)} = \langle Ty, x \rangle$ (↑ Riesz)

e $\|Ty\| = \|\overline{s(\cdot,y)}\| \leq C\|y\| \Rightarrow T \in B(K,H)$ e $\|T\| \leq C$

Unicità: se $\tilde{T} \in B(K,H)$ è t.c. $s(x,y) = \langle x, \tilde{T}y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ $\forall (x,y) \in H \times K$ $\langle x, \tilde{T}y - Ty \rangle = 0$ $\forall x \in H$

$\Rightarrow \tilde{T}y = Ty \quad \forall y \in K$

$\Longleftarrow$) Se $T \in B(K,H)$ posto $s(x,y) := \langle x, Ty \rangle$, $(x,y) \in H \times K$

s è sesquilineare e $|s(x,y)| = |\langle x, Ty \rangle| \overset{\uparrow Cs}{\leq} \|x\| \|Ty\| \leq \|T\| \|x\| \|y\| \Rightarrow s$ è limitata. ∎

OSS

Ci sono due operazioni che rendono l'insieme degli operatori limitati tra due spazi di Hilbert uno spazio vettoriale: la somma e il prodotto per scalari. In più c'è una terza operazione: l'aggiunzione (l'analogo della coniugazione complessa)

TEOREMA

H, K spazi di Hilbert. $T \in B(H,K) \Rightarrow \exists! T^* \in B(K,H)$ detto l'aggiunto di T t.c. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in H, y \in K$

Inoltre l'applicazione $T \in B(H,K) \longmapsto T^* \in B(K,H)$ gode delle seguenti proprietà:

(i) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*$ (antilineare)

(ii) $S \in B(K,L) \Rightarrow (ST)^* = T^* S^*$ (antimoltiplicativa)

(iii) $T^{**} = T$ (involutiva)

(iv) $\|T^*\| = \|T\|$ (isometrica)

(v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ (identità C^*)

dim

Definiamo $s(x,y) := \langle Tx, y\rangle \quad (x,y) \in H \times K$

$\Rightarrow s: H\times K \longrightarrow \mathbb{C}$ è sesquilineare e limitata

$|s(x,y)| = |\langle Tx, y\rangle| \overset{CS}{\leq} \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$

lemma $\Rightarrow \exists!\, T^* \in B(K,H)$ t.c. $s(x,y) = \langle x, T^*y\rangle \ \forall (x,y)\in H\times K$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$

(i) e (ii) seguono immediatamente dall'unicità di T^* ad esempio:

$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle \quad \forall (x,y)\in H\times L$

(per def di S^*; def di T^*)

unicità di $(ST)^*$ $\Rightarrow (ST)^* = T^*S^*$

(iii) basta invertire i ruoli di T e T^* nell'equazione $(\langle Tx,y\rangle = \langle x, T^*y\rangle)$

(iv) $\|T^*\| \leq \|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ (i) (iii)

$\Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$

(v) $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| \overset{(iii)}{=} \|T\|^2$

$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle x, T^*Tx\rangle$

$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\|\,\|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|$ (CS; $\|x\| \leq 1$)

$\Rightarrow \|T^*T\| = \|T\|^2$. ∎

OSS

Abbiamo visto che $P \in B(H)$ è un proiettore ortogonale $\Leftrightarrow P^2 = P$ e $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle \ \forall x,y \in H$ ma quest'ultima equazione mi dice che $P = P^*$. Dunque P è un proiettore ortogonale $\Leftrightarrow P = P^* = P^2$.

Ed inoltre avevamo che

$V: H \longrightarrow H$ è isometrico $\Leftrightarrow \langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x,y\in H$

$\langle x, V^*Vy\rangle \Leftrightarrow V^*V = \mathbb{1}$

Se $H = \mathbb{C}^n$ $V^*V = \mathbb{1} \Leftrightarrow VV^* = \mathbb{1}$

DEF

Un operatore $U \in B(H)$ t.c. $U^*U = \mathbb{1} = UU^*$ è detto unitario $(\Leftrightarrow U^* = U^{-1})$ (isometrico e suriettivo)

DEF

X spazio di Banach, $A \in B(X)$. L'insieme risolvente di A è

$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\ (A-\lambda \mathbb{1})^{-1} \in B(X)\}$.

Lo spettro di A è $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda\mathbb{1}$ non è invertibile in $B(X)\}$

Esempi

a) $X = \mathbb{C}^n$ $A \in M_n(\mathbb{C})$ $A-\lambda\mathbb{1}$ è invertibile $\iff$ $\det(A-\lambda\mathbb{1}) \neq 0 \iff \ker(A-\lambda\mathbb{1}) = \{0\}$ poiché $\dim \ker(A-\lambda\mathbb{1}) + \dim \mathrm{Im}(A-\lambda\mathbb{1}) = n$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda \mid \ker(A-\lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, x \neq 0 \text{ t.c } Ax = \lambda x\}$

cioè $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda$ è un autovalore

b) $H = L^2(0,1)$ con la misura di Lebesgue

$(A\psi)(x) := x\psi(x)$ $\quad \psi \in L^2([0,1])$, $x \in [0,1]$

$A \in B(H)$: $\|A\psi\|_2^2 = \int_0^1 |x\psi(x)|^2 dx \underset{|x|\leq 1}{\leq} \int_0^1 |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|_2^2$

$\Rightarrow \|A\| \leq 1$

$\sigma(A) = [0,1]$: sia $\lambda \in [0,1]$, se $A-\lambda\mathbb{1}$ è invertibile

$\Rightarrow \forall \psi \in L^2\ \exists \varphi \in L^2$ t.c $(A-\lambda\mathbb{1})\varphi = \psi$

$[(A-\lambda\mathbb{1})\varphi](x) = (x-\lambda)\varphi(x) = \psi(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$

Se ad esempio $\psi(x) \equiv 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x-\lambda} \notin L^2$: $\int_0^1 \frac{1}{|x-\lambda|^2} dx = +\infty$

$\Rightarrow A-\lambda\mathbb{1}$ non è suriettiva $\Rightarrow$ non è invertibile

$\Rightarrow [0,1] \subset \sigma(A)$

Mostriamo ora il viceversa:

Se $\lambda \notin [0,1]$ $\quad \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x-\lambda}$ $\quad$ se $\lambda \notin [0,1]$ $x-\lambda$ non si annulla mai

$\Rightarrow [(A-\lambda\mathbb{1})^{-1}\psi](x) := \frac{\psi(x)}{x-\lambda}$

Dobbiamo mostrare che abbiamo un operatore limitato da L^2 in sé stesso

$\Rightarrow \|(A-\lambda\mathbb{1})^{-1}\psi\|_2^2 = \int_0^1 \frac{|\psi(x)|^2}{|x-\lambda|^2} dx \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda,[0,1])^2} \int_0^1 |\psi(x)|^2 dx$

$= \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda,[0,1])^2} \|\psi\|_2^2$

$\Rightarrow (A-\lambda\mathbb{1})^{-1} \in B(H) \Rightarrow \sigma(A) = [0,1]$

Tuttavia A non ha autovalori, infatti se per assurdo A avesse un autovalore dovrebbe $\exists\, \psi \in L^2 \setminus \{0\}$ t.c.
$A\psi = \lambda\psi \iff (x-\lambda)\psi(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$
$\Rightarrow \psi(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1] \setminus \{\lambda\} \Rightarrow \psi = 0$ in $L^2([0,1])$.

OSS
Dunque non è vero che, in dimensione infinita, se il nucleo di $A - \lambda \mathbb{1}$ è $0 \Rightarrow$ l'operatore è invertibile.
Abbiamo infatti visto che se $\lambda \in [0,1]$ il nucleo è sempre 0 perché non ci sono autovalori però $A - \lambda \mathbb{1}$, se $\lambda \in [0,1]$, ha immagine che non è tutto lo spazio e quindi non è suriettivo.
Perciò nel caso infinito dimensionale lo spettro è strettamente più grande dell'insieme degli autovalori che è chiamato anche spettro puntuale di A:

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, x \in X \setminus \{0\} \text{ t.c. } Ax = \lambda x\} =$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}\}$$

In generale $\sigma_p(A) \subsetneq \sigma(A)$.

Vogliamo adesso studiare un po' di proprietà dello spettro. Vogliamo mostrare ad esempio che lo spettro non è mai vuoto, ma prima dobbiamo richiamare alcuni concetti di analisi complessa (estesi su spazi di Banach).

DEF
$A \subset \mathbb{C}$ aperto, X spazio di Banach, $f: A \to X$ è olomorfa (o analitica) in A se $\forall\, z \in A$

$$\exists\, f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

TEOREMA (Liouville)
$f: \mathbb{C} \to X$ olomorfa in $\mathbb{C}$ e limitata (cioè $\exists\, M > 0$ t.c. $\|f(z)\| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$) $\Rightarrow f$ è costante

TEOREMA (sviluppo di Taylor)
$A \subset \mathbb{C}$ aperto, $f: A \to X$ olomorfa in A, $z_0 \in A$. Allora si ha lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

con raggio di convergenza $r \geq \operatorname{dist}(z_0, A^c)$.
Data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n (z-z_0)^n$ è

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty]$$

LEMMA

X Banach, $A \in B(X)$. Allora

(i) $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ è aperto e $\lambda \in \rho(A) \longmapsto (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} =: R_A(\lambda) \in B(X)$ è olomorfa. ($R_A(\lambda)$ è detto risolvente di A in λ)

(ii) $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\sigma(A) \subset B_{\|A\|}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$
($\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}$ è compatto)

dim

Osserviamo preliminarmente che se $B \in B(X)$ t.c. $\|B\| < 1 \Rightarrow \exists (\mathbb{1} - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n$ (serie di Neumann)

Infatti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|B\|^n < +\infty \quad (\|B\|<1) \qquad \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} B^n \text{ è conv. in } B(X)$$

(X Banach $\Rightarrow B(X)$ Banach)

Inoltre

$$(\mathbb{1} - B)\left(\sum_{n=0}^{N} B^n\right) = \sum_{n=0}^{N} B^n - \sum_{n=1}^{N+1} B^n = \mathbb{1} - B^{N+1}$$

$N \to +\infty$ ↓ $\qquad$ $N \to +\infty$ ↓ ($\|B^{N+1}\| \leq \|B\|^{N+1} \to 0$)

$$(\mathbb{1} - B)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B^n\right) \qquad \mathbb{1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} B^n = (\mathbb{1} - B)^{-1}$$

(i) Fissiamo $\lambda_0 \in \rho(A)$

Dobbiamo mostrare che per λ sufficientemente vicino a λ_0, $\lambda - A$ è invertibile. ($\lambda - A := \lambda \mathbb{1} - A$)

$$\Rightarrow \lambda - A = \lambda - \lambda_0 + \underbrace{\lambda_0 - A}_{\text{invertibile}} = (\lambda_0 - A)\left[(\lambda - \lambda_0) R_A(\lambda_0) + \mathbb{1}\right]$$

$$= (\lambda_0 - A)\left[\mathbb{1} - \underbrace{(\lambda_0 - \lambda) R_A(\lambda_0)}_{B}\right]$$

e sfrutto la precedente osservazione

se $|\lambda - \lambda_0| < \|R_A(\lambda_0)\|^{-1} \iff \|(\lambda_0 - \lambda) R_A(\lambda_0)\| < 1$

$\mathbb{1} - B$ è invertibile e quindi anche $\lambda - A$ è invertibile perché $(\lambda_0 - A)$ è invertibile

$\Rightarrow$ (serie di Neumann) $(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_A(\lambda_0)^{n+1}$

e dunque ho fatto, perché

$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_0| < \|R_A(\lambda_0)\|^{-1}\} \subset \rho(A) \Rightarrow \rho(A)$ aperto e $\lambda \in \rho(A) \longmapsto R_A(\lambda) \in B(X)$ è olomorfa (perché è somma di una serie di potenze nell'intorno di ogni $\lambda_0 \in \rho(A)$).

(ii) sia $|\lambda| > \|A\|$

$\lambda - A = \lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}A)$, $\|\lambda^{-1}A\| < 1$

$\Rightarrow \exists\ (\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1} A^n$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$

$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^{-n-1} \|A\|^n = |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^n$ ($\frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$)

$= \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$

Se per assurdo $\sigma(A) = \emptyset \iff \rho(A) = \mathbb{C} \Rightarrow$
$R_A : \mathbb{C} \longrightarrow B(X)$ intera e limitata (poiché $\|R_A(\lambda)\| \xrightarrow{|\lambda| \to +\infty} 0$)

$\Rightarrow$ per Liouville R_A è costante $\Rightarrow R_A(\lambda) = 0\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$
ma 0 non è invertibile $\Rightarrow$ assurdo. ∎

DEF

X Banach, $A \in B(X)$. Il raggio spettrale di A è
$r(A) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ ($\Rightarrow r(A) \leq \|A\|$)

TEOREMA (del raggio spettrale di Gelfand)

$$r(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

dim

Mostriamo innanzitutto che se $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(A^n)$

$\lambda^n - A^n = (\lambda - A) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} A^k}_{\text{!! } B} = B(\lambda - A)$

Se per assurdo $\lambda^n \in \rho(A^n) \Rightarrow \exists\ (\lambda^n - A^n)^{-1} \Rightarrow$

$\mathbb{1} = (\lambda^n - A^n)^{-1}(\lambda^n - A^n) = [(\lambda^n - A^n)^{-1} B](\lambda - A)$

$\mathbb{1} = (\lambda^n - A^n)(\lambda^n - A^n)^{-1} = (\lambda - A)[B(\lambda^n - A^n)^{-1}]$

Dunque $\lambda - A$ ha un'inversa a sinistra e un'inversa a destra, e ciò vuol dire che è invertibile. . .
$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow$ assurdo.
$\Rightarrow \lambda^n \in \sigma(A^n) \Rightarrow \{|\lambda|^n \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \{|\mu| \mid \mu \in \sigma(A^n)\}$
e dunque

$$r(A)^n = \sup\{|\lambda|^n \mid \lambda \in \sigma(A)\} \leq \sup\{|\mu| \mid \mu \in \sigma(A^n)\} = r(A^n) \leq \|A^n\|$$

$$\Rightarrow r(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r(A) \leq \liminf_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Basta allora dimostrare che $r(A) \geq \limsup_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

Sia quindi $f(z) = (\mathbb{1} - zA)^{-1}$
se $|z| < \|A\|^{-1}$ questa funzione la posso sviluppare in serie di Neumann $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n A^n$
D'altra parte
$f(z) = z^{-1}(z^{-1} - A)^{-1} = z^{-1} R_A(z^{-1})$ per $z \neq 0$ e t.c. $z^{-1} \in \rho(A)$
R_A è olomorfo $\Rightarrow f$ è olomorfa in $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{-1} \in \rho(A)\} \cup \{0\}$
Dunque per il teorema dello sviluppo di Taylor il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n A^n$ è t.c. $r \geq \operatorname{dist}(0, \Omega^c) =$

$$= \inf_{z\in\Omega^c} |z| = \inf_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|^{-1} = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|} = r(A)^{-1}$$

$z \in \Omega^c \Leftrightarrow z^{-1} \in \sigma(A)$, $z^{-1} = \lambda$

ma per il principio di Hadamard

$$r = \left(\limsup_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \geq r(A)^{-1}$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq r(A) \geq \limsup_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A)$$

Grazie a questo teorema possiamo dare una serie di proprietà degli spettri di opportune classi di operatori su spazi di Hilbert.

TEOREMA
H spazio di Hilbert . $A \in B(H)$
(i) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$
(ii) se A è invertibile $\Rightarrow \sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}$
(iii) se A è normale ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} AA^* = A^*A$) $\Rightarrow r(A) = \|A\|$
(iv) se $A = P$ è un proiettore ortogonale $\Rightarrow \sigma(P) = \{0, 1\}$

(v) se $A = U$ è unitario $\Rightarrow \sigma(U) \subset \Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

(vi) se $A = A^*$ (A autoaggiunto) $\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

dim

(i) A invertibile $\Leftrightarrow$ A^* invertibile e in tal caso $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists (\lambda - A)^{-1} \Leftrightarrow \exists (\bar{\lambda} - A^*)^{-1} = ((\lambda - A)^{-1})^*$

$\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(A^*) \Rightarrow \sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$

(ii) A invertibile $\Rightarrow 0 \notin \sigma(A)$, se $\lambda \neq 0$:

$\lambda - A = -(\lambda^{-1} - A^{-1})\lambda A = -\lambda A(\lambda^{-1} - A^{-1})$

$\lambda^{-1} - A^{-1} = -(\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1} = -\lambda^{-1}A^{-1}(\lambda - A)$

e dunque, come prima, con queste relazioni riesco a dimostrare che A (rispettivamente) $(\lambda^{-1} - A^{-1})$ ha un inversa a destra e a sinistra e $(\lambda - A)$ anche, quindi sono invertibili e dunque da quelle relazioni abbiamo che

$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$

e la stessa relazione vale tra gli spettri

(iii) $\|A^2\|^2 \overset{\text{id } C^*}{=} \|(A^2)^* A^2\| = \|A^* A^* A A\| \overset{A \text{ normale}}{=} \|A^* A A^* A\| =$

$= \|(A^* A)^* A^* A\| \overset{\text{id } C^*}{=} \|A^* A\|^2 \overset{\text{id } C^*}{=} \|A\|^4$

$\Rightarrow \|A^2\| = \|A\|^2 \Rightarrow \|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (per induzione)

$\Rightarrow r(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|$

valido cd limite per sottosuccessioni

(v) $U^*U = \mathbb{1} = UU^* \Rightarrow 1 = \|U^* U\| \overset{\text{id } C^*}{=} \|U\|^2 \Rightarrow \|U\| = 1$

$\Rightarrow \sigma(U) \subset \{z \mid |z| \leq 1\}$

D'altra parte $U^* = U^{-1}$ è unitario

$\Rightarrow \sigma(U^*) \subset \{z \mid |z| \leq 1\}$

$\sigma(U)^{-1} \subset \{z \mid |z| \geq 1\}$

$\Rightarrow \sigma(U) \subset \{z \mid |z| = 1\} = \Delta$

(vi) Dato $A = A^*$ definiamo $U = e^{iA}$ è unitario, infatti

$U^* = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n A^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n A^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n A^n}{n!} = e^{-iA}$

$*$ e Σ si scambiano perché $A \mapsto A^*$ è isometrica quindi continua

$\Rightarrow U^*U = e^{-iA}e^{iA} = e^{-iA+iA} = e^0 = \mathbb{1} = UU^*$

Sia $\lambda \in \mathbb{R} \iff e^{i\lambda} \notin \Delta \Rightarrow e^{i\lambda} \notin \sigma(U) \Rightarrow e^{i\lambda} - U$ invertibile

$$\Rightarrow e^{i\lambda} - U = e^{i\lambda}(\mathbb{1} - e^{-i\lambda}U) = e^{i\lambda}(\mathbb{1} - e^{i(A-\lambda)}) =$$

$$= e^{i\lambda}\left(\mathbb{1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n (A-\lambda)^n}{n!}\right) = e^{i\lambda}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n (A-\lambda)^n}{n!}\right)$$

$$= e^{i\lambda}(A-\lambda)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n (A-\lambda)^{n-1}}{n!} = (A-\lambda)B = B(A-\lambda)$$

$$\uparrow \quad e^{i\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n (A-\lambda)^{n-1}}{n!} =: B$$

Ma allora abbiamo concluso perché $e^{i\lambda} - U$ è invertibile e per il solito discorso anche $A - \lambda$ è invertibile

$\Rightarrow \exists (A-\lambda)^{-1} \in B(X) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$. ∎

oss

$A \in B(X)$ t.c. $r(A) = 0 \iff \sigma(A) = \{0\}$ si dice topologicamente nilpotente

TEOREMA (Weierstrass)

I polinomi sono densi in $\mathcal{C}([a,b])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ (cioè $\forall f \in \mathcal{C}([a,b])$ $\exists \{p_n\}_n$ polinomi t.c. $p_n \longrightarrow f$ unif in $[a,b]$)

dim

Idea: se Q_n è un'approssimante della δ di Dirac posso definire

$$p_n(x) = \int_a^b f(t)\, Q_n(x-t)\, dt \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$$

e se Q_n è un polinomio $\Rightarrow p_n$ è un polinomio.

Poniamo ora alcune semplificazioni:

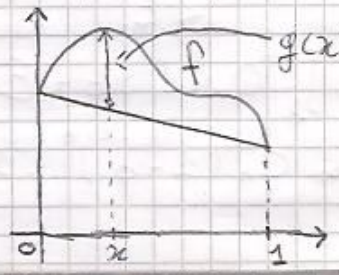
Dimostriamolo per $[a,b] = [0,1]$ (basta cambiare variabile)

Inoltre possiamo supporre che $f(0) = f(1) = 0$, infatti se così non fosse si può definire

$$g(x) = f(x) - (f(0) + x(f(1) - f(0)))$$

$g \in \mathcal{C}([0,1])$ e $g(0) = g(1) = 0$

Per approssimare con polinomi f basta approssimare g perché $f(0) + x(f(1) - f(0))$ è un polinomio.



Dunque sia $f \in \mathcal{C}([0,1])$ t.c. $f(0)=f(1)=0$ e sia

$Q_n = c_n(1-x^2)^n$, $n \in \mathbb{N}$ con $c_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow 1 = \int_{-1}^{1} c_n(1-x^2)^n\,dx \underset{\text{pari}}{=} 2c_n\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \geq 2c_n\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\,dx$$

e sapendo che $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2 \quad \forall x \geq 0$

$$1 \geq 2c_n\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,dx = \frac{4}{3}\frac{c_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{c_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow c_n \leq \sqrt{n}$$

Sia $f(x) := 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ è unif. continua su $\mathbb{R}$.

Definiamo

$$P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt$$

$(f(x+t) \neq 0$ solo se $0 \leq x+t \leq 1 \iff -x \leq t \leq 1-x)$

$$= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt = (u = x+t)$$

$$= \int_0^1 f(u)\,Q_n(u-x)\,du = \left(\begin{array}{l}\text{siccome } Q_n \text{ è un polinomio}\\ \Rightarrow \text{sarà della forma}\end{array}\right)$$

$$= \int_0^1 f(u)\sum_{k=0}^{2n} \alpha_{k,n}\,(u-x)^k\,du$$

$\Rightarrow P_n$ è un polinomio di grado $2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt - f(x)\right| = \left(\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt = 1\right)$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]\,Q_n(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} Q_n(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt$$

per uniforme continuità dato $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. se $|t| < \delta$

$\Rightarrow |f(x+t)-f(x)| < \varepsilon \rightarrow$

$$\forall x \in [0,1] \quad |P_n(x)-f(x)| \leq \int_{-1}^{-\delta} \overbrace{|f(x+t)-f(x)|}^{\leq 2\|f\|_\infty} Q_n(t)\,dt$$

$$+ \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt}_{<\varepsilon} + \int_{\delta}^{1} \overbrace{|f(x+t)-f(x)|}^{\leq 2\|f\|_\infty} Q_n(t)\,dt$$

$$< 4\|f\|_\infty \int_\delta^1 Q_n(t)\,dt + \varepsilon \overset{\substack{\uparrow Q_n \text{ è}\\ \text{decrescente}}}{\leq} 4\|f\|_\infty Q_n(\delta)(1-\delta) + \varepsilon$$

$$= 4\|f\|_\infty c_n(1-\delta^2)^n(1-\delta) + \varepsilon \leq 4\|f\|_\infty \underbrace{\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n}_{\substack{<1\\ n\to+\infty \to 0}}(1-\delta) + \varepsilon$$

∎

DEF

$A \in B(H)$ si dice positivo ($A \geq 0$) se $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \ \forall x \in H$.

LEMMA 1 (spectral mapping per polinomi)

Sia p polinomio, $A = A^* \in B(H) \Rightarrow \sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{ p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A) \}$.

dim

Mostriamo che $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow p(\lambda) \in \sigma(p(A))$:

λ è una radice di $\mu \longmapsto p(\mu) - p(\lambda) \Rightarrow \exists\, q$ polinomio t.c. $p(\mu) - p(\lambda) = (\mu - \lambda) q(\mu)$

$\Rightarrow$ per $\mu = A$

$\Rightarrow p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda) q(A) = q(A)(A - \lambda)$ ($q(A)$ sono potenze di A per coefficienti $\Rightarrow$ commuta con $A - \lambda$)

Se per assurdo $p(\lambda) \notin \sigma(p(A)) \Rightarrow \exists\, (p(A) - p(\lambda))^{-1} \in B(H)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{1} = (p(A) - p(\lambda))(p(A) - p(\lambda))^{-1} = (A - \lambda)\left[q(A)(p(A) - p(\lambda))^{-1} \right] \\ \mathbb{1} = (p(A) - p(\lambda))^{-1}(p(A) - p(\lambda)) = \left[(p(A) - p(\lambda))^{-1} q(A) \right](A - \lambda) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, (A - \lambda)^{-1} \in B(H)$ assurdo

Mostriamo ora che $\lambda \in \sigma(p(A)) \Rightarrow \lambda \in p(\sigma(A))$:

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ le radici di $\mu \longmapsto p(\mu) - \lambda$ (con la loro molteplicità)

$\Rightarrow p(\mu) - \lambda = a(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \dots (\mu - \lambda_n)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

se per assurdo $\lambda_j \in \sigma(A) \Rightarrow \exists\, (A - \lambda_j)^{-1} \in B(H) \ \forall\, j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \exists\, (p(A) - \lambda)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1)^{-1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_n)^{-1}$ che è assurdo perché $\lambda \in \sigma(p(A))$

$\Rightarrow \exists\, k \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $\lambda_k \in \sigma(A) \Rightarrow p(\lambda_k) - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = p(\lambda_k) \in p(\sigma(A))$. ∎

LEMMA 2

Sia p polinomio, $A = A^* \in B(H) \Rightarrow \|p(A)\| = \|p\|_\infty = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|$

dim

$\|p(A)\|^2 \overset{\text{id. } C^*}{=} \|p(A)^* p(A)\|$

$p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k \Rightarrow p(A)^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} A^k = \bar{p}(A) \Rightarrow p(A)^* p(A) = (\bar{p}p)(A)$

$\|p(A)\|^2 = \|(\bar{p}p)(A)\| \overset{\text{autoaggiunto}}{=} 2((\bar{p}p)(A)) = \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{p}p(A))} |\lambda| \overset{\text{Lemma 1}}{=}$

$= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{p}p(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|^2$ ∎

TEOREMA (calcolo funzionale continuo)

$A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists!\ \rho : \mathcal{C}(\sigma(A)) \longrightarrow B(H)$ lineare t.c.

(i) $\rho(fg) = \rho(f)\rho(g)$, $\rho(\bar{f}) = \rho(f)^*$, $\rho(\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\sigma(A))}) = \mathbb{1}_{B(H)}$
($\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\sigma(A))}(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$, $\mathbb{1}_{B(H)} x = x \quad \forall x \in H$)
(ρ è uno $*$-moltiplicativo unitale)

(ii) $\|\rho(f)\| = \|f\|_\infty$ (ρ è isometrico)

(iii) Data $i \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ definita da $i(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$
$\Rightarrow \rho(i) = A$

Inoltre ρ gode di

(iv) $\sigma(\rho(f)) = f(\sigma(A))$ (proprietà dello spectral mapping)

(v) $f \geq 0 \Rightarrow \rho(f) \geq 0$

OSS

Perché si chiama calcolo funzionale continuo?

$\rho(f)$ lo posso pensare come la valutazione della funzione continua f sull'operatore A perché se $f = p$ è un polinomio, $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \quad (c_k \in \mathbb{C})$

$\Rightarrow p(A) := \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \in B(H)$ è la definizione naturale

ma $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, i(\lambda)^k = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k i^k\right)(\lambda)$

$\Rightarrow p = \sum_{k=0}^{n} c_k i^k$ nell'algebra $\mathcal{C}(\sigma(A))$

Dunque abbiamo

$$\rho(p) = \rho\left(\sum_{k=0}^{n} c_k i^k\right) \overset{(i)}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k \rho(i)^k \overset{(iii)}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k A^k = p(A)$$

Quindi se $f = p$ è un polinomio ed applico ρ a p ottengo la definizione naturale di polinomio applicato all'operatore. Estendo perciò questa cosa a tutte le funzioni

NOTAZ

$f(A) := \rho(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$

(a differenza dei polinomi, per le funzioni non abbiamo una definizione naturale)

dim

Definiamo $\rho : \{\text{polinomi}\} \longrightarrow B(H)$ come $\rho(p) := p(A)$

$\Rightarrow$ per lemma 2 ρ è isometrico e $\overline{\{\text{polinomi}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ (cioè la chiusura rispetto a $\|\cdot\|_\infty$) $= \mathcal{C}(\sigma(A))$ per Weierstrass

$\Rightarrow \exists!$ estensione $\rho : \mathcal{C}(\sigma(A)) \longrightarrow B(H)$ ed è isometrica

(ii)

(iii) i è un polinomio $\Rightarrow \rho(i) = i(A) = A$

(i) $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ $\exists \{p_n\}, \{q_n\}$ polinomi t.c.
$\|f - p_n\|_\infty \to 0$, $\|g - q_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow \|fg - p_n q_n\|_\infty \to 0$
infatti
$$\|fg - p_n q_n\|_\infty = \|fg - fq_n + fq_n - p_n q_n\|_\infty =$$
$$= \|f(g - q_n) + (f - p_n) q_n\|_\infty \leq$$
$$\leq \|f\|_\infty \|g - q_n\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty \|q_n\|_\infty \to 0$$
($\|g - q_n\|_\infty \to 0$, $\|f - p_n\|_\infty \to 0$, $\|q_n\|_\infty$ limitata)
$$\Rightarrow \rho(fg) = \lim_{n\to+\infty} \rho(p_n q_n) = \lim_{n\to+\infty} \rho(p_n)\rho(q_n) = \rho(f)\rho(g).$$

(iv) $\lambda \notin f(\sigma(A)) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(f(A))$:
$\Rightarrow g(\mu) := (f(\mu) - \lambda)^{-1}$ è una funzione continua su $\sigma(A)$ e
$g(A)(f(A) - \lambda) = \rho(g)\rho(f - \lambda) = \rho(g(f - \lambda)) = \rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
$(f(A) - \lambda) g(A) = \mathbb{1}$
$\Rightarrow g(A) = (f(A) - \lambda)^{-1} \in B(H)$
(Ciò illustra anche la "potenza" del calcolo funzionale continuo, esso infatti permette di operare con una certa classe di operatori come se fossero funzioni continue e quindi oggetti commutativi)

$\lambda \in f(\sigma(A)) \Rightarrow \lambda \in \sigma(f(A))$:
Siano $\{p_n\}$ polinomi t.c. $\|p_n - f\|_\infty \to 0$
Siccome $\lambda \in f(\sigma(A)) \Rightarrow$ lo posso scrivere $\lambda = f(\mu)$, $\mu \in \sigma(A)$
Se per assurdo $\exists (f(A) - \lambda)^{-1} \Rightarrow$ per $n \in \mathbb{N}$ suff. grande $\exists (p_n(A) - p_n(\mu))^{-1}$, infatti
$$p_n(A) - p_n(\mu) = (p_n(A) - p_n(\mu)) - (f(A) - \lambda) + (f(A) - \lambda) =$$
$$= (f(A) - \lambda)\left[\mathbb{1} + (f(A) - \lambda)^{-1}\left[(p_n(A) - p_n(\mu)) - (f(A) - \lambda)\right]\right]$$
$$\Rightarrow \|(f(A) - \lambda)^{-1}\left[(p_n(A) - p_n(\mu)) - (f(A) - \lambda)\right]\| \leq$$
$$\leq \|(f(A) - \lambda)^{-1}\| \left(\underbrace{\|p_n(A) - f(A)\|}_{= \|p_n - f\|_\infty} + \underbrace{|p_n(\mu) - f(\mu)|}_{\leq \|p_n - f\|_\infty} \right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$
$\Rightarrow$ definitivamente $\|(f(A) - \lambda)^{-1}\left[(p_n(A) - p_n(\mu)) - (f(A) - \lambda)\right]\| < 1$
$\Rightarrow \exists (p_n(A) - p_n(\mu))^{-1} \Rightarrow p_n(\mu) \notin \sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$ (↑ Neumann)
$\Rightarrow$ assurdo ($\mu \in \sigma(A)$) $\Rightarrow \lambda \in \sigma(f(A))$.

(v) $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \Rightarrow g := \sqrt{f} \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ ed è reale

$\Rightarrow \rho(f) = \rho(g^2) = \rho(\bar{g} g) = \rho(\bar{g})\,\rho(g) = \rho(g)^* \rho(g)$

(g è reale)

$\Rightarrow \langle x, \rho(f)x \rangle = \langle x, \rho(g)^* \rho(g) x \rangle = \langle \rho(g)x, \rho(g)x \rangle =$

$= \| \rho(g) x \|^2 \geq 0 \quad \forall x \in H$

Unicità: se $\tilde{\rho} : \mathcal{C}(\sigma(A)) \longrightarrow B(H)$ soddisfa (i) - (iii)

$\Rightarrow \forall$ p polinomio $\tilde{\rho}(p) = p(A) = \rho(p) \Rightarrow$ per densità dei polinomi $\tilde{\rho}(f) = \rho(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$. ∎

<u>COROLLARIO</u>

$A \in B(H)$. $A \geq 0 \iff \sigma(A) \subset [0, +\infty)$

<u>dim</u>

$\Rightarrow$) Mostriamo che $A = A^*$

$\langle Ax, y \rangle = \overline{\langle y, Ax \rangle}$

$s(y, x) := \langle y, Ax \rangle$ è una forma sesquilineare

$\Rightarrow \quad s(y, x) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k s(y + i^k x, y + i^k x)$

(id. di polarizzazione)

$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \langle y + i^k x, A(y + i^k x) \rangle$

$\langle Ax, y \rangle = \overline{s(y, x)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \overline{(-i)^k \langle \underbrace{y + i^k x, A(y + i^k x)}_{\geq 0} \rangle}$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle y + i^k x, A(y + i^k x) \rangle$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle i^k (x + (-i)^k y), i^k A(x + (-i)^k y) \rangle$

$j = 4 - k \Rightarrow i^k = i^{4-j} = i^{-j} = (-i)^j \; ; \; (-i)^k = i^j$

$\Rightarrow \langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} (-i)^j \langle x + i^j y, A(x + i^j y) \rangle$

($(\pm i)^4 = (\pm i)^0$)

$= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} (-i)^j \langle x + i^j y, A(x + i^j y) \rangle = \langle x, Ay \rangle$

(id. di polariz. per $(x, y) \longmapsto \langle x, Ay \rangle$)

$\Rightarrow A = A^*$

Sia $\lambda > 0$, allora

$\| (A + \lambda) x \|^2 = \| Ax + \lambda x \|^2$

$= \underbrace{\| Ax \|^2}_{\geq 0} + \lambda^2 \| x \|^2 + 2\lambda \underbrace{\mathrm{Re} \langle Ax, x \rangle}_{\geq 0}$

$\geq \lambda^2 \| x \|^2 \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow$ si dimostra che per un operatore autoaggiunto T t.c.
$\exists\, C>0$ con $\|Tx\| \geq C\|x\|$ $\forall x \in H \Rightarrow \exists\, T^{-1} \in B(H)$
$\Rightarrow \exists\, (A+\lambda)^{-1} \in B(H) \Rightarrow -\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow \sigma(A) \subset [0,+\infty)$

$\Leftarrow$) $\sigma(A) \subset [0,+\infty)$, $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$, $\lambda \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ reale

$B := \sqrt{A} = \rho(f) \in B(H)$ e $B^2 = \rho(f)\rho(f) = \rho(f^2) = A$
f reale $\Rightarrow B = B^*$ $A = B^*B \Rightarrow \langle x, Ax\rangle =$
$= \langle x, B^*Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$ ∎

OSS
Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.c. $\exists\, \rho : \mathcal{C}(\sigma(A)) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ $*$-omomorfismo unitale. Posto allora $P_\lambda := \rho(\chi_{\{\lambda\}})$ con $\lambda \in \sigma(A)$ si dimostra che P_λ è un proiettore ortogonale e che $\forall\, f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$
$\rho(f) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda$

Dunque nel caso di matrici abbiamo queste formule con le quali riusciamo ad esprimere le funzioni tramite proiettori (quelli associati agli autospazi della matrice)
Qual'è dunque il prossimo step?
Vogliamo generalizzare questa rappresentazione delle funzioni di un operatore come combinazione lineare di proiettori e nel caso infinito dimensionale queste combinazioni lineari diventano integrali e invece di avere una famiglia discreta di proiettori avremmo una famiglia continua.

DEF
H spazio di Hilbert. Una famiglia spettrale è una famiglia $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset B(H)$ t.c.
(i) P_λ è un proiettore ortogonale $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
(ii) $\lambda < \mu \Rightarrow P_\lambda \leq P_\mu$ ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} P_\mu - P_\lambda \geq 0$) (crescente)
(iii) $\forall x \in H$ $\lim_{\mu \to \lambda^+} P_\mu x = P_\lambda x$ (continua a destra)
Inoltre la famiglia spettrale si dice a supporto compatto se
(iv) $\exists\, a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $P_\lambda = 0$ $\forall \lambda < a$, $P_\lambda = \mathbb{1}$ $\forall \lambda \geq b$

OSS
Cosa vuol dire fare un integrale rispetto una famiglia spettrale?
$\forall x \in H$, $F_x(\lambda) := \langle x, P_\lambda x\rangle$
$F_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente e continua a destra per (ii) e (iii) $\Rightarrow \exists!\, \mu_x$ misura di Lebesgue-Stieltjes associata a F_x (da una famiglia spettrale ottengo una famiglia di misure su $\mathbb{R}$).

$$\mu_x(\mathbb{R}) = \lim_{n\to+\infty} \mu_x((-n,n]) =$$

Per n sufficientemente grande $P_n = \mathbb{1}$, $P_{-n} = 0$

$$= \lim_{n\to+\infty} F_x(n) - F_x(-n) = \lim_{n\to+\infty} \langle x, P_n x\rangle - \langle x, P_{-n} x\rangle = \|x\|^2$$

$\Rightarrow \mu_x$ è finita (inoltre se $\|x\|=1$ è una misura di probabilità)

Dunque $A \in B(H)$, $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$A = \int_I f(\lambda)\, dP_\lambda \iff \langle x, Ax\rangle = \int_I f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \quad \forall x \in H$$

Questo definisce univocamente A, infatti:

se $\langle x, Ax\rangle = \langle x, Bx\rangle \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow \langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle \quad \forall x, y \in H$ (↑ id. pol.)

$\Rightarrow A = B$ (↑ unicità dell'operatore definito da una forma sesquilineare)

TEOREMA (spettrale, versione 1)

$A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists!\ (P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ famiglia spettrale a supporto compatto t.c. se $\sigma(A) \subset [a,b]$ allora $\forall f \in \mathcal{C}([a,b])$ si ha

$$f(A) = \int_{[a,b]} f(\lambda)\, dP_\lambda$$

Idea:

Devo definire P_λ. Come la costruisco?

$\mu_x((-\infty,\lambda]) = \langle x, P_\lambda x\rangle$ (dando per buono che esista)

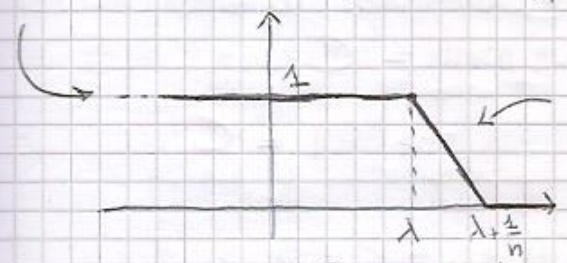
ma $\mu_x((-\infty,\lambda])$ è anche uguale a $\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,\lambda]}(\lambda')\, d\mu_x(\lambda')$

che sarebbe l'elemento di matrice della valutazione su A della funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty,\lambda]$ che però non è una funzione continua, se dunque la relazione $f(A) = \int_{[a,b]} f(\lambda)\, dP_\lambda$ valesse anche per funzioni non continue dovrei scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,\lambda]}(\lambda')\, d\mu_x(\lambda') = \text{“}\langle x, \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)\, x\rangle\text{”}$$

il problema però è che $\chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$ non l'ho definito perché $\chi_{(-\infty,\lambda]} \notin \mathcal{C}(\sigma(A))$. Devo estendere quindi il calcolo funzionale continuo dalle funzioni continue alle funzioni caratteristiche di semirette. $\Rightarrow$

$\chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$ definito approssimando con funzioni continue



Il punto sarà quindi dimostrare che $h_{\lambda,n}$ per $n\to+\infty$ converge ad un operatore che è un proiettore.

LEMMA 1

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$, $A_n = A_n^*$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
$A_n \geq A_{n+1} \geq \alpha \mathbb{1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists\, A = A^* \in B(H)$ t.c.
$\forall x\in H \lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax$ (convergenza forte) e $A \leq A_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

dim

$A_n \leq A_1$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow A_n \leq \|A_1\|\mathbb{1}$ infatti

$$\langle x, A_n x\rangle \leq \langle x, A_1 x\rangle \leq \|x\|\|A_1 x\| \leq \|A_1\|\|x\|^2 = \|A_1\|\langle x,x\rangle = \langle x, (\|A_1\|\mathbb{1})x\rangle \quad \forall x\in H$$

$A_n \geq \alpha\mathbb{1} \Rightarrow \sigma(A_n) \subset [\alpha, \|A_1\|]$

($\sigma(A-\mu\mathbb{1}) = \sigma(A)-\mu$ lo spettro del traslato è lo spettro traslato)

$$\Downarrow$$

$$\|A_n\| \leq \max\{|\alpha|, \|A_1\|\} =: C > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

per $m \geq n$ $S_{m,n}(x,y) := \langle x, (A_n - A_m)y\rangle$

$S_{m,n}$ è una forma hermitiana cioè $S_{m,n} = \langle x, (A_n - A_m)x\rangle \geq 0$

$$\overset{CS}{\Rightarrow} |S_{m,n}(x,y)| \leq S_{m,n}(x,x)^{1/2} S_{m,n}(y,y)^{1/2} \quad \forall x,y\in H$$

Mostriamo $\forall x\in H$ $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy:

$$\|(A_n - A_m)x\|^4 = |\langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle|^2 = |\langle x, (A_n - A_m)^2 x\rangle|^2$$

$$= |S_{m,n}(x, (A_n - A_m)x)|^2$$

$$\overset{CS}{\leq} |S_{m,n}(x,x)|\,|S_{m,n}((A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x)|$$

$$= |\langle x, (A_n - A_m)x\rangle|\,|\langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)^2 x\rangle|$$

$$\overset{CS}{\leq} |\langle x, (A_n - A_m)x\rangle|\,\|x\|^2\,\|A_n - A_m\|^3$$

$$\leq |\langle x, (A_n - A_m)x\rangle|\,\|x\|^2\,(\|A_n\| + \|A_m\|)^3$$

$$\leq (2C)^3 \|x\|^2 \langle x, (A_n - A_m)x\rangle$$

$\{\langle x, A_n x\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \langle x, A_n x\rangle$

$$\Rightarrow \langle x, (A_n - A_m)x\rangle \xrightarrow{n,m\to+\infty} 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} A_n x =: Ax \quad \forall x\in H$$

Facciamo vedere che:

- $A \in B(H)$: la linearità è ovvia, mentre la limitatezza
$$\|Ax\| = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to+\infty} \|A_n\|\,\|x\| \leq C\|x\|$$
$$\Rightarrow \|A\| \leq C$$

- $A = A^*$:
$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, A_n y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x,y \in H$$

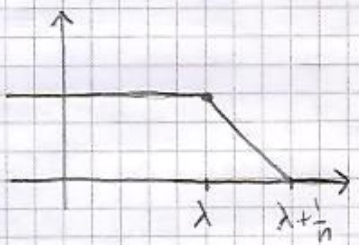
- $A \leq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$:
$$\langle x, Ax\rangle = \lim_{m\to+\infty} \langle x, A_m x\rangle \leq \langle x, A_n x\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

■

Applichiamo ora questo lemma a quella $h_{\lambda,n}$.

LEMMA 2

$A = A^* \in B(H)$

$h_{\lambda,n} :=$ 

$\lambda \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall x \in H \ \exists \lim_{n\to+\infty} h_{\lambda,n}(A)x = P_\lambda x$$

e $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ è una famiglia spettrale a supporto compatto (supporto contenuto in $[a,b]$ se $\sigma(A) \subset [a,b]$).

dim

$h_{\lambda,n} \geq h_{\lambda,n+1} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ funzioni continue

$\Longrightarrow$ (calcolo funzionale continuo) $h_{\lambda,n}(A) \geq h_{\lambda,n+1}(A) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (sono operatori autoaggiunti)

$$\Longrightarrow \exists\, P_\lambda x := \lim_{n\to+\infty} h_{\lambda,n}(A)x \ , \ P_\lambda \in B(H)$$

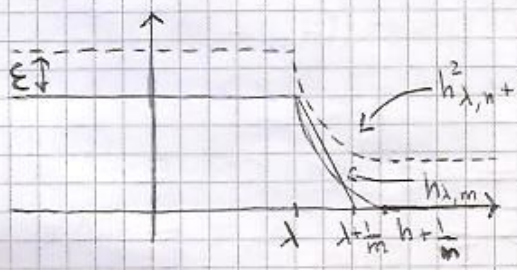
(lemma 1)

Ora dobbiamo mostrare che è una famiglia spettrale:

(i) $P_\lambda = P_\lambda^* = P_\lambda^2$:

$P_\lambda = P_\lambda^*$ segue per il lemma 1. Osserviamo che:

- $h_{\lambda,n}^2 \leq h_{\lambda,n}$
- Dato $\varepsilon > 0$, se $m > 2n \Rightarrow h_{\lambda,m} \leq h_{\lambda,n}^2 + \varepsilon$



Se m è sufficientemente grande, la pendenza della retta è abbastanza alta da non incontrare mai quel pezzo di parabola.

$\Rightarrow h_{\lambda,m}(A) - \varepsilon \leq h_{\lambda,n}(A)^2 \leq h_{\lambda,n}(A)$

Allora $\forall x \in H$

$$\langle x, P_\lambda x\rangle - \varepsilon \|x\|^2 = \lim_{m\to+\infty} \langle x, (h_{\lambda,m}(A) - \varepsilon \mathbb{1})x\rangle \leq$$

$$\leq \langle x, h_{\lambda,n}(A)^2 x\rangle \leq \langle x, h_{\lambda,n}(A)x\rangle$$

Inoltre $\lim_{n\to+\infty} \langle x, h_{\lambda,n}(A)^2 x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle h_{\lambda,n}(A)x, h_{\lambda,n}(A)x\rangle$

$$= \langle P_\lambda x, P_\lambda x\rangle = \langle x, P_\lambda^2 x\rangle$$

Perciò se passo al limite per $n\to+\infty$ nella precedente disuguaglianza

$\Rightarrow \langle x, P_\lambda x\rangle - \varepsilon\|x\|^2 \leq \langle x, P_\lambda^2 x\rangle \leq \langle x, P_\lambda x\rangle$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \langle x, P_\lambda x\rangle = \langle x, P_\lambda^2 x\rangle \Rightarrow P_\lambda = P_\lambda^2$

(ii) $\lambda < \mu \Rightarrow h_{\lambda,n} \leq h_{\mu,n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \langle x, h_{\lambda,n}(A)x\rangle \leq \langle x, h_{\mu,n}(A)x\rangle$

$\downarrow \quad n\to+\infty \quad \downarrow \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \ \forall x\in H$

$\langle x, P_\lambda x\rangle \leq \langle x, P_\mu x\rangle$

$\Rightarrow P_\lambda \leq P_\mu$

(iii) $\lim_{\mu\to\lambda^+} P_\mu x = P_\lambda x \quad \forall x \in H$:

$$\|(P_\mu - P_\lambda)x\|^2 = \langle (P_\mu - P_\lambda)x, (P_\mu - P_\lambda)x\rangle$$

$$= \langle x, (P_\mu - P_\lambda)^2 x\rangle \quad (= P_\mu - P_\lambda \text{ perché } P_\lambda \leq P_\mu \text{ (esercizio)})$$

$$= \langle x, (P_\mu + P_\lambda - P_\mu P_\lambda - P_\lambda P_\mu)x\rangle \quad (= P_\lambda = P_\lambda)$$

$$= \langle x, (P_\mu - P_\lambda)x\rangle$$

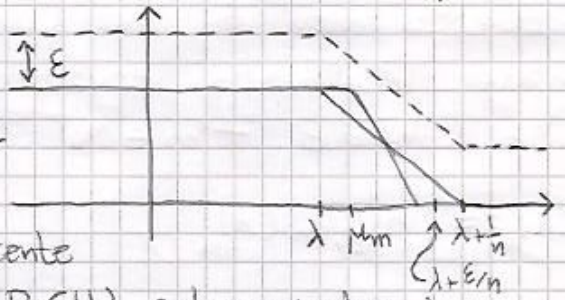
Mostriamo che tale quantità va a 0.

Sia $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. $\mu_m \searrow \lambda$ e definiamo $g_m := h_{\mu_m, m}$

$\Rightarrow h_{\lambda,m} \leq g_m \leq h_{\lambda,n} + \varepsilon \quad$ se $\mu_m < \lambda + \frac{\varepsilon}{n}$

$\Downarrow$

$h_{\lambda,m}(A) \leq g_m(A) \leq h_{\lambda,n}(A) + \varepsilon\mathbb{1}$



Inoltre anche g_m è decrescente

$g_m \geq g_{m+1} \Rightarrow \exists\, Q \in \mathcal{B}(H)$ autoaggiunto t.c. $Qx = \lim_{m\to+\infty} g_m(A)x \ \forall x\in H$

(↑ lemma 1)

Passo dunque al limite nella precedente disuguaglianza

$$\Rightarrow \langle x, P_\lambda x\rangle = \lim_{m\to+\infty} \langle x, h_{\lambda,m}(A)x\rangle \leq \lim_{m\to+\infty} \langle x, g_m(A)x\rangle$$

$$= \langle x, Qx\rangle \leq \langle x, h_{\lambda,n}(A)x\rangle + \varepsilon\|x\|^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \langle x, P_\lambda x\rangle + \varepsilon\|x\|^2$$

Dunque $\langle x, P_\lambda x\rangle \le \langle x, Qx\rangle \le \langle x, P_\lambda x\rangle + \varepsilon\|x\|^2$

$\Rightarrow Q = P_\lambda$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e di $x \in H$

Inoltre $g_m(A) = h_{\mu_m, m}(A) \geq P_{\mu_m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ infatti

$\langle x, P_{\mu_m} x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, h_{\mu_m,n}(A)x\rangle \le \langle x, g_m(A)x\rangle$ $\forall x \in H$

$\Rightarrow \langle x, P_\lambda x\rangle \le \langle x, P_{\mu_m} x\rangle \le \langle x, g_m(A)x\rangle$

$\downarrow m\to+\infty$

$\langle x, P_\lambda x\rangle$

$\Rightarrow \langle x, P_{\mu_m} x\rangle \xrightarrow{m\to+\infty} \langle x, P_\lambda x\rangle$ $\forall x \in H$

(iv) $\sigma(A) \subset [a,b]$

$\lambda < a \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\lambda + \frac{1}{n} < a \Rightarrow h_{\lambda,n}(A) = 0 \Rightarrow P_\lambda = 0$

$\lambda \geq b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $h_{\lambda,n}(A) = \mathbb{1} \Rightarrow P_\lambda = \mathbb{1}$ ■

dim (teorema spettrale)

■ Esistenza:

Sia $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ la famiglia spettrale definita dal lemma 2

Devo dimostrare che per ogni funzione continua gli elementi di matrice diagonale dell'operatore $f(A)$ li posso scrivere come l'integrale rispetto a questa misura.

L'idea è simile a quella dell'integrale di Riemann.

→ $f \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow f$ è unif. continua

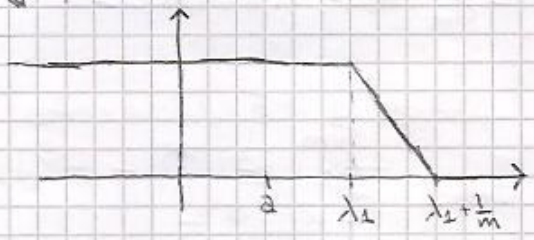
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists\, a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$ t.c. se $\lambda, \lambda' \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}]$

$k = 0, \dots, n-1 \Rightarrow |f(\lambda) - f(\lambda')| < \varepsilon$

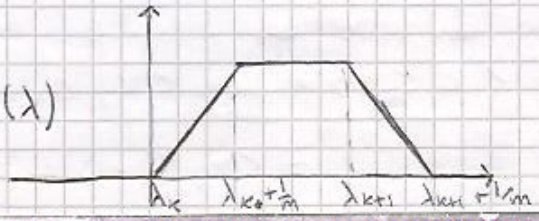
Adesso con Riemann per approssimare avrei utilizzato una funzione che è costante su tutti gli intervallini, tuttavia questa non è una funzione continua. Allora per approssimare le funzioni caratteristiche uso gli $h_{\lambda,n}$.

Definiamo dunque $\forall m \in \mathbb{N}$:

$\psi_{m,0}(\lambda) := h_{\lambda_1, m}(\lambda)$



$\psi_{m,k}(\lambda) := h_{\lambda_{k+1}, m}(\lambda) - h_{\lambda_k, m}(\lambda)$



$$\Rightarrow f_m(\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1})\, \psi_{m,k}(\lambda)$$



È chiaro che f_m approssima a meno di ε f, infatti:

$\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ $\quad k = 1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow f_m(\lambda) = f(\lambda_k)\, \psi_{m,k-1}(\lambda) + f(\lambda_{k+1})\, \psi_{m,k}(\lambda)$$

ma $\psi_{m,k-1}(\lambda) + \psi_{m,k}(\lambda) = h_{\lambda_k,m}(\lambda) - h_{\lambda_{k-1},m}(\lambda) + h_{\lambda_{k+1},m}(\lambda) - h_{\lambda_k,m}(\lambda)$

$$= \underbrace{h_{\lambda_{k+1},m}(\lambda)}_{\|\,1} - \underbrace{h_{\lambda_{k-1},m}(\lambda)}_{\|\,0} = 1$$

$\Rightarrow f_m(\lambda)$ è una combinazione convessa di $f(\lambda_k)$ e $f(\lambda_{k+1})$

$\Rightarrow f_m(\lambda)$ sta tra $f(\lambda_k)$ e $f(\lambda_{k+1})$

$\Rightarrow |f_m(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon \Rightarrow \|f_m - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$f, f_m \in C(\sigma(A)) \overset{\text{c.f.c.}}{\Longrightarrow} \|f(A) - f_m(A)\| \overset{\text{isometria}}{=} \|f_m - f\|_\infty < \varepsilon$

Inoltre, per l'integrazione secondo Riemann di funzioni continue,

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1})\, \chi_{(\lambda_k,\lambda_{k+1}]} - f \Big\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \Big| \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1}) \underbrace{\int_{[a,b]} \chi_{(\lambda_k,\lambda_{k+1}]}\, d\mu_x}_{= \mu_x((\lambda_k,\lambda_{k+1}])} - \int_{[a,b]} f\, d\mu_x \Big| \le$$

$$\le \int_{[a,b]} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1})\, \chi_{(\lambda_k,\lambda_{k+1}]} - f \Big|\, d\mu_x \overset{\left(\int_{[a,b]} d\mu_x = \|x\|^2\right)}{\le} \varepsilon \|x\|^2$$

Allora concludiamo mostrando che

$$\Big| \langle x, f(A)x \rangle - \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \Big| = \text{è piccolo a piacere}$$

$$= \Big| \Big[\langle x, f(A)x \rangle - \langle x, f_m(A)x \rangle \Big] + \Big[\langle x, f_m(A)x \rangle - \sum f(\lambda_{k+1})\, \mu_x((\lambda_k,\lambda_{k+1}]) \Big]$$

$$+ \Big[\sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1})\, \mu_x((\lambda_k,\lambda_{k+1}]) - \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \Big] \Big| \le$$

$$\le \big| \langle x, f(A)x \rangle - \langle x, f_m(A)x \rangle \big| + \big| \langle x, f_m(A)x \rangle -$$

$$= \langle x, (P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k}) x \rangle$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1}) \mu_x((\lambda_k, \lambda_{k+1}]) \Big| +$$

$$+ \Big| \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1}) \mu_x((\lambda_k, \lambda_{k+1}]) - \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \Big|$$

$$< \varepsilon \|x\|^2$$

Il primo pezzo lo maggioro con Cauchy-Schwarz

$$\leq \|f(A) - f_m(A)\| \|x\|^2 < \varepsilon \|x\|^2$$

Mentre il secondo

$$= \Big| \langle x, f_m(A) x \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1}) \langle x, (P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k}) x \rangle \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_{k+1}) \Big[\langle x, \psi_{m,k}(A) x \rangle - \langle x, (P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k}) x \rangle \Big] \Big|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\lambda_{k+1})| \Big| \Big[\langle x, \psi_{m,k}(A) x \rangle - \langle x, (P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k}) x \rangle \Big] \Big| < \|f\|_\infty \varepsilon$$

infatti

$$|\langle x, \psi_{m,k}(A) x \rangle - \langle x, (P_{\lambda_{k+1}} - P_{\lambda_k}) x \rangle| =$$

$$= |\langle x, (h_{\lambda_{k+1},m}(A) - P_{\lambda_{k+1}}) x \rangle - \langle x, (h_{\lambda_k,m}(A) - P_{\lambda_k}) x \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x, (h_{\lambda_{k+1},m}(A) - P_{\lambda_{k+1}}) x \rangle| + |\langle x, (h_{\lambda_k,m}(A) - P_{\lambda_k}) x \rangle| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$\downarrow m \to +\infty$ 0 ; $\downarrow m \to \infty$ 0 ; per m sufficientemente grande

e dunque

$$\Rightarrow \left| \langle x, f(A) x \rangle - \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \right| < \varepsilon (\|f\|_\infty + 2\|x\|^2)$$

$\Rightarrow$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e di $x \in H$ $f(A) = \int_{[a,b]} f(\lambda) dP_\lambda$

■ Unicità:

Sia $(\tilde{P}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una famiglia spettrale t.c.

$$f(A) = \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\tilde{P}_\lambda \quad \forall f \in \mathcal{C}([a,b])$$

Osserviamo che

$$1 - h_{\lambda,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \chi_{(-\infty,\lambda]} = \chi_{(\lambda,+\infty)}$$

$$\overset{TCM}{\Longrightarrow} \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} (1 - h_{\lambda,n})\, d\tilde{\mu}_x = \int_{[a,b]} \chi_{(\lambda,+\infty)}\, d\tilde{\mu}_x =$$

$$= \tilde{\mu}_x((\lambda,+\infty)) = \tilde{\mu}_x(\mathbb{R} \setminus (-\infty,\lambda])$$

$$= \tilde{\mu}_x(\mathbb{R}) - \tilde{\mu}_x((-\infty,\lambda])$$

$$= \|x\|^2 - \langle x, \tilde{P}_\lambda x \rangle$$

($\tilde{\mu}_x$ misura di L.S. associata a $\lambda \longmapsto \langle x, \tilde{P}_\lambda x \rangle$ $x \in H$ infatti data una famiglia spettrale e un vettore nello spazio di Hilbert abbiamo sempre una misura di L.S. associata).

Siccome $1 - h_{\lambda,n}$ è una funzione continua

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} (1 - h_{\lambda,n})\, d\tilde{\mu}_x = \langle x, (1 - h_{\lambda,n}(A))x \rangle$$

$$= \int_{[a,b]} (1 - h_{\lambda,n})\, d\mu_x \xrightarrow{n \to +\infty} \|x\|^2 - \langle x, P_\lambda x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, P_\lambda x \rangle = \langle x, \tilde{P}_\lambda x \rangle \quad \forall x \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{P}_\lambda = P_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

■

DEF

$Bor(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ è boreliana e limitata} \}$

Ricordiamo che f è boreliana $\iff$ f è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dei boreliani.

Osserviamo che $Bor(\mathbb{R})$ è un'algebra di funzioni quindi il prodotto di funzioni boreliane limitate è ancora boreliana limitata.

TEOREMA (calcolo funzionale boreliano)

$A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists!\ \tilde{\rho} : Bor(\mathbb{R}) \to B(H)$ $*$-omomorfismo (cioè è lineare, moltiplicativo e rispetta lo $*$), isometrico e unitale (cioè $\|\tilde{\rho}(f)\| = \|f\|_\infty$, $\tilde{\rho}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$) che estende il calcolo funzionale continuo (cioè se $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ $\Rightarrow \tilde{\rho}(f) = f(A)$) ed è tale che se $\{f_n\}_n \subset Bor(\mathbb{R})$ è equilimitata ($\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$) e $f_n \to 0$ puntualmente $\Rightarrow \tilde{\rho}(f_n)x \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad \forall x \in H$ ($\tilde{\rho}(f_n) \to 0$ puntualmente)

dim

■ Unicità:

Sia $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famiglia spettrale definita da A e μ_x le relative misure di Lebesgue-Stieltjes. Basta dimostrare che

$$\langle x, \tilde{\rho}(f)x \rangle = \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \qquad \forall f \in Bor(\mathbb{R}),\ \forall x \in H$$

se $\tilde{\rho}$ soddisfa la tesi.

Definiamo $P(E) := \tilde{\rho}(\chi_E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall x \in H \quad \nu_x(E) := \langle x, P(E)x \rangle$ è una misura:

$E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$

$$\Rightarrow \nu_x(E_1 \cup E_2) = \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{E_1 \cup E_2})x \rangle \overset{\tilde{\rho} \text{ è lineare}}{=} \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{E_1})x \rangle + \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{E_2})x \rangle$$

$$= \nu_x(E_1) + \nu_x(E_2)$$

$\Rightarrow \nu_x$ è finitamente additiva.

$E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$: $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $k \neq j$

$$\nu_x\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \langle x, \tilde{\rho}\left(\chi_{\bigcup_{k=1} E_k}\right) x\rangle$$

Ora, $\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} \xrightarrow{n\to+\infty} \chi_{\bigcup_{k=1} E_k}$ puntualmente su $\mathbb{R}$, inoltre

$$|\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} - \chi_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k}| = |\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k}| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque abbiamo una successione di funzioni equilimitata che converge puntualmente a zero

$$\Rightarrow \tilde{\rho}\left(\chi_{\bigcup_{k=1} E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k}\right) x = \left[\tilde{\rho}\left(\chi_{\bigcup_{k=1} E_k}\right) - \tilde{\rho}\left(\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k}\right)\right] x \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in H$$

(↑ c.f.b.)

$$\Rightarrow \nu_x\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \langle x, \tilde{\rho}\left(\chi_{\bigcup_{k=1} E_k}\right) x\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu_x(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_x(E_k)$$

$\Rightarrow \nu_x$ è σ-additiva, cioè è una misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Inoltre

$$\nu_x((\lambda,\mu]) = \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{(\lambda,\mu]}) x\rangle =$$

$$= \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{(-\infty,\mu]}) x\rangle - \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{(-\infty,\lambda]}) x\rangle$$

Osserviamo che

$\chi_{(-\infty,\lambda]} = \lim_{n\to+\infty} h_{\lambda,n}$ puntuale, $|\chi_{(-\infty,\lambda]} - h_{\lambda,n}| \leq 1$

$$\Rightarrow \nu_x((\lambda,\mu]) = \lim_{n\to+\infty} \langle x, \tilde{\rho}(h_{\mu,n}) x\rangle - \langle x, \tilde{\rho}(h_{\lambda,n}) x\rangle$$

($h_{\lambda,n}$ e $h_{\mu,n}$ sono continue e il c.f.b. estende il c.f.c.)

$$\overset{\text{per definizione}}{=} \lim_{n\to+\infty} \langle x, h_{\mu,n}(A) x\rangle - \langle x, h_{\lambda,n}(A) x\rangle$$

$$= \langle x, P_\mu x\rangle - \langle x, P_\lambda x\rangle = \mu_x((\lambda,\mu])$$

Dunque le misure ν_x e μ_x coincidono sugli intervalli $(\lambda,\mu]$ e analogamente $\nu_x(I) = \mu_x(I)$ $\forall$ I intervallo limitato

$\Rightarrow$ $\nu_x = \mu_x$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall x \in H$

(↑ unicità del prolungamento di Lebesgue)

Ma allora sia $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$, $E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\langle x, \tilde{\rho}(s) x\rangle = \sum c_k \underbrace{\langle x, \tilde{\rho}(\chi_{E_k}) x\rangle}_{\nu_x(E_k)} = \sum c_k \mu_x(E_k) = \int_{\mathbb{R}} s \, d\mu_x$$

Data $f \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, $f \geq 0 \Rightarrow \exists \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ semplici t.c. $0 \leq s_n \nearrow f$ e $s_n \nearrow f$ puntualmente $\Rightarrow \|s_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \tilde{\rho}(s_n) x \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{\rho}(f) x$ $\forall x \in H$

$$\Rightarrow \langle x, \tilde{\rho}(f) x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, \tilde{\rho}(s_n) x\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu_x \overset{\text{TCM}}{=} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_x$$

Infine data $f \in Bor(\mathbb{R})$ basta decomporre
$f = (f_{1,+} - f_{1,-}) + i(f_{2,+} - f_{2,-})$ $(\Rightarrow f_{i,\pm} \in Bor(\mathbb{R}),\ f_{i,\pm} \geq 0)$
e usare la linearità di $\tilde{\rho}$ e dell'integrale.

■ Esistenza:
Siccome $\tilde{\rho}$ deve estendere il c.f.c., cominciamo con quest'ultimo. Adesso con μ_x definita come sopra, vale, se $[a,b] \supset \sigma(A)$,

$$\langle x, f(A)x \rangle = \int_{[a,b]} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \qquad \forall f \in \mathcal{C}([a,b]),\ \forall x \in H$$

Dunque questa mi permette di esprimere gli elementi di matrice diagonale dell'operatore $f(A)$ tramite un integrale rispetto alla misura μ_x. Adesso se volessi tutti gli elementi di matrice uso l'identità di polarizzazione

$$\Rightarrow \langle x, f(A)y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \langle x+\omega y, f(A)(x+\omega y) \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{[a,b]} f \, d\mu_{x+\omega y} \qquad \forall x,y \in H,\ \forall f \in \mathcal{C}([a,b])$$

($\mu_{x+\omega y}$: misura associata al vettore $x+\omega y$)

Adesso per estendere il calcolo funzionale osserviamo che quest'ultima espressione ha senso qualunque sia f (non serve sia continua)
Definiamo allora, data $f \in Bor(\mathbb{R})$

$$S_f(x,y) := \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{x+\omega y} \qquad x,y \in H$$

Si dimostra che è una forma sesquilineare. Mostriamo allora che è limitata: $x,y \in H$, $\|x\| = 1 = \|y\|$

$$|S_f(x,y)| = \left| \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{x+\omega y} \right| \qquad (|\bar{\omega}| = 1)$$

$$\leq \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu_{x+\omega y} \leq \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \|f\|_\infty \mu_{x+\omega y}(\mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{4} \|f\|_\infty \sum_{\omega^4=1} \underbrace{\|x+\omega y\|^2}_{\leq 4} \overset{\uparrow}{\leq} 4 \|f\|_\infty \qquad (\|x\|=1=\|y\|)$$

$$\forall x,y \in H \quad |S_f(x,y)| \overset{\text{per sesquilinearità}}{=} \underbrace{\left| S_f\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right|}_{\leq 4\|f\|_\infty} \|x\|\|y\| \leq 4\|f\|_\infty \|x\|\|y\|$$

$$\Rightarrow \exists!\, \tilde{\rho}(f) \in B(H) \ (\forall f \in Bor(\mathbb{R})) \text{ t.c. } S_f(x,y) = \langle x, \tilde{\rho}(f) y \rangle \quad \forall x,y \in H$$

Mostriamo che $\tilde{\rho}$ abbia tutte le proprietà della tesi:
È ovvio che $\tilde{\rho}: Bor(\mathbb{R}) \to B(H)$ sia lineare e rispetta lo $*$

; facciamo allora vedere che è moltiplicativo:

Siano $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu_x = \langle x, (fg)(A)x \rangle = \langle x, f(A)\overbrace{g(A)x}^{y} \rangle$$

f e g sono continue $\Rightarrow$ vale cfc che è moltiplicativo

$$= \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{x+\omega g(A)x}$$

Ora abbiamo 5 misure: $\mu_{x+\omega g(A)x}$ e la misura definita dall'integrazione di una funzione generica contro la funzione g con la misura μ_x. Dunque $\forall f \in Bor(\mathbb{R})$ $\exists \{f_n\} \subset C_b(\mathbb{R})$ t.c.

① $\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| g \, d\mu_x \to 0$, ② $\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| \, d\mu_{x+\omega g(A)x} \to 0$ $\forall \omega$ t.c. $\omega^4 = 1$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu_x \overset{①}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g \, d\mu_x = (f_n, g \text{ continue})$$

$$\overset{①}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_{x+\omega g(A)x}$$

$$\overset{②}{=} \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{x+\omega g(A)x}$$

$$= \langle x, \tilde{\rho}(f) g(A) x \rangle = \langle \tilde{\rho}(f)^* x, g(A) x \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_{\tilde{\rho}(f)^* x + \omega x}$$

Approssimando ora $g \in Bor(\mathbb{R})$ con funzioni continue si ottiene $\forall f, g \in Bor(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu_x = \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_{\tilde{\rho}(f)^* x + \omega x}$$

$$\langle x, \tilde{\rho}(fg) x \rangle = \langle \tilde{\rho}(f)^* x, \tilde{\rho}(g) x \rangle = \langle x, \tilde{\rho}(f)\tilde{\rho}(g) x \rangle \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \tilde{\rho}(fg) = \tilde{\rho}(f)\tilde{\rho}(g) \quad \forall f, g \in Bor(\mathbb{R})$$

Mostriamo infine la proprietà di continuità rispetto ai limiti puntuali:

Sia $\{f_n\} \subset Bor(\mathbb{R})$ equilimitata e t.c. $f_n \to 0$ puntualmente, $x \in H$, $\|\tilde{\rho}(f_n) x\|^2 = \langle \tilde{\rho}(f_n) x, \tilde{\rho}(f_n) x \rangle$

$$= \langle x, \tilde{\rho}(f_n)^* \tilde{\rho}(f_n) x \rangle \overset{\tilde{\rho} \text{ è uno } *\text{-omomorfismo}}{=} \langle x, \tilde{\rho}(|f_n|^2) x \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 \, d\mu_x \xrightarrow[\text{TCD}]{\text{equilimitate + lim. punt.}} 0$$

OSS

In particolare si può definire $P(E) = \check{P}(\chi_E) = \chi_E(A)$ con $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e si ottiene l'analogo della misura di L.S. definita dalla famiglia spettrale $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

DEF

Una misura spettrale su $\mathbb{R}$ è un'applicazione $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H)$ tale che

(i) $P(E)$ è un proiettore ortogonale $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(ii) $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$

(iii) $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $k \neq j$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)x = \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k)x \quad \forall x \in H$$

Inoltre P è detta a supporto compatto contenuto in $[a,b]$ se $P(\mathbb{R} \setminus [a,b]) = 0$

PROP

P misura spettrale su $\mathbb{R}$. Allora:

(i) $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$

(ii) $E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E)P(F) = 0$

(iii) $\forall E, F \Rightarrow P(E)P(F) = P(E \cap F)$

dim

(i) $F = E \cup (F \setminus E)$ disgiunta $\Rightarrow P(F) = P(E) + P(F \setminus E)$

$\Rightarrow P(F) - P(E) = P(F \setminus E) \geq 0$ (i proiettori sono operatori positivi)

(ii) $E \subset F^c$, $P(E)P(F) \overset{(\mathbb{R} = F \cup F^c)}{=} P(E)(P(\mathbb{R}) - P(F^c))$

$= P(E)(\mathbb{1} - P(F^c))$ ($P(E) \leq P(F^c)$ esercizio)

$= P(E) - P(E)P(F^c) = P(E) - P(E) = 0$

(iii) $P(E)P(F) = (P(E \cap F) + P(E \setminus F))(P(E \cap F) + P(F \setminus E))$

$\overset{P^2 = P}{=} P(E \cap F) + \underbrace{P(E \cap F)P(F \setminus E)}_{=0} + \underbrace{P(E \setminus F)P(E \cap F)}_{=0}$ (perché disgiunti)

$+ \underbrace{P(E \setminus F)P(F \setminus E)}_{=0} = P(E \cap F)$

PROP

Sia $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H)$ una misura spettrale $\Rightarrow$ posto $P_\lambda := P((-\infty, \lambda])$, $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ è una famiglia spettrale e la misura $\nu_x(E) := \langle x, P(E)x \rangle$, $x \in H$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la misura di Lebesgue-Stieltjes definita dalla funzione $F_x(\lambda) := \langle x, P_\lambda x \rangle$

dim

Mostriamo che $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ è una famiglia spettrale

(i) È ovvio che P_λ è un proiettore ortogonale

(ii) $\lambda < \mu \Rightarrow (-\infty, \lambda] \subset (-\infty, \mu] \Rightarrow P_\lambda = P((-\infty,\lambda]) \leq P((-\infty,\mu]) = P_\mu$

(iii) Continuità a destra:

Sia $\{\mu_n\}_n \subset \mathbb{R}$ t.c. $\mu_n \searrow \lambda$

$$\Rightarrow (-\infty, \lambda] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, \mu_n]$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mu_n, +\infty) \overset{\text{se definisco } \mu_0 = +\infty}{=} \bigcup_{K=1}^{\infty} (\mu_K, \mu_{K-1}]$$

$$P_\lambda x = P((-\infty,\lambda])x \overset{(P(\mathbb{R}) = \mathbb{1})}{=} x - P((\lambda,+\infty))x$$

$$= x - \sum_{K=1}^{+\infty} P((\mu_K, \mu_{K-1}])x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x - \sum_{K=1}^{n} P((\mu_K,\mu_{K-1}])x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x - P((\mu_n,+\infty))x = \lim_{n\to+\infty} P((-\infty,\mu_n])x = P_{\mu_n} x$$

$$\Rightarrow \lim_{\mu\to\lambda^+} P_\mu x = P_\lambda x$$

Infine mostriamo che questa misura è la misura di L.S. definita da questa funzione. $(\lambda \longrightarrow \langle x, P_\lambda x\rangle)$

$\nu_x((\lambda,\mu]) = \langle x, P((\lambda,\mu])x\rangle = \langle x, P_\mu x\rangle - \langle x, P_\lambda x\rangle$

ed analogamente per ogni intervallo limitato. ∎

NOTAZ.

P misura spettrale, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione boreliana, $B \in B(H)$,

$$B = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda \overset{\text{def}}{\iff} \langle x, Bx\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \quad \forall x \in H$$

Con questa notazione è possibile riesprimere il calcolo funzionale boreliano tramite integrali rispetto alla misura spettrale, così come avevamo espresso il calcolo funzionale continuo come integrale rispetto alla famiglia spettrale definita dall'operatore.

TEOREMA (spettrale, versione con misura spettrale)

$A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists!\ P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H)$ misura spettrale a supporto compatto contenuto in $[a,b]$ (t.c. $\sigma(A) \subset [a,b]$) t.c. $\forall f \in Bor(\mathbb{R})$

$$f(A) := \tilde{\rho}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda$$

dim

Esistenza: Dobbiamo definire la misura spettrale, sfruttiamo il cfb. Sia $\tilde{\rho}$ il calcolo funzionale boreliano definito da A,

e definiamo $P(E) := \tilde{\rho}(\chi_E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow P$ è una misura spettrale infatti:

(i) $P(E)^2 = \tilde{\rho}(\chi_E)^2 = \tilde{\rho}(\chi_E^2) = \tilde{\rho}(\chi_E) = P(E)$ (Il quadrato di una funz. caratt. è ancora quella funz. caratt.)

($\tilde{\rho}$ è moltiplicativo)

$P(E)^* = \tilde{\rho}(\chi_E)^* = \tilde{\rho}(\overline{\chi_E}) = \tilde{\rho}(\chi_E) = P(E)$

(χ_E è una funz. caratteristica reale)

(ii) $P(\emptyset) = \tilde{\rho}(\chi_\emptyset) = \tilde{\rho}(0) = 0, \quad P(\mathbb{R}) = \tilde{\rho}(\chi_{\mathbb{R}}) = \tilde{\rho}(1) = \mathbb{1}$

(iii) Sia $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $k \neq j$, $x \in H$

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\Big)x - \sum_{k=1}^{n} P(E_k)x = \tilde{\rho}\Big(\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k}\Big)x \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

poiché $\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ puntualmente ed è equilimitata

$$\Rightarrow P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\Big)x = \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k)x \quad \forall x \in H$$

Dunque per l'unicità del calcolo funzionale boreliano $\Rightarrow$

- $\nu_x = \mu_x \ \forall x \in H$, cioè la misura associata alla misura spettrale è uguale alla misura di L.S. definita dalla famiglia spettrale di A
- $\tilde{\rho}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda \quad \forall f \in Bor(\mathbb{R})$

■ Unicità

Sia $\tilde{P}$ misura spettrale t.c. $\tilde{\rho}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\tilde{P}_\lambda \quad \forall f \in Bor(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \langle x, \tilde{P}_\lambda x\rangle = \langle x, \tilde{P}((-\infty,\lambda])x\rangle =$$

(famiglia spettrale definita da questa nuova misura spettrale)

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,\lambda]}\, d\tilde{\nu}_x = \langle x, \tilde{\rho}(\chi_{(-\infty,\lambda]})x\rangle = \langle x, P_\lambda x\rangle$$

$\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (unicità della misura di L.S.) $\tilde{\nu}_x = \mu_x \ \forall x \in H$

$\Rightarrow \langle x, \tilde{P}(E)x\rangle = \tilde{\nu}_x(E) = \mu_x(E) = \langle x, P(E)x\rangle$

$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in H$

$\Rightarrow \tilde{P} = P$ ■

Perché è interessante questa versione del teorema spettrale? Uno dei motivi è che la misura spettrale contiene parecchie informazioni sullo spettro dell'operatore, in particolare:

TEOREMA

$A = A^* \in B(H)$, P misura spettrale di A.

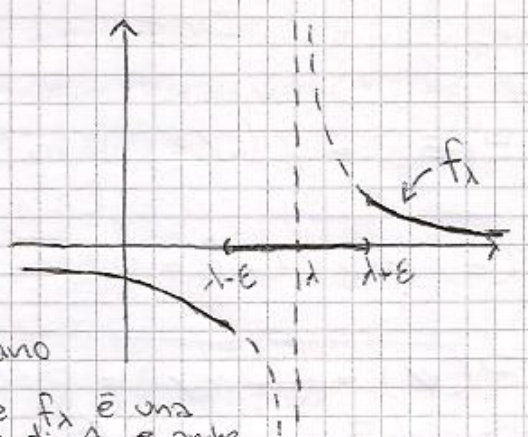
(i) $\lambda \in \sigma(A) \iff P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

(ii) $\lambda \in \sigma_p(A) \iff P(\{\lambda\}) \neq 0$

dim

(i) ($\Rightarrow$) Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) = 0$ e consideriamo la funzione

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda} & |t-\lambda| \geq \varepsilon \\ 0 & |t-\lambda| < \varepsilon \end{cases}$$



$f_\lambda \in Bor(\mathbb{R})$, quindi posso farne il calcolo funzionale boreliano

$\Rightarrow \langle x, (A-\lambda) f_\lambda(A) x \rangle =$ (Siccome f_λ è una funzione di A e anche $A-\lambda$ è una funzione di A e siccome il cfb è moltiplicativo)

$\Rightarrow = \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda) f_\lambda(t) \, d\mu_x(t)$ (Siccome abbiamo supposto $P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \mu_x((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) = \langle x, P(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$)

$= \int_{|t-\lambda| \geq \varepsilon} (t-\lambda) f_\lambda(t) \, d\mu_x(t)$

$= \int_{|t-\lambda| \geq \varepsilon} \cancel{(t-\lambda)} \frac{1}{\cancel{(t-\lambda)}} \, d\mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_x(t) = \mu_x(\mathbb{R}) = \|x\|^2 =$

$= \langle x, f_\lambda(A)(A-\lambda)x \rangle$

$f_\lambda(A)(A-\lambda) = (A-\lambda) f_\lambda(A)$

$\Rightarrow f_\lambda(A)(A-\lambda) = \mathbb{1} = (A-\lambda) f_\lambda(A)$

$\Rightarrow f_\lambda(A) = (A-\lambda)^{-1}$

$\in B(H)$ perché è un calcolo funzionale di A con una boreliana limitata

$\Rightarrow$ assurdo, perché l'ipotesi era che $\lambda \in \sigma(A)$

($\Leftarrow$) per assurdo $\lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \exists (A-\lambda)^{-1} \in B(H)$

$\Rightarrow$ per il calcolo funzionale lo posso scrivere come il cf di A con la funzione $\frac{1}{t-\lambda}$ dove adesso questa funzione è continua sullo spettro perché $\lambda \notin \sigma(A)$

$\Rightarrow (A-\lambda)^{-1} = g_\lambda(A)$ con $g_\lambda(t) = \frac{1}{t-\lambda}$, $g_\lambda \in \mathcal{C}(\sigma(A))$

inoltre $\|(A-\lambda)^{-1}\| \overset{\text{isometria}}{=} \|g_\lambda\|_\infty = \sup_{t \in \sigma(A)} \frac{1}{|t-\lambda|} = dist(\lambda, \sigma(A))^{-1} < \infty$

perché $\lambda \notin \sigma(A)$, lo spettro è un insieme chiuso quindi $dist > 0$.

Sia adesso $x \in H$

$\Rightarrow \|(A-\lambda)^{-1} P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) x\| \leq$

$\leq \|(A-\lambda)^{-1}\| \, \|P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) x\| \leq dist(\lambda, \sigma(A))^{-1} \|P((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))x\|$

inoltre

$$\|(A-\lambda)^{-1}P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x\|^2 =$$
$$= \langle (A-\lambda)^{-1}P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x, (A-\lambda)^{-1}P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x\rangle$$
$$= \langle x, P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))(A-\bar\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x\rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi^2_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)}{|t-\lambda|^2}\, d\mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)}{|t-\lambda|^2}\, d\mu_x(t)$$
$$= \int_{|t-\lambda|<\varepsilon} \frac{d\mu_x(t)}{|t-\lambda|^2} > \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|t-\lambda|<\varepsilon} d\mu_x(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}} \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)\, d\mu_x(t)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\langle x, P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x\rangle = \frac{1}{\varepsilon^2}\|P((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))x\|^2$$

↑ Siccome è un proiettore $\langle x, Px\rangle = \langle x, P^2x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2$

$\Rightarrow$ combinando le due disuguaglianze

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

assurdo perché quella distanza è $< +\infty$.

(ii) ($\Rightarrow$) $\exists\, x \in H\setminus\{0\}$ t.c. $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$$
$$\vdots$$
$$A^m x = \lambda^m x \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\forall$ p polinomio allora $p(A)x = p(\lambda)x$

$\Rightarrow$ $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ $\quad f(A)x = f(\lambda)x$

↑ Weierstrass

Sia $(P_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ la famiglia spettrale di A

$$\langle x, P_\mu x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x, h_{\mu,n}(A)x\rangle \quad (h_{\mu,n} \in \mathcal{C}(\sigma(A)))$$
$$= \lim_{n\to+\infty} h_{\mu,n}(\lambda)\|x\|^2 = \chi_{(-\infty,\mu]}(\lambda)\|x\|^2 = \begin{cases}\|x\|^2 & \lambda \le \mu\\ 0 & \lambda > \mu\end{cases}$$
$$= \|x\|^2 \chi_{(\lambda,+\infty)}(\mu)$$

quindi la funzione crescente e continua a destra definita da $\langle x, P_\mu x\rangle$ è, a meno di $\|x\|^2$, $\chi_{(\lambda,+\infty)}$ e la misura di L.S. associata a questa funzione è la misura di Dirac concentrata in λ. $\Rightarrow \mu_x = \|x\|^2\delta_\lambda$

$$\Rightarrow \|P(\{\lambda\})x\|^2 = \langle x, P(\{\lambda\})x\rangle = \mu_x(\{\lambda\}) =$$
$$= \|x\|^2 \underbrace{\delta_\lambda(\{\lambda\})}_{=1} = \|x\|^2$$

Ora $P(\{\lambda\})$ è un proiettore ortogonale e quindi l'unica possibilità che il risultato della proiezione abbia la

stessa norma di x è che l'ortogonale sia nullo e quindi che x sia già nell'immagine del proiettore ($\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(\mathbb{1}-P)x\|^2$)

$\Rightarrow P(\{\lambda\})x = x$ cioè $P(\{\lambda\}) \neq 0$

($\Leftarrow$) $P(\{\lambda\}) \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in \mathrm{Im}(P(\{\lambda\}) \setminus \{0\})$

Voglio mostrare che x è autovettore di A

Osserviamo che se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.c. $\lambda \in E$

$\Rightarrow P(E) \geq P(\{\lambda\}) \Rightarrow \mathrm{Im}(P(\{\lambda\})) \subset \mathrm{Im}(P(E))$

$\Rightarrow P(E)x = x$

Se invece $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.c. $\lambda \notin E \Rightarrow E \cap \{\lambda\} = \emptyset$

$\Rightarrow P(E)x = \underbrace{P(E)P(\{\lambda\})}_{=0}x = 0$

$$\Rightarrow \mu_x(E) = \langle x, P(E)x\rangle = \begin{cases} \|x\|^2 & \lambda \in E \\ 0 & \lambda \notin E \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_x = \|x\|^2 \delta_\lambda$

$$\Rightarrow \|(A-\lambda)x\|^2 = \langle x, (A-\lambda)^2 x\rangle = \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2 \, d\mu_x(t) \overset{\mu_x = \|x\|^2\delta_\lambda}{=} = \|x\|^2(\lambda-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$$

∎

COROLLARIO

$A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $Ax_n - \lambda x_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

dim

($\Rightarrow$) Sia $\lambda \in \sigma(A)$. Per il teorema precedente, $\forall n \in \mathbb{N}$ $P((\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n})) \neq 0$, il che è equivalente a dire che, $\forall n \in \mathbb{N}$, detto $P_n := P((\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}))$, $\mathrm{Im}(P_n) \neq \{0\}$. Pertanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, y_n \neq 0 \in \mathrm{Im}(P_n)$. Ora, se $y_n \in \mathrm{Im}(P_n)$ anche $\frac{y_n}{\|y_n\|} \in \mathrm{Im}(P_n)$, poiché è un sottospazio vettoriale di H. Definiamo pertanto $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Chiaramente $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che vale anche l'altra proprietà.

$$\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = \langle (A-\lambda)x_n, (A-\lambda)x_n\rangle = \langle x_n, (A-\lambda)^2 x_n\rangle$$

$$= \langle x_n, (A-\lambda)^2 P_n x_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2 \mathbb{1}_{(\lambda-\frac{1}{n}, \lambda+\frac{1}{n})}(t) \, d\mu_{x_n}(t)$$

$$= \int_{(\lambda-\frac{1}{n}, \lambda+\frac{1}{n})} (t-\lambda)^2 \, d\mu_{x_n}(t) \leq \frac{1}{n^2} \mu_{x_n}((\lambda-\tfrac{1}{n}, \lambda+\tfrac{1}{n})) =$$

$= \frac{1}{n^2} \langle x_n, P((\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n})) x_n \rangle = \frac{1}{n^2} \|x_n\|^2 \leq \frac{1}{n^2}$

dunque $(A-\lambda) x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

($\Leftarrow$) Supponiamo $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow (A-\lambda)$ è invertibile in $B(H)$, dunque $(A-\lambda)^{-1}$ è continuo. Definiamo $y_n := (A-\lambda) x_n$. Per ipotesi $y_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, dunque $\lim_{n \to +\infty} (A-\lambda)^{-1} y_n = 0$ per continuità, ma $(A-\lambda)^{-1} y_n = x_n \Rightarrow$ assurdo, poiché $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$

OSS

Dunque in generale $\lambda \in \sigma(A)$ non è autovalore, e con questo risultato capiamo però che ogni $\lambda \in \sigma(A)$ è un autovalore approssimato.

OSS (Teorema spettrale finito-dimensionale)

$A = A^* \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \ H_\lambda = \mathbb{C}^{n_\lambda}$, $\lambda \in \sigma(A)$, n_λ = molteplicità geometrica

ed $U : H = \mathbb{C}^n \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} H_\lambda$ unitario t.c.

$(UAU^* x)_\lambda = \lambda x_\lambda \ \forall \lambda \in \sigma(A)$

dove $x \in \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} H_\lambda \Leftrightarrow x = (x_\lambda)_{\lambda \in \sigma(A)}$, $x_\lambda \in H_\lambda \ \forall \lambda \in \sigma(A)$

Vogliamo una generalizzazione al caso continuo ma prima ne facciamo uno che si avvicina ad una generalizzazione.

TEOREMA (spettrale, versione con operatori di moltiplicazione)

H separabile, $A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists$ misure $\{\mu_k\}_{k=1,\dots,N}$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) di Borel finite su $\mathbb{R}$ ed esiste

$U : H \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$ unitario tale che

$\underbrace{(UAU^* \psi)_k}_{\text{va da } \bigoplus L^2(\mathbb{R}, \mu_k) \text{ in sé stesso}}(\lambda) = \lambda \psi_k(\lambda)$ con $k = 1, \dots, N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\psi = (\psi_k)_{k=1,\dots,N} \in \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$

OSS

Dunque UAU^* è l'immagine di A nello spazio $\bigoplus L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$ che è unitariamente equivalente allo spazio di Hilbert di partenza. È in questo spazio qui A diventa l'operatore che moltiplica per λ.

Di primo acchito questa può sembrare già una buona generalizzazione al caso continuo, però, moralmente, l'analogo di H_λ finito-dimensionale dovrebbe essere (λ fissato)

$\{(\psi_k(\lambda))_{k=1,\dots,N} \mid \psi \in \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)\} = \{$lo spazio degli autovettori corrispondenti a $\lambda\}$

(e non l'addendo $L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$) che però non è un sottospazio di $\bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$ in modo naturale, infatti gli elementi di L^2 sono funzioni e $\{\psi_k(\lambda)\}_k$ sono numeri.

DEF

$x \in H$ è ciclico per $A = A^* \in B(H)$ se

$\overline{\langle A^m x \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle} = H$, dove $\langle A^m x \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$ rappresenta lo spazio vettoriale generato da $\{A^m x \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Dunque x è ciclico se le combinazioni lineari finite di potenze di A applicate ad x formano un sottospazio denso di $H \Rightarrow H$ separabile

LEMMA 1

H separabile, $A = A^* \in B(H)$ t.c. $\exists\, x \in H$ ciclico per A
$\Rightarrow \exists\, U : H \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ unitario (dove μ_x è la misura di L.S. associata al vettore x)
t.c. $(UAU^*\psi)(\lambda) = \lambda \psi(\lambda) \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

dim

Definiamo $U : \{p(A)x \mid p \text{ polinomio}\} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$
in questo modo $U p(A)x := p$

$p \in L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$:

μ_x è concentrata su $\sigma(A)$ (cioè $\mu_x(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$)

$$\Rightarrow \|p\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)} = \int_{\mathbb{R}} |p(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda) = \int_{\sigma(A)} |p(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda)$$

$$\leq \|p\|^2_\infty \, \mu_x(\sigma(A)) = \|p\|^2_\infty \, \|x\|^2 < +\infty$$

Questa che abbiamo dato è una buona definizione?
Cioè $U(\underbrace{p(A)x}_{y})$ dipende da p? Infatti y può avere un'altra scrittura del tipo $q(A)x$. Dunque bisogna verificare che se $p(A)x = q(A)x \Rightarrow p = q$ su $\sigma(A)$ q.o.

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(p-q)(A)x = 0 \Rightarrow p - q = 0 \text{ su } \sigma(A) \text{ q.o.}$$

$\Rightarrow$ basta verificare che se $p(A)x = 0 \Rightarrow p = 0$ su $\sigma(A)$ q.o.

$$\|p(A)x\|^2 = \langle p(A)x, p(A)x \rangle = \langle x, p(A)^* p(A) x \rangle$$
$$= \langle x, (\bar{p}p)(A)x \rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |p(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda) = \|p\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_x)}$$

$\Rightarrow U$ è ben definito ed inoltre abbiamo anche mostrato che è isometrico

Osserviamo inoltre che:

$\{p(A)x \mid p \text{ polinomio}\} = \langle A^m x \mid m \in \mathbb{N} \rangle \Rightarrow$ quindi è denso

$\Rightarrow U$ si estende in modo unico ad un'isometria

$U: H \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$

Voglio mostrare che U è unitario quindi devo far vedere che $\mathrm{Im}(U) = L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$

$$\mathrm{Im}(U) = \overline{\mathrm{Im}(U)} \supset \{\text{polinomi}\} \Rightarrow \mathrm{Im}(U) \supset \overline{\{\text{polinomi}\}}$$

U isometrico, immagine chiusa

$$L^2(\mathbb{R}, \mu_x) = \overline{\mathcal{C}(\sigma(A))}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, U = L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$ e U è unitario

Mostriamo infine che vale $(UAU^*\psi)(\lambda) = \lambda\psi(\lambda) \quad \forall \psi \in L^2$

Sia $\psi \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \Rightarrow U\psi(A)x = \psi \iff U^*\psi = \psi(A)x$ (Weierstrass, $i(\lambda) = \lambda$)

$$UAU^*\psi = UA\psi(A)x \overset{}{=} U i(A)\psi(A)x = U\underbrace{(i\psi)}_{\in \mathcal{C}(\sigma(A))}(A)x = i\psi$$

$\Rightarrow (UAU^*\psi)(\lambda) = \lambda\psi(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Al solito, $\mathcal{C}(\sigma(A))$ è denso in $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, dunque il risultato vale anche per $\psi \in L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Infine, poiché $\mu_x(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$, $L^2(\sigma(A), \mu_x) = L^2(\mathbb{R}, \mu_x)$. ∎

DEF

Siano H e K due spazi di Hilbert. Dirò che H e K sono unitariamente equivalenti (e lo indicherò con $H \cong K$) se $\exists\, U: H \longrightarrow K$ unitario

LEMMA 2

H separabile, $A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists \{H_k\}_{k=1,\dots,N}$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ sottospazi chiusi di H t.c.

(i) $H \cong \bigoplus_{k=1}^{N} H_k$

(ii) H_k è A-invariante (cioè $\forall x \in H_k$, $Ax \in H_k$ $\forall k = 1, \dots, N$)

(iii) $\forall k \in \{1, \dots, N\}$ $\exists\, x_k \in H_k$ ciclico per $A_k := A|_{H_k} \in B(H_k)$ (cioè $\langle A^m x_k \mid m \in \{0, 1, 2, \dots\}\rangle$ è denso in H_k)

dim

Siccome H è separabile $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione densa in H

Definiamo $H_1 := \overline{\langle A^m y_1 \mid m \in \{0, 1, 2, \dots\}\rangle}$ ssp. chiuso di H

Mostriamo che H_1 è A-invariante:

Sia $x \in H_1$, poiché H_1 è chiuso, x è limite di una qualche sua successione, che per come è definito lo spazio, sarà

un polinomio di A, per cui $\exists \{p_n\}_n$ polinomi t.c. $p_n(A)y_1 \xrightarrow{n\to+\infty} x$

$\Rightarrow Ax = \lim_{n\to+\infty} A p_n(A) y_1 \in H_1$

$A p_n(A) y_1 \in \langle A^m y_1 \mid m \in \{0,1,2,\dots\}\rangle$

Inoltre è chiaro che $x_1 := y_1$ è ciclico per $A|_{H_1}$ per definizione di H_1.

Ora se $H = H_1$ ho finito

Altrimenti sia $j = \min\{h \in \mathbb{N} \mid y_h \notin H_1\}$, e detta $P_{H_1^\perp}$ la proiezione ortogonale su $H_1^\perp$ definisco $x_2 := P_{H_1^\perp} y_j$ e sia $H_2 := \overline{\langle A^m x_2 \mid m \in \{0,1,2,\dots\}\rangle}$. In modo completamente analogo a prima, H_2 è A-invariante e x_2 è ciclico per $A|_{H_2}$. Inoltre $H_2 \subset H_1^\perp$ infatti gli elementi di H_2 sono limiti di combinazioni lineari di vettori della forma $A^m x_2$, mentre gli elementi di H_1 sono limiti di combinazioni lineari di vettori della forma $A^m y_1$, quindi se dimostro che ognuno degli $A^m y_1$ è ortogonale a ognuno degli $A^m x_2$, la stessa cosa sarà vera per i limiti. Basta allora calcolare

$\langle A^m x_1, A^m x_1\rangle = \langle x_2, \underbrace{A^{m+n} x_1}_{\in H_1}\rangle = 0 \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$
($x_2 \in H_1^\perp$)

$\Rightarrow \forall x \in H_2, y \in H_1, \langle x,y\rangle = 0$ (per densità)

Se $H = H_1 + H_2$ è finito, altrimenti iteriamo: cioè posto $j = \min\{h \in \mathbb{N} \mid y_h \notin H_1 + H_2\}$ si pone $x_3 := P_{(H_1+H_2)^\perp} y_j$ e così via...

Ora ci sono due possibilità: l'iterazione finisce dopo un numero finito di passi oppure non finisce e in tal caso si ottiene una collezione $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di sottospazi chiusi a due a due ortogonali soddisfacenti (ii) e (iii) ed inoltre $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1 + H_2 + \dots := \left\{\sum_{k=1}^{n} z_k \mid z_k \in H_k, n \in \mathbb{N}\right\}$. Siccome $\{y_n\}$ sono densi, la loro chiusura è contenuta nella chiusura di $H_1 + H_2 + \dots \Rightarrow H = \overline{\{y_n\}} = \overline{H_1 + H_2 + \dots}$.

Allora $V^* : \bigoplus_{k=1}^{+\infty} H_k \longrightarrow H$ definito da $V^* \bigoplus_{k=1}^{+\infty} z_k := \sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ è unitario, infatti:

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} z_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \langle z_k, z_j\rangle\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle z_k, z_k\rangle \quad \text{(poiché gli } H_k \text{ sono a due a due ortogonali)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k\|^2 = \left\|\bigoplus_{k=1}^{+\infty} z_k\right\|^2$$

Inoltre V^* è suriettivo poiché $\mathrm{Im}(V^*)$ è un chiuso contenente $H_1 + H_2 + \dots$, la cui chiusura coincide con $H \Rightarrow \mathrm{Im}(V^*) = H$, soddisfacendo (i).

Oss

Generalmente non esplicitiamo l'operatore unitario. Identificheremo direttamente $H = \bigoplus_{k=1}^{N} H_k \Rightarrow A\left(\bigoplus_{k=1}^{N} x_k\right) = \bigoplus_{k=1}^{N} A_k x_k$

$\left(\bigoplus_{k=1}^{N} x_k\right) \in \bigoplus_{k=1}^{N} H_k$

siccome A lascia invarianti tutti gli spazi H_k

dim (teorema spettrale)

Per il lemma 2, abbiamo una decomposizione di $H = \bigoplus_{k=1}^{N} H_k$ mentre per il lemma 1, poiché $\forall\, k = 1, \dots, N$ x_k è un vettore ciclico per A in H_k, $\exists\, U_k : H_k \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu_{x_k})$ unitario tale per cui vale la tesi, cioè $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{x_k})$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(U_k A_k U_k^* \psi)(\lambda) = \lambda \psi(\lambda)$. Ricordiamo comunque che la misura μ_{x_k} è concentrata sullo spettro di A_k, cioè l'applicazione $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{x_k}) \longrightarrow f|_{\sigma(A_k)} \in L^2(\sigma(A_k), \mu_{x_k})$ è unitaria

$\Rightarrow L^2(\sigma(A_k), \mu_{x_k}) \cong L^2(\mathbb{R}, \mu_{x_k})$

Adesso assemblo tutti questi unitari per ottenere un unico unitario da H alla somma diretta degli $L^2 \Rightarrow$

Sia $U := \bigoplus_{k=1}^{N} U_k : H \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_{x_k})$ definito da $U\left(\bigoplus_{k=1}^{N} z_k\right) = \bigoplus_{k=1}^{N} U_k z_k$ è unitario, infatti basta mostrare che è isometrico e l'immagine è densa:

- $\left\| \bigoplus_{k=1}^{N} U_k z_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \| U_k z_k \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \| z_k \|^2 = \left\| \bigoplus_{k=1}^{N} z_k \right\|^2$ (U_k unitario)
- $\mathrm{Im}(U) = \bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{Im}(U_k) = \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$

$\Rightarrow U$ è unitario

Chiaramente le misure $\{\mu_k\}_{k=1,\dots,N}$ sono proprio le misure $\{\mu_{x_k}\}_{k=1,\dots,N}$, infatti sono misure di Borel, essendo misure di Lebesgue-Stieltjes, e sono finite.

Mostriamo infine che vale la formula della tesi. Sia $\psi \in \bigoplus_{k=1}^{N} L^2$

$$\Rightarrow UAU^*\left(\bigoplus_{k=1}^{N} \psi_k\right) = UA\left(\bigoplus_{k=1}^{N} U_k^* \psi_k\right) = U\left(\bigoplus_{k=1}^{N} A_k U_k^* \psi_k\right)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N} U_k A_k U_k^* \psi_k = \bigoplus_{k=1}^{N} i\,\psi_k = i \bigoplus_{k=1}^{N} \psi_k$$

per cui preso $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\psi \in \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mu_k)$ si ha

$$(UAU^*)(\psi)(\lambda) = (i\psi)(\lambda) = i(\lambda)\,\psi(\lambda) = \lambda\,\psi(\lambda)$$

■

Avevamo già osservato che quest'ultima versione del teorema spettrale non è una vera e propria generalizzazione del caso finito dimensionale. Per farla serve una costruzione in più, cioè il cosiddetto integrale diretto di spazi di Hilbert.

DEF

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura σ-finito ($\exists \{X_n\} \subset \mathcal{M}$ t.c. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu(X_n) < +\infty$) e $(H_\lambda)_{\lambda \in X}$ con H_λ spazio di Hilbert separabile $\forall \lambda \in X$, si dice <u>campo misurabile di spazi di Hilbert</u> se, posto $n(\lambda) := \dim H_\lambda \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, $\exists$, $\forall K \in \mathbb{N}$, una funzione $e_K : X \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in X} H_\lambda$ tale che $\forall \lambda \in X$ $\{e_K(\lambda)\}_{\lambda = 1, \dots, n(\lambda)}$ è una b.o.n. di H_λ e $e_K(\lambda) = 0$ $\forall K > n(\lambda)$, ed inoltre la funzione $\lambda \in X \longmapsto \langle e_K(\lambda), e_j(\lambda) \rangle_{H_\lambda} \in \mathbb{C}$ è misurabile $\forall K, j \in \mathbb{N}$ ($\{e_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ è detto <u>campo misurabile di b.o.n</u> (questo implica che la funzione $\lambda \in X \longmapsto n(\lambda) = \sum_{K=1}^{+\infty} \| e_K(\lambda) \|^2$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, \infty\})$ del codominio).

DEF

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura σ-finito e $\{H_\lambda\}_{\lambda \in X}$ un campo misurabile di spazi di Hilbert. Una funzione $\psi : X \to \bigcup_{\lambda \in X} H_\lambda$ è detta una <u>sezione misurabile del campo misurabile $(H_\lambda)_{\lambda \in X}$</u> se:

(i) $\psi(\lambda) \in H_\lambda$ $\forall \lambda \in X$

(ii) la funzione $\lambda \in X \longmapsto \langle e_K(\lambda), \psi(\lambda) \rangle_{H_\lambda} \in \mathbb{C}$ è misurabile

DEF

Sia $\{H_\lambda\}_{\lambda \in X}$ un campo misurabile di spazi di Hilbert.

L'<u>integrale diretto</u> di $\{H_\lambda\}_{\lambda \in X}$ è lo spazio

$$\int_X^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda) := \left\{ \psi : X \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in X} H_\lambda \;\middle|\; \psi \text{ è una sezione misurabile e } \int_X \| \psi(\lambda) \|^2 \, d\mu(\lambda) < +\infty \right\}$$

L'integrale diretto dotato del prodotto scalare $\langle \psi, \varphi \rangle = \int_X \langle \psi(\lambda), \varphi(\lambda) \rangle_{H_\lambda} \, d\mu(\lambda)$ è uno spazio di Hilbert.

OSS

Se $H_\lambda = \mathbb{C}$ $\forall \lambda \in X$, l'integrale diretto si riduce a $L^2(X, \mu)$, poiché $\int_X^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda) = \{ \psi : X \longrightarrow \mathbb{C} : \psi \text{ è misurabile e } \int_X |\psi(x)|^2 d\mu(x) < +\infty \}$ che è proprio $L^2(X, \mu)$.

Scelta invece $\mu = \mu^{\#}$ abbiamo

$$\int_X \| \psi(\lambda) \|^2 \, d\mu^{\#}(\lambda) = \sum_{\lambda \in X} \| \psi(\lambda) \|^2 = \left\| \bigoplus_{\lambda \in X} \psi(\lambda) \right\|^2$$

Dunque quello è l'insieme delle funzioni esprimibili come somma diretta che è come dire $\int_X^{\oplus} H_\lambda \, d\mu^{\#}(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in X} H_\lambda$

$\Rightarrow$ l'integrale diretto generalizza $L^2(X, \mu)$ e la somma diretta.

OSS

Se $\exists \lambda_0 \in X$ t.c. $\mu(\{\lambda_0\}) > 0$ l'applicazione

$x \in H_{\lambda_0} \longmapsto \psi_x \in \int_X^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$ definita da

$$\psi_x(\lambda) := \begin{cases} 0 & \lambda \neq \lambda_0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{\mu(\{\lambda_0\})}} & \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

è isometrica, infatti:

$$\|\psi_x\|^2 = \int_X \|\psi_x(\lambda)\|^2 \, d\mu(\lambda) = \int_{\{\lambda_0\}} \frac{\|x\|^2}{\mu(\{\lambda_0\})} \, d\mu(\lambda) = \|x\|^2 \frac{\mu(\{\lambda_0\})}{\mu(\{\lambda_0\})}$$

Dunque riesco ad identificare H_{λ_0} con un sottospazio chiuso dell'integrale diretto. Moralmente H_λ è un "sottospazio generalizzato" di $\int_X^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$. e quindi in questo modo ho un analogo degli H_λ finito dimensionali.

DEF

Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e siano μ, ν due misure su $\mathcal{M}$. Dirò che ν è assolutamente continua rispetto a μ se $\forall E \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

(Indicherò $\nu \ll \mu$)

Esempio

Consideriamo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura e $h \in L^1(X, \mu)$, con $h \in L^1(X, \mu)$, $h \geq 0$, e definiamo $\nu(E) := \int_E h \, d\mu$

ν è assolutamente continua rispetto a μ ($\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E h \, d\mu = 0$)

TEOREMA (Radon-Nikodym)

Sia $(X, \mathcal{M})$ spazio misurabile e siano ν, μ due misure finite t.c. $\nu \ll \mu \Rightarrow \exists!\, h \in L^1(X, \mu)$, con $h > 0$ q.o. rispetto a ν, t.c. $\forall E \in \mathcal{M}$ $\nu(E) = \int h \, d\mu$.

(la funzione h è detta derivata di Radon-Nikodym rispetto a μ)

Inoltre questo implica che $\int_X f \, d\nu = \int_X f h \, d\mu$ $\forall f \in L^1(X, \nu)$

dim

Definiamo $\lambda := \nu + \mu$. λ è ancora una misura finita su $\mathcal{M}$, perché $\forall E \in \mathcal{M}$ $\lambda(E) = \nu(E) + \mu(E) \in [0, +\infty)$ perché ν e μ sono misure finite. Sia $\{E_n\}_n \subset \mathcal{M}$ t.c. $E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

$$\lambda\left(\bigcup_n E_n\right) = \nu\left(\bigcup_n E_n\right) + \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n) + \sum_n \nu(E_n)$$

$$= \sum_n \nu(E_n) + \mu(E_n) = \sum_n \lambda(E_n) \Rightarrow \lambda \text{ è } \sigma\text{-additiva}$$

Ora, se $f \geq 0$, $\int_X f \, d\lambda = \int_X f \, d\nu + \int_X f \, d\mu$

Prendiamo $f \in L^2(X, \lambda)$ e andiamo a considerare

$\left|\int_X f\,d\nu\right| \le \int_X |f|\,d\nu \le \int_X |f|\,d\lambda \le (\lambda(X))^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(X,\lambda)}$
↖ per Cauchy-Schwartz

Allora l'applicazione $f \in L^2(X,\lambda) \xrightarrow{(F)} \int_X f\,d\nu \in \mathbb{C}$ è limitata
$\Rightarrow$ per il teorema di Riesz
$\exists!\, g \in L^2(X,\lambda) : F(f) = \langle g, f\rangle_{L^2(X,\lambda)} = \int_X \bar{g} f\,d\lambda = \int_X \bar{g} f\,d\nu + \int_X \bar{g} f\,d\mu$
Ma $F(f) = \int_X f\,d\nu$, per cui posso riscrivere la conclusione del teorema di Riesz come $\int_X f(1-\bar{g})\,d\nu = \int_X f\bar{g}\,d\mu$

Poniamo $f = \mathbb{1}_E$, con E misurabile. Avremo allora che $\nu(E) = \int_E \bar{g}\,d\lambda$
Però avevamo detto $\lambda(E) \ge \nu(E)$, dunque $1 \ge \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \bar{g}\,d\lambda \ge 0$
Questo però non dipende dalla scelta di E in $\mathcal{M}$.
$g(x) \in [0,1]$ per $x \in E$, q.o. rispetto a λ (λ-q.o.):
g è una funzione reale λ-q.o. positiva e $\lambda(E) = \int_E d\lambda \ge \int_E g\,d\lambda$
$\Rightarrow g < 1$ λ-q.o. . Possiamo dunque supporre
$g(x) \in [0,1]$. Sia $B := \{x \in X : g(x) = 1\}$ e poniamo $f = \chi_B$
$\Rightarrow \int_B 1 - \bar{g}\,d\nu = \int_B g\,d\mu = \int_B d\mu = \mu(B)$
D'altra parte $\int_B 1 - g\,d\nu = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$. Dunque $g \in [0,1)$ μ-q.o.
Prendiamo ora $f = (1 + g + g^2 + \dots + g^n)\chi_E$ e avremo
$\int_E (1+g+\dots+g^n)(1-g)\,d\nu = \int_E g(1+g+\dots+g^n)\,d\mu$, cioè
$\int_E (1-g^{n+1})\,d\nu = \int_E g(1+g+\dots+g^n)\,d\mu$
Ora $\nu \ll \mu$, perciò $\nu(B) = 0$ e $g(x) \in [0,1)$ ν-q.o.
$\Rightarrow g^{n+1}(x) \searrow 0$ ν-q.o. $\Rightarrow$ per TCM
$\int_E (1-g^{n+1})\,d\nu \longrightarrow \int_E d\nu = \nu(E)$
D'altra parte $g(1+g+\dots+g^n) = \sum_{k=1}^{n} g^k \nearrow \sum_{k=1}^{+\infty} g^k = \frac{g}{1-g}$
$\overset{TCM}{\Rightarrow} \int_E g(1+g+\dots+g^n)\,d\mu \longrightarrow \int_E \frac{g}{1-g}\,d\mu$
Chiamiamo $h := \frac{g}{1-g}$, h è ben definita μ e ν-q.o.
$\nu(E) = \int_E h\,d\mu$. Ma questo non dipende dalla scelta di $E \in \mathcal{M}$.
Mostriamo che $h \in L^1(X,\mu) : \int_X h\,d\mu = \nu(X) < +\infty$ poiché
ν è finita $\Rightarrow h \in L^1(X,\mu)$ poiché $h \ge 0$ μ-q.o.
Inoltre, $h > 0$ ν-q.o. : detto $A := \{x \in X : h(x) = 0\}$,
$\nu(A) = \int_A h\,d\mu = 0 \Rightarrow h > 0$ ν-q.o. . Infine, h è unica poiché g è unica per il teorema di Riesz. ∎

TEOREMA (spettrale, versione con integrale diretto)
H separabile, $A = A^* \in B(H) \Rightarrow \exists\, \mu$ misura di Borel finita su $\mathbb{R}$, $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ campo misurabile di spazi di Hilbert e $U: H \longrightarrow \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$ t.c. $(UAU^*\psi)(\lambda) = \lambda\psi(\lambda)$, $\forall \psi \in \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

dim
Sia $U: H \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\sigma(A_k), \mu_k)$ come nel teorema precedente con $U = \bigoplus_{k=1}^{N} U_k$. Abbiamo tanti spazi L^2 ognuno con una misura diversa $\Rightarrow$ sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ b.o.n. di H e definiamo

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mu_{e_k}(E) \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

con μ_{e_k} la solita misura di L.S. associata all'operatore A e al vettore e_k. μ è una misura σ-additiva finita su $\mathbb{R}$:
È chiaro che è positiva, sia allora $\{E_n\}_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $E_k \cap E_j = \emptyset$ $\forall k \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mu_{e_k}\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_{e_k}(E_n)\right) =$
le serie convergono assolutamente, dunque posso scambiarle
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mu_{e_k}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) \Rightarrow$ è σ-additiva, inoltre
$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mu_{e_k}(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \|e_k\| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

$\mu_k = \mu_{x_k}$ è assolutamente continua rispetto a μ $\forall k \in \mathbb{N}$:
$\mu(E) = 0 \Rightarrow 0 = \mu_{e_k}(E) = \langle e_k, P(E) e_k \rangle = \|P(E) e_k\|^2$ $\forall k \in \mathbb{N}$
perciò se ho un operatore limitato che è zero su ogni elemento della b.o.n. $\Rightarrow P(E) = 0 \Rightarrow \mu_{x_k}(E) = \|P(E) x_k\|^2 = 0$
$\Rightarrow$ per Radon-Nikodym $\exists\, h_k \in L^1(\sigma(A_k), \mu)$ t.c. $h_k \geq 0$ e

$$\int_{\sigma(A_k)} f \, d\mu_{x_k} = \int_{\sigma(A_k)} f h_k \, d\mu \qquad \forall f \in L^1(\sigma(A_k), \mu_{x_k})$$

Definiamo $V_k: H_k \longrightarrow L^2(\sigma(A_k), \mu)$ con $V_k x := h_k^{1/2} U_k x$ $\forall x \in H_k$. V_k è unitario $\forall k \in \mathbb{N}$, infatti:

$$\|V_k x\|_2^2 = \int_{\sigma(A_k)} |U_k^2 x| h_k \, d\mu = \int_{\sigma(A_k)} |U_k^2 x| \, d\mu_k = \|U_k x\|_2^2 = \|x\|_2^2$$

inoltre $\mathrm{Im}(V_k) = h_k^{1/2} \mathrm{Im}(U_k)$, ma $\mathrm{Im}(U_k) = L^2(\sigma(A_k), \mu_k)$ e $h_k^{1/2} L^2(\sigma(A_k), \mu_k) = L^2(\sigma(A_k), \mu) \Rightarrow V_k$ è unitario
Per quanto osservato prima, possiamo pensare

$$L^2(\sigma(A_k), \mu) = \int_{\sigma(A_k)}^{\oplus} \mathbb{C} \, d\mu(\lambda)$$

ma posso vederlo anche

$$L^2(\sigma(A_k), \mu) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda^k \, d\mu(\lambda) \quad \text{con} \quad H_\lambda^k = \begin{cases} \mathbb{C} & \lambda \in \sigma(A_k) \\ \{0\} & \lambda \notin \sigma(A_k) \end{cases}$$

Vogliamo adesso mostrare che $\bigoplus_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda^k \, d\mu(\lambda)$ è un unico integrale diretto.

Definiamo $H_\lambda = \bigoplus_{k=1}^{N} H_\lambda^k$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$e_k(\lambda) = \begin{cases} (0,0,\dots,0,\underset{\uparrow k}{1},0,\dots,0) & \lambda \in \sigma(A_k) \\ 0 & \lambda \notin \sigma(A_k) \end{cases}$$

$\Rightarrow \{e_k\}_{k=1,\dots,N}$ è un campo misurabile di b.o.n. per $(H_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$: fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, H_λ è la somma diretta di m copie di $\mathbb{C}$ e questo m è il numero dei k per cui $\lambda \in \sigma(A_k)$. Nel momento in cui faccio questo, allora $\{e_k(\lambda)\}_{k=1,\dots,m}$ è proprio la base canonica di $\mathbb{C}^m$. Per cui, effettivamente, $m = n(\lambda) = \dim(H_\lambda)$ e $\{e_k(\lambda)\}_{k=1,\dots,m}$ è b.o.n. di H_λ. Ci manca solo da verificare la condizione di misurabilità, ma

$\langle e_k(\lambda), e_j(\lambda)\rangle = \delta_{jk}\, \chi_{\sigma(A_k)}(\lambda)$ che è misurabile perché $\sigma(A_k)$ è compatto.

Osserviamo allora che $\bigoplus_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda^k \, d\mu(\lambda) \cong \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$ dove l'equivalenza unitaria è definita da:

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{N} \psi_k\right) \in \bigoplus_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda^k \, d\mu(\lambda) \longmapsto \psi \in \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda)$$

dove $\psi(\lambda) := \bigoplus_{k=1}^{N} \psi_k(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

A questo punto definiamo $V := \bigoplus_{k=1}^{N} V_k : H \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{N} L^2(\sigma(A_k), \mu) \cong \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu$

Chi è l'aggiunto?

$$V^*\psi = \bigoplus_{k=1}^{N} V_k^* \psi_k = \bigoplus_{k=1}^{N} U_k^* h_k^{-1/2} \psi_k \quad \Rightarrow VV^* = V^*V = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow V$ unitario

Mostriamo infine che vale la formula della tesi:

$$VAV^*\psi = (VA)\left(\bigoplus_{k=1}^{N} V_k^* \psi_k\right) = V\left(\bigoplus_{k=1}^{N} A_k V_k^* \psi_k\right) = \bigoplus_{k=1}^{N} V_k A_k V_k^* \psi_k$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N} h^{1/2} \underbrace{U_k A_k U_k^*}_{= M_i \text{ (operatore di moltiplicazione per } i)} h_k^{-1/2} \psi_k$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N} h_k^{1/2}\, i\, h_k^{-1/2} \psi_k = \bigoplus_{k=1}^{N} i\psi_k = i\psi$$

$$\Rightarrow \forall \psi \in \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_\lambda \, d\mu(\lambda) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (VAV^*\psi)(\lambda) = (i\psi)(\lambda) = \lambda\psi(\lambda)$$

■

Giunti a questo punto vogliamo generalizzare tutta questa teoria ad operatori che siano un po' meno di limitati e autoaggiunti. Cominciamo allora con gli operatori normali.

DEF

Sia $T \in B(H)$. Dirò che T è normale se $TT^* = T^*T$

(in particolare gli operatori unitari sono normali)

Vogliamo riadattare i risultati già visti per operatori normali e tal scopo definiamo $A := \frac{1}{2}(T+T^*)$ e $B := \frac{1}{2i}(T-T^*)$ che chiamiamo, rispettivamente, parte reale di T e parte immaginaria di T $\Rightarrow$ osserviamo che:

(i) A e B sono autoaggiunti, infatti $A^* = \frac{1}{2}(T+T^*)^* = \frac{1}{2}(T^*+T) = A$

$B^* = \left[\frac{1}{2i}(T-T^*)\right]^* = -\frac{1}{2i}(T^*-T) = \frac{1}{2i}(T-T^*) = B$

(ii) $A+iB = \frac{1}{2}(T+T^*) + \frac{1}{2}(T-T^*) = T$

(iii) $AB = \frac{1}{4i}(T+T^*)(T-T^*) = \frac{1}{4i}(TT - TT^* + T^*T - T^*T^*)$

$= \frac{1}{4i}(TT + TT^* - T^*T - T^*T^*) = \frac{1}{4i}(T-T^*)(T+T^*) = BA$

La strategia quindi sarà quella di estendere il nostro gruppo di risultati a coppie di operatori autoaggiunti che commutano, dato che per ogni operatore normale posso associargli A e B con queste esatte proprietà. Ci serviranno, allora, nozioni per coppie; a cominciare da una misura di Lebesgue-Stieltjes non più su $\mathbb{R}$ ma su $\mathbb{R}^2$. Visto che in $\mathbb{R}^2$ si perde l'unidirezionalità del movimento, abbiamo bisogno di una nuova proprietà al posto della crescenza e un nuovo modo di intendere la continuità da destra. La prima è semplice, soffermiamoci quindi sulla ~~seconda~~ concetto di "limite destro". Sostanzialmente è un limite "in alto a destra", se pensiamo alla solita rappresentazion grafica di $\mathbb{R}^2$, cioè le direzioni ammissibili per tendere ad un (x_0, y_0) sono tutte quelle per cui $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$ lungo tutta la traiettoria. Diremo allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)^+} F(x,y)$ con questo significato. Possiamo dunque procedere a costruire la misura di L.S. in $\mathbb{R}^2$.

Prendiamo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ crescente, cioè tale che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono tali che $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$, risulta $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$

Vogliamo emulare la misura di Lebesgue-Stieltjes di $\mathbb{R}$, a tal scopo definiamo

$$m_F((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) := F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$$

dove quei valori sono ben definiti essendo F continua a destra. Ovviamente dovremmo definire m_F anche su tutti gli altri tipi di intervalli (che sono 16) ma è chiaro come bisogna definirli.

Chiamerò misura di Lebesgue-Stieltjes su $\mathbb{R}^2$ prodotta da F l'estensione di questa misura alla σ-algebra dei suoi misurabili, tramite il passaggio ai plurintervalli e usando il teorema di estensione di Lebesgue. m_F così costruita è una misura di Borel regolare. Che c'entra? Beh, abbiamo visto già che se ho $A = A^* \in B(H)$, posso associargli una famiglia spettrale $(P_{\lambda_1})_{\lambda_1 \in \mathbb{R}}$ e $(Q_{\lambda_2})_{\lambda_2 \in \mathbb{R}}$ e due famiglie di misure di L.S. su $\mathbb{R}$, $\{\mu_x^A\}_{x \in H}$ e $\{\mu_x^B\}_{x \in H}$. Osserviamo che se A e B commutano $\Rightarrow$ commutano pure le due famiglie ~~discrete~~ spettrali, cioè $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(h_{\lambda_1, n}(A)\, h_{\lambda_2, n}(B) \right)(x) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(h_{\lambda_2, n}(B)\, h_{\lambda_1, n}(A) \right)(x) = Q_{\lambda_2} P_{\lambda_1}(x)$$

Definiamo allora

$$F_x(\lambda_1, \lambda_2) := \langle x, P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} x \rangle \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ x \in H$$

Definisce una misura di Lebesgue-Stieltjes su $\mathbb{R}$?

Verifichiamo che F_x sia crescente e continua a destra:

(i) Siano (λ_1, λ_2) e (μ_1, μ_2) con $\lambda_1 \le \mu_1$ e $\lambda_2 \le \mu_2$, andiamo a calcolare

$$F_x(\lambda_1, \lambda_2) = \langle x, P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} x \rangle = \langle x, P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2}^2 x \rangle = \langle Q_{\lambda_2} x, P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} x \rangle$$

$$\le \langle Q_{\lambda_2} x, P_{\mu_1} Q_{\lambda_2} x \rangle = \langle x, P_{\mu_1} Q_{\lambda_2} x \rangle$$

$$= \langle x, Q_{\lambda_2} P_{\mu_1} x \rangle = \langle x, Q_{\lambda_2} P_{\mu_1}^2 x \rangle = \langle P_{\mu_1} x, Q_{\lambda_2} P_{\mu_1} x \rangle$$

$$\le \langle P_{\mu_1} x, Q_{\mu_2} P_{\mu_1} x \rangle = \langle x, Q_{\mu_2} P_{\mu_1} x \rangle = F_x(\mu_1, \mu_2)$$

cioè F è crescente.

(ii) $$\lim_{(x,y) \to (\lambda_1, \lambda_2)^+} F_x(x,y) = \lim_{(x,y) \to (\lambda_1, \lambda_2)^+} \langle x, P_x Q_y x \rangle =$$

$$\lim_{(x,y) \to (\lambda_1, \lambda_2)^+} \langle P_x x, Q_y x \rangle = \left\langle \lim_{x \to \lambda_1^+} P_x(x), \lim_{y \to \lambda_2^+} Q_y x \right\rangle =$$

$$\langle P_{\lambda_1} x, Q_{\lambda_2} x \rangle = \langle x, P_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} x \rangle = F_x(\lambda_1, \lambda_2)$$

Dunque effettivamente F_x definisce una misura di L.S. su $\mathbb{R}^2$ $\forall x \in H$. Sia $\{\mu_x\}_{x \in H}$ la famiglia di misure così prodotte. Nel caso di un singolo operatore autoaggiunto avevamo che la misura di L.S. definita da F_x era una misura di L.S. finita e in più era concentrata sullo spettro, e anche nel caso bidimensionale continua ad esser vero, infatti consideriamo $\{\lambda_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} \lambda_{1,n} = -\infty$ e, analogamente, $\{\lambda_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} \lambda_{2,n} = +\infty$. Avremo allora:

$$\mu_x(\mathbb{R}^2) = \lim_{n\to+\infty} \mu_x\left((\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}] \times (\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}]\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} F(\lambda_{2,n}, \lambda_{2,n}) - F(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}) - F(\lambda_{2,n}, \lambda_{1,n}) + F(\lambda_{1,n}, \lambda_{1,n})$$

Ora, però, se n è tale che $\lambda_{2,n} > \max\left\{\max_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda, \max_{\mu\in\sigma(B)} \mu\right\}$ e $\lambda_{1,n} < \min\left\{\min_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda, \min_{\mu\in\sigma(B)} \mu\right\}$, poiché le due famiglie spettrali $\{P_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\mathbb{R}}$ e $\{Q_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\mathbb{R}}$ sono a supporto compatto abbiamo

$F(\lambda_{2,n}, \lambda_{2,n}) = \langle x, P_{\lambda_{2,n}} Q_{\lambda_{2,n}} x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$

$F(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}) = \langle x, P_{\lambda_{1,n}} Q_{\lambda_{2,n}} x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$

$F(\lambda_{2,n}, \lambda_{1,n}) = \langle x, P_{\lambda_{2,n}} Q_{\lambda_{1,n}} x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$

$F(\lambda_{1,n}, \lambda_{1,n}) = \langle x, P_{\lambda_{1,n}} Q_{\lambda_{1,n}} x\rangle = \langle x, 0\rangle 0$

$\Rightarrow \mu_x(\mathbb{R}^2) = \|x\|^2 \Rightarrow \mu_x$ è una misura finita su $\mathbb{R}^2$.

Vediamo ora che la misura è concentrata sullo spettro. Poiché $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ sono compatti, $\sigma(A)\times\sigma(B)$ è compatto nella topologia prodotto, per cui $\mathbb{R}^2 \setminus (\sigma(A)\times\sigma(B))$ è aperto e può essere scritto come unione numerabile di quadrati aperti. Siano $\{Q_n\}_n$ con $Q_n = (a_{1,n}, b_{1,n}) \times (a_{2,n}, b_{2,n})$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Ciascuno di loro non può intersecare $\sigma(A)\times\sigma(B)$. Questo implica che i vari proiettori coincidono fuori da $\sigma(A)\times\sigma(B)$, per cui $\mu_x(Q_n) = 0$. Avremo allora che

$\mu_x(\mathbb{R}^2 \setminus (\sigma(A)\times\sigma(B))) = \mu_x\left(\bigcup_n Q_n\right) = \sum_n \mu_x(Q_n) = 0$

indipendentemente dalla scelta di $x\in H$.

A questo punto, chiaramente, ci interessa vedere come diventa il calcolo funzionale continuo. In modo analogo al caso unidimensionale, abbiamo bisogno del teorema di Weierstrass. Da adesso in poi fissiamo $Q\subseteq\mathbb{R}^2$, il più piccolo rettangolo compatto contenente $\sigma(A)\times\sigma(B)$, imitando il compatto $[a,b]$ che conteneva $\sigma(A)$ in una dimensione.

TEOREMA (Weierstrass)
I polinomi in due variabili sono densi in $(\mathcal{C}(Q), \|\cdot\|_\infty)$

dim
Possiamo supporre che $Q = [0,1]\times[0,1]$ e che data $f\in\mathcal{C}(Q)$ $f(0,y) = f(1,y) = 0$ $\forall y\in[0,1]$. Estendiamo f su $\mathbb{R}\times[0,1]$ ponendola uguale a zero per $x<0$ e $x>1 \Rightarrow f$ è unif. continua in $\mathbb{R}\times[0,1]$

Se poniamo $Q_n(x) := c_n(1-x^2)^n$, con $c_n \in \mathbb{R}$ tale che $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$, e definiamo $P_n(x,y) := \int_{-1}^{1} f(x+t,y)\,Q_n(t)\,dt$ per il teorema di Weierstrass in una dimensione, P_n è un polinomio rispetto ad x ed è tale che $\forall \varepsilon > 0$ $\|P_n(x,y) - f(x,y)\|_\infty < \varepsilon$. Il problema ora però è che $P_n(x,y)$ non è detto che sia un polinomio in y. Tuttavia

$$P_n(x,y) = \int_{-1}^{1} f(x+t,y)\,Q_n(t)\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t,y)\,Q_n(t)\,dt \overset{s=x+t}{=}$$

$$= \int_0^1 f(s,y)\,Q_n(s-x)\,ds = \int_0^1 f(s,y)\,(1-(s-x)^2)^n\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} x^k \underbrace{\left[\sum_{h=0}^{2n} c_{h,k}^{(n)} \int_0^1 f(s,y)\,s^{2n-h}\,ds\right]}_{:= c_k(y)}$$

$c_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua, infatti sia $\varepsilon > 0$ e siano $x, y \in [0,$

$$\Rightarrow |c_k(x) - c_k(y)| = \left|\sum_{m=0}^{2n} c_{m,k}^{(n)} \int_0^1 (f(s,x) - f(s,y))\,s^{2n-m}\,ds\right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{2n} c_{m,k}^{(n)} \int_0^1 |f(s,x) - f(s,y)|\,s^{2n-m}\,ds$$

ma f è unif. continua $\Rightarrow \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(s,x) - f(s,y)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |c_k(x) - c_k(y)| \leq \sum_{m=0}^{2n} c_{m,k}^{(n)} \frac{\varepsilon}{2n-m+1} \Rightarrow c_k \text{ è continua.}$$

$$\Rightarrow \exists\, q_k \text{ polinomio t.c. } \|c_k(y) - q_k(y)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \|f(x,y) - \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} q_k(y)\,x^k}_{\text{polinomio in } x \text{ e } y}\|_\infty \leq \|f(x,y) - P_n(x,y)\|_\infty + \|P_n(x,y) - \sum_{k=0}^{2n} q_k(y)\,x^k$$

$$= \underbrace{\|f(x,y) - P_n(x,y)\|_\infty}_{< \varepsilon} + \|\sum_{k=0}^{2n} c_k(y)\,x^k - \sum_{k=0}^{2n} q_k(y)\,x^k$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{\|x\|_\infty^k}_{<1}\,\underbrace{\|c_k(y) - q_k(y)\|_\infty}_{< \varepsilon/2n+1} < 2\varepsilon \qquad \forall (x,y) \in Q$$

LEMMA

$\forall$ p polinomio in due variabili $\langle x, p(A,B)\,x\rangle = \int_Q p(\lambda_1,\lambda_2)\,d\mu_x($
$\forall\, x \in H$

dim

Osserviamo innanzitutto che poiché A e B commutano rimane ben definito $p(A,B)$ come la valutazione del polinomio sulla coppia di operatori A e B.

Osserviamo inoltre che basta dimostrare la tesi per un monomio, cioè $\langle x, A^k B^h x\rangle = \int_Q \lambda_1^k \lambda_2^h\,d\mu_x(\lambda_1,\lambda_2)$, $\forall h,k \in \mathbb{N}$

La strategia sarà quella di costruire $A^k B^h$ come un opportuno limite di calcoli funzionali continui dei due operatori. Siano $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e definiamo per $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda^n_{j,\ell} := a_j + \frac{\ell}{n}(b_j - a_j) \qquad j = 1,2 \qquad \ell = 0, \dots, n$$

$$I^n_{j,\ell} := (\lambda^n_{j,\ell-1}, \lambda^n_{j,\ell}] \qquad \ell = 1, \dots, n \qquad j = 1,2$$

$$f_j^{k,n} := \sum_{\ell=1}^{n} (\lambda^n_{j,\ell})^k \chi_{I^n_{j,\ell}} \qquad j=1,2 \qquad f_j^{h,n} := \sum_{\ell=1}^{n} (\lambda^n_{j,\ell})^h \chi_{I^n_{j,\ell}} \quad j=2$$

Che sono in pratica le funzioni a gradino che approssimano, rispettivamente, x^k e y^h.

Ora, sia $\{f_1^{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ che $\{f_2^{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni in $Bor(\mathbb{R})$, inoltre entrambe sono equilimitate (rispettivamente da $|b_1|^k$ e da $|b_2|^h$) e ciascuna delle due converge puntualmente

$(f_j^{k,n}(\lambda_j) \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda_j^k \quad \forall \lambda_j \in [a_j, b_j], \forall K \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$ per il calcolo funzionale boreliano di A e B

$$f_1^{k,n}(A)x \xrightarrow{n\to+\infty} A^k x, \quad f_2^{h,n}(B)x \xrightarrow{n\to+\infty} B^h x \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \langle x, A^k B^h x\rangle = \langle A^k x, B^h x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_1^{k,n}(A)x, f_2^{h,n}(B)x\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle x, f_1^{k,n}(A) f_2^{h,n}(B) x\rangle$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda^n_{1,\ell-1})^k (\lambda^n_{2,i-1})^h \langle x, \chi_{I^n_{1,\ell}}(A) \chi_{I^n_{2,i}}(B) x\rangle \Big)$$

Ora, però, $\langle x, \chi_{I^n_{1,\ell}}(A) \chi_{I^n_{2,i}}(B) x\rangle = \langle x, (P_{\lambda^n_{1,\ell}} - P_{\lambda^n_{1,\ell-1}})(Q_{\lambda^n_{2,i}} - Q_{\lambda^n_{2,i-1}}) x\rangle$ che, per come ho definito la misura di L.S. in $\mathbb{R}^2$

$$= \mu_x(I^n_{1,\ell} \times I^n_{2,i})$$

$$\Rightarrow \langle x, A^k B^h x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda^n_{1,\ell-1})^k (\lambda^n_{2,i-1})^h \mu_x(I^n_{1,\ell} \times I^n_{2,i}) \Big) =$$

le due famiglie di funzioni sono equilimitate $\Rightarrow$ TCD

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_Q f_1^{k,n}(\lambda_1) f_2^{h,n}(\lambda_2)\, d\mu_x(\lambda_1, \lambda_2) = \int_Q \lambda_1^k \lambda_2^h \, d\mu_x(\lambda_1, \lambda_2)$$

TEOREMA (calcolo funzionale continuo congiunto)

Siano $A = A^*$, $B = B^* \in B(H)$ tali che $AB = BA \Rightarrow$

$\exists!\ \rho : C(Q) \longrightarrow B(H)$ $*$-omomorfismo contrattivo unitale
$f \longmapsto f(A,B)$ (cioè tale che $\|f(A,B)\| \le \|f\|_\infty = \sup_Q |f|$)

tale che $\forall x \in H$, risulti

$$\langle x, f(A,B)x\rangle = \int_Q f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\mu_x(\lambda_1, \lambda_2) \quad \forall x \in H$$

NOTAZ.

$$f(A,B) = \int_Q f(\lambda_1, \lambda_2)\, dP_{\lambda_1} dQ_{\lambda_2}$$

dim

Procediamo in modo molto simile al teorema del calcolo funzionale boreliano in una dimensione. Data $f \in \mathcal{C}(Q)$ definisco $S_f(x,y) := \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \bar{\omega} \int_Q f \, d\mu_{x+\omega y} \quad \forall x,y \in H$.

Se f è un polinomio, per il lemma, abbiamo

$S_f(x,y) = \langle x, f(A,B)y \rangle \quad \forall x,y \in H$ (al solito usando l'identità di polarizzazione)

$\Rightarrow S_f$ è sesquilineare per i polinomi $\Rightarrow$ per Weierstrass S_f è sesquilineare $\forall f \in \mathcal{C}(Q)$. Inoltre è limitata,

$$|S_f(x,y)| \leq \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \int_Q |f| \, d\mu_{x+\omega y} \leq \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \|f\|_\infty \mu_{x+\omega y}(Q)$$

$$= \frac{1}{4} \|f\|_\infty \sum_{\omega^4=1} \|x+\omega y\|^2 \leq \frac{1}{4} \|f\|_\infty \sum_{\omega^4=1} (\|x\|+\|y\|)^2 = 4\|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \exists!\, f(A,B) \in B(H)$ t.c. $S_f(x,y) = \langle x, f(A,B)y \rangle \quad \forall x,y \in H$

Dobbiamo mostrare che l'applicazione è uno $*$-omomorfismo, lavoriamo allora per densità, infatti:

$f \in \{\text{polinomi}\} \longmapsto f(A,B) \in B(H)$ è chiaramente uno $*$-omomorfismo $\Rightarrow$ per densità lo è anche su $\mathcal{C}(Q)$

Mostriamo allora che è contrattivo, sia $f \in \mathcal{C}(Q)$

$$\|f(A,B)\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(A,B)x\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f(A,B)x, f(A,B)x \rangle$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, |f|^2(A,B)x \rangle = \sup_{\|x\| \leq 1} \int_Q |f(\lambda_1,\lambda_2)|^2 \, d\mu_x(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 \sup_{\|x\| \leq 1} \mu_x(Q) = \|f\|_\infty^2$$

Interessiamoci ora di come si relazionano gli spettri di T e di A e B.

LEMMA

Sia $T \in B(H)$ normale e siano $A, B \in B(H)$ commutanti autoaggiunti tali che $T = A + iB \Rightarrow \sigma(T) \subseteq \sigma(A) + i\sigma(B) \subseteq \sigma(A) \times \sigma(B)$

dim

Sia $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \sigma(T)$ e supponiamo per assurdo che $\lambda \notin \sigma(A) + i\sigma(B) \Rightarrow$

$$(T-\lambda)^*(T-\lambda) = \big((A-\lambda_1) - i(B-\lambda_2)\big)\big((A-\lambda_1) + i(B-\lambda_2)\big)$$

$$= (A-\lambda_1)^2 + (B-\lambda_2)^2 \quad (\text{poiché } AB = BA)$$

Preso $x \in H$ avremo

$$\langle x, [(A-\lambda_1)^2 + (B-\lambda_2)^2] x \rangle = \int_{\sigma(A)} (t-\lambda_1)^2 \, d\mu_x^A(t) + \int_{\sigma(B)} (t-\lambda_2)^2 \, d\mu_x^B(t$$

$$\geq \underbrace{\left[\operatorname{dist}(\lambda_1, \sigma(A))^2 + \operatorname{dist}(\lambda_2, \sigma(B))^2\right]}_{\| \cdot \| \geq c} \|x\|^2$$

Ora, poiché $\lambda_1 + i\lambda_2 \notin \sigma(A) + i\sigma(B)$, almeno uno dei due non sta nel relativo spettro ($\lambda_1 \notin \sigma(A)$ opp. $\lambda_2 \notin \sigma(B)$), e siccome gli spettri sono compatti, $c > 0$. Dunque

$$(A-\lambda_1)^2 + (B-\lambda_2)^2 - c\mathbb{1} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sigma\left((A-\lambda_1)^2 + (B-\lambda_2)^2\right) \subseteq [c, +\infty) \Rightarrow 0 \notin \sigma\left((T-\lambda)^*(T-\lambda)\right)$$

$\Rightarrow (T-\lambda)^*(T-\lambda)$ è invertibile

$$\Rightarrow \begin{cases} (T-\lambda)\left[(T^*-\bar{\lambda})\left[(T^*-\bar{\lambda})(T-\lambda)\right]^{-1}\right] = \mathbb{1} \\ \left[\left[(T^*-\bar{\lambda})(T-\lambda)\right]^{-1}(T^*-\bar{\lambda})\right](T-\lambda) = \mathbb{1} \end{cases} \Rightarrow \exists\, (T-\lambda)^{-1} \in B(H)$$

assurdo poiché $\lambda \in \sigma(T)$

■

<u>OSS</u>

Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \supset \sigma(A) \times \sigma(B) \supset \sigma(T)$

Data $f \in \mathcal{C}(Q)$ definiamo $f(T) := f(A,B)$, se $T = A + iB$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}(Q) \longmapsto f(T) \in B(H)$ è uno $*$-omomorfismo contrattivo.

<u>TEOREMA</u> (Calcolo funzionale boreliano)

Sia $T \in B(H)$ normale $\Rightarrow \exists!\ \tilde{\rho} : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2) \to B(H)$ $*$-omomorfismo unitale e contrattivo che estende il calcolo funzionale continuo di T ed è tale che $\forall \{f_n\}_n \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ equilimitata e $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ puntualmente su $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow f_n(T)x \xrightarrow{n\to+\infty} f(T)x \quad \forall x \in H$

<u>TEOREMA</u> (spettrale)

Sia $T \in B(H)$ normale $\Rightarrow \exists!$ misura spettrale $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to B(H)$ tale che $\forall f \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2)$ $\langle x, f(T)x\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\mu_x(\lambda_1, \lambda_2)$ dove $\mu_x(E) = \langle x, P(E)x\rangle$ $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $x \in H$ è la misura di L.S. su $\mathbb{R}^2$ associata alle parti reale ed immaginaria di T.

Giunti a questo punto facciamo una introduzione al linguaggio delle C^*-algebre.

<u>DEF</u>

Una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio di Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ dotata di un prodotto bilineare e associativo

$(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longmapsto ab \in \mathcal{A}$ e di un involuzione
$a \in \mathcal{A} \longmapsto a^* \in \mathcal{A}$ $(a^{**} = a)$ antilineare $((\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*)$
e antimoltiplicativa $((ab)^* = b^* a^*)$, tali che
$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, $\|a^*\| = \|a\|$ e $\|a^* a\| = \|a\|^2$ (identità C^*)
(richiediamo quindi che le operazioni algebriche siano compatibili con la norma)

Esempi
(i) Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{A} \subset B(H)$ una $*$-sottoalgebra (cioé $\forall T, S \in \mathcal{A}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha T + \beta S \in \mathcal{A}$, $TS \in \mathcal{A}$ e $T^* \in \mathcal{A}$) chiusa in norma $\Rightarrow \mathcal{A}$ é una C^*-algebra non commutativa. Inoltre se $\mathbb{1}_H \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ha unitá
$(\mathbb{1}_H \cdot T = T \cdot \mathbb{1}_H = T \quad \forall T \in \mathcal{A})$

(ii) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $\mathcal{A} := (\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ é una C^*-algebra commutativa con il prodotto $(fg)(x) := f(x) g(x)$ e l'involuzione $f^*(x) := \overline{f(x)}$ con $f, g \in \mathcal{A}$, $x \in X$.
Mostriamo che tali operazioni siano compatibili con $\|\cdot\|_\infty$:
- $|f(x) g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ per cui $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$
- $\|f^*\|_\infty = \sup_{x \in X} |\overline{f(x)}| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty$
- $\|f^* f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\overline{f(x)} f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)|^2 = \|f\|_\infty^2$

Infine $\mathcal{C}(X)$ ha unitá $\mathbb{1}_X(x) = 1 \quad \forall x \in X$

La cosa simpatica é che questo esempio non é riduttivo. Infatti ogni C^*-algebra é isomorfa (tramite uno $*$-isomorfismo isometrico) o ad una qualche $*$-sottoalgebra chiusa di qualche $B(H)$ se non é commutativa, mentre é isomorfa a un qualche $\mathcal{C}(X)$, con X un opportuno spazio topologico compatto, se é commutativa.

DEF
Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra. L'insieme $X := \{\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \omega$ lineare, moltiplicativa, non nulla$\}$ é detto insieme dei caratteri di $\mathcal{A}$.

Vale il seguente risultato, che non dimostriamo
LEMMA
Sia $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un carattere $\Rightarrow \omega$ é continuo

TEOREMA (isomorfismo di Gelfand)
Sia A una C^*-algebra commutativa con unità $\Rightarrow \exists\, X$ spazio topologico compatto e di Hausdorff ed $\exists$ uno $*$-isomorfismo isometrico $\hat{\ }: A \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ (cioè lineare, moltiplicativo, che preserva lo $*$, isometrico e suriettivo)

idea della dim
Diciamo giusto chi è X e come è fatto l'isomorfismo. Scegliamo come X i caratteri di A e ci mettiamo sopra la topologia della convergenza forte, cioè quella per cui dico che $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $\omega \in X$ se $\forall a \in A$ $\lim_{n\to+\infty} \omega_n(a) = \omega(a)$. Così facendo, X è uno spazio compatto di Hausdorff e l'isomorfismo cercato è $\hat{a}(\omega) := \omega(a)$

$$\begin{aligned} \hat{\ }: A &\longrightarrow \mathcal{C}(X) \\ a &\longmapsto \hat{a} : X \longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \omega(a) \end{aligned}$$

Detta trasformata di Gelfand

Esempio
Sia H uno spazio di Hilbert e $A = A^* \in B(H)$ e prendiamo $\mathcal{A} = \langle A^n \mid n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\rangle = \{p(A) \mid p \text{ polinomio}\} \subset B(H)$.
$\mathcal{A}$ è una $*$-sottoalgebra chiusa di $B(H)$, dunque è una C^*-algebra unitaria, poiché c'è pure $A^0 = \mathbb{1}$. Ora, se considero il calcolo funzionale continuo di A, esso ha immagine proprio in $\mathcal{A}$ ($f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \longmapsto f(A) \in \mathcal{A}$) per cui sapevamo già che era uno $*$-omomorfismo isometrico. È pure suriettivo poiché $\mathrm{Im}(\rho)$ contiene i polinomi in A ed è chiuso poiché ρ è isometrico $\Rightarrow$ contiene la chiusura dei polinomi, dunque contiene tutto $\mathcal{A}$.
In sostanza, il calcolo funzionale continuo è una specie di inverso dell'isomorfismo di Gelfand, anzi è proprio l'inverso. Mostriamo che possiamo mettere in biezione $\sigma(A)$ con X, i caratteri di $\mathcal{A}$. Consideriamo

$$\begin{aligned} \psi : \sigma(A) &\longrightarrow X \\ \lambda &\longmapsto \omega_\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \qquad f(A) \longmapsto f(\lambda) \end{aligned}$$

Mostriamo ora che ω_λ è un carattere:
- lineare: $\forall \lambda \in \sigma(A)$ poiché il calcolo funzionale continuo è lineare abbiamo $\omega_\lambda(\alpha f(A) + \beta g(A)) = \alpha\, \omega_\lambda(f(A)) + \beta\, \omega_\lambda(g(A))$

• moltiplicativo: poiché il cfc è moltiplicativo abbiamo

$$\omega_\lambda(f(A)\,g(A)) = \omega_\lambda((fg)(A)) = fg(\lambda) = f(\lambda)\,g(\lambda) =$$

$$= \omega_\lambda(f(A))\,\omega_\lambda(g(A))$$

• Chiaramente $\omega_\lambda \not\equiv 0$ su $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \omega_\lambda$ è un carattere $\forall \lambda \in \sigma(A)$

Mostriamo che ψ è iniettiva:

Supp. $\omega_{\lambda_1} = \omega_{\lambda_2}$, cioè che $\omega_{\lambda_1}(f(A)) = \omega_{\lambda_2}(f(A))$ $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, cioè che $f(\lambda_1) = f(\lambda_2)$ $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$. Ma in $\mathcal{C}(\sigma(A))$ c'è anche $i \Rightarrow \lambda_1 = i(\lambda_1) = i(\lambda_2) = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Inoltre ψ è suriettiva:

Prendiamo $\omega \in X$ e definiamo $\lambda := \omega(A) \in \mathbb{C}$ (siccome A è il calcolo funzionale continuo di $f(x) = x$, λ è ben definito).

Supponiamo ora per assurdo che $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow \exists\, (A-\lambda)^{-1} \in \mathcal{A}$.

Osserviamo che $\omega(\mathbb{1}) = 1$, infatti siccome ω è moltiplicativo $\omega(f(A)) = \omega(\mathbb{1}\, f(A)) = \omega(\mathbb{1})\,\omega(f(A))$ $\forall f(A) \in \mathcal{A} \Rightarrow \omega(\mathbb{1}) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \omega(\mathbb{1}) = \omega((A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)) = \omega((A-\lambda)^{-1})\,\omega((A-\lambda))$$

$$= \omega((A-\lambda)^{-1})\,(\omega(A)-\lambda) = 0$$ poiché $\omega(A) = \lambda \Rightarrow$ assurdo

Mostriamo infine che $\omega \equiv \omega_\lambda$. Sia $p(A) \in \mathcal{A}$, avremo

$$\omega(p(A)) = \omega\left(\sum_{k=0}^{n} c_k A^k\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \omega(A)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k = p(\lambda)$$

ma $p(\lambda) = \omega_\lambda(p(A))$, dunque $\omega \equiv \omega_\lambda$ sui polinomi $\Rightarrow$ $\omega \equiv \omega_\lambda$ su $\mathcal{A}$ per densità poiché i caratteri sono continui $\Rightarrow$ ψ è anche suriettiva. Dunque abbiamo che

$\widehat{f(A)}(\omega_\lambda) = \omega_\lambda(f(A)) = f(\lambda)$ $\quad [f \equiv \widehat{f(A)}\,\psi]$

ma ω_λ e λ si identificano, per cui $\widehat{f(A)}$ si identifica con f

$\Rightarrow$ il cfc è l'inversa dell'isomorfismo di Gelfand.

DEF

Una rappresentazione di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è uno $*$-omomorfismo $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H_\pi)$, con H_π uno spazio di Hilbert. (si dimostra col teorema di isomorfismo di Gelfand che un siffatto $*$-omomorfismo è automaticamente contrattivo: $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$)

DEF

Un vettore $x \in H_\pi$ si dice ciclico per π se $\pi(\mathcal{A})x = \{\pi(a)x \mid a \in \mathcal{A}\}$ è denso in H_π

DEF

Siano $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow B(H_{\pi_1})$ e $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow B(H_{\pi_2})$ due rappresentazioni di $\mathcal{A}$. Dirò che π_1 e π_2 sono unitariamente equivalenti se $\exists\, U : H_{\pi_1} \longrightarrow H_{\pi_2}$ unitario tale che $U \pi_1(a) U^* = \pi_2(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$ $(\pi_1 \cong \pi_2)$

DEF

Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra unitaria. Uno stato di $\mathcal{A}$ è un funzionale lineare $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ che sia positivo (cioè $\omega(a^*a) \geq 0$ $\forall a \in \mathcal{A}$) e normalizzato (cioè $\omega(\mathbb{1}) = 1$)

Esempi

(i) Prendiamo $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$, con X spazio compatto, μ una misura di Borel regolare tale che $\mu(X) = 1$ e definiamo $\omega_\mu(f) := \int_X f \, d\mu$. ω_μ è uno stato di $\mathcal{A}$, infatti:
$\omega_\mu(f^*f) = \int_X \bar{f} f \, d\mu = \int_X |f|^2 d\mu \geq 0$ e chiaramente è lineare essendo lineare l'integrale. Inoltre $\omega_\mu(\mathbb{1}) = \int_X d\mu = 1$
La cosa bella è che c'è un teorema (Riesz-Markov) che dice che dato un funzionale lineare positivo sull'algebra delle funzioni continue su uno spazio compatto, esso è rappresentato da una misura.

(ii) Prendiamo $\mathcal{A}$ una C^*-algebra unitaria e $\pi : \mathcal{A} \to B(H_\pi)$ una sua rappresentazione t.c. $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e sia $x \in H_\pi$ con $\|x\| = 1$. Definiamo $\omega_x(a) := \langle x, \pi(a) x \rangle$ $\forall a \in \mathcal{A}$. ω_x è detto lo stato vettoriale indotto da x, quindi è uno stato: ω_x è lineare, essendo il prodotto scalare, inoltre $\omega_x(a^*a) = \langle x, \pi(a^*a)x \rangle = \langle x, \pi(a)^*\pi(a)x \rangle$
$= \langle \pi(a)x, \pi(a)x \rangle = \|\pi(a)x\|^2 \geq 0$ $\forall a \in \mathcal{A}$
$\omega_x(\mathbb{1}) = \langle x, \pi(\mathbb{1})x \rangle = \|x\|^2 = 1$

TEOREMA (Gelfand-Naimark-Segal)

Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra unitaria, ω uno stato di $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists\, \pi_\omega : \mathcal{A} \to B(H_\omega)$ una rappresentazione e x_ω un vettore ciclico per π_ω tale che $\omega(a) = \langle x_\omega, \pi_\omega(a) x_\omega \rangle$ $\forall a \in \mathcal{A}$. (π_ω, x_ω) è detta la rappresentazione GNS indotta da ω ed è unica a meno di equivalenza unitaria, cioè se $(\pi_{\omega'}, x_{\omega'})$ pure soddisfa la tesi $\Rightarrow \exists\, U : H_\omega \to H_{\omega'}$ unitario t.c. $U \pi_\omega(a) U^* = \pi_{\omega'}(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$ e $U x_\omega = x_{\omega'}$

idea della dim

Definiamo $\langle a,b\rangle := \omega(a^*b)$ con $a,b \in \mathcal{A}$. Essa è una forma hermitiana su $\mathcal{A}$ (poiché ω è lineare e $\omega(a^*a) \geq 0$). Voglio però un prodotto scalare, mi serve quindi che $\omega(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0$. In generale $N_\omega = \{a \in \mathcal{A} \mid \omega(a^*a) = 0\} \neq \{0\}$, allora considero il quoziente $\mathcal{A}/N_\omega$, costruito identificando due elementi a e b se $a - b \in N_\omega$. Quindi $\mathcal{A}/N_\omega = \{a + N_\omega \mid a \in \mathcal{A}\}$ dove $a + N_\omega = \{a + b \mid b \in N_\omega\}$.

Definiamo allora $\langle a + N_\omega, b + N_\omega\rangle := \omega(a^*b)$ e questo adesso è un prodotto scalare: $0 = \langle a + N_\omega, a + N_\omega\rangle = \omega(a^*a) \Rightarrow a \in N_\omega \Rightarrow a + N_\omega$ è l'elemento nullo di $\mathcal{A}/N_\omega$.

$\Rightarrow$ in questo modo ho ottenuto uno spazio prehilbertiano. Quindi lo completo "aggiungendo" tutti i limiti delle sue successioni di Cauchy e sia H_ω è il "completamento" di $\mathcal{A}/N_\omega$. A questo punto possiamo definire la rappresentazione e il vettore ciclico:

$$\pi_\omega(a)(b + N_\omega) := ab + N_\omega \qquad x_\omega = \mathbb{1} + N_\omega$$

Esempio

Prendiamo $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ e lo stato $\omega = \omega_\mu$ come nell'esempio precedente. Qual è la rappresentazione GNS di ω_μ?

Prendo come $H_\omega := L^2(X,\mu)$ e come $x_\omega = \mathbb{1}_X$. La rappresentazione sarà

$$\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow B(H_\omega)$$
$$f \longmapsto M_f \quad \text{con } M_f \text{ l'operatore di moltiplicazione}$$

Vediamo se vale la formula della tesi del teorema. Sia $f \in \mathcal{A}$

$$\langle x_\omega, \pi_\omega(f) x_\omega\rangle = \langle \mathbb{1}, M_f \mathbb{1}\rangle = \langle \mathbb{1}, f\rangle = \int_X f \, d\mu = \omega(f)$$

Inoltre x_ω è ciclico, infatti:

$\pi_\omega(\mathcal{C}(X)) x_\omega = \{M_f \mathbb{1} \mid f \in \mathcal{C}(X)\} = \mathcal{C}(X)$ che è denso in $L^2(X,\mu)$

Tra tutti gli stati ce ne sono alcuni un pochino particolari

DEF

Siano ω_1 e ω_2 due stati su $\mathcal{A}$ e $\alpha \in [0,1]$.

$\omega := \alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2$ è un nuovo stato su $\mathcal{A}$, detto combinazione convessa di ω_1 e ω_2

DEF

Uno stato ω su $\mathcal{A}$ è detto puro se non può essere espresso come combinazione lineare convessa non banale (cioè per $\alpha \neq 0,1$)

Esempio

(a) Sia $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$, $\omega = \omega_\mu$ è puro $\iff \mu = \delta_x$, per qualche $x \in X$ con δ_x la misura di Dirac. L'idea è quella di prendere due misurabili X_1 e X_2 tali che $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ e $\mu(X_1) > 0$, $\mu(X_2) > 0$ e definiamo due nuove misure

$$\mu_j(E) := \frac{\mu(E \cap X_j)}{\mu(X_j)} \quad \text{per } j = 1,2 \quad \text{e} \quad \forall E \in \mathcal{B}(X)$$

avremo allora $\omega(f) = \int_X f \, d\mu = \int_{X_1} f \, d\mu + \int_{X_2} f \, d\mu =$

$$= \mu(X_1) \int_X f \, d\mu_1 + \mu(X_2) \int_X f \, d\mu_2$$

$$= \mu(X_1)\, \omega_{\mu_1}(f) + \mu(X_2)\, \omega_{\mu_2}(f)$$

Dunque se una misura ha questa proprietà, allora lo stato associato non è mai puro. Osserviamo quindi che per avere uno stato puro dovrò per forza avere un insieme il cui complementare ha misura nulla e, a questo punto, si vede pure che allora c'è solo un punto con misura positiva, per cui la misura è quella di Dirac.

(b) Se $H = H_1 \oplus H_2$, con H_1, H_2 spazi di Hilbert e prendiamo $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H_1) \oplus \mathcal{B}(H_2)$, cioè un operatore $A \in \mathcal{A} \iff$ $\exists A_j \in \mathcal{B}(H_j)$ $(j = 1,2)$ tale che, preso $x_1 \oplus x_2 \in H_1 \oplus H_2$, $A(x_1 \oplus x_2) = A_1 x_1 \oplus A_2 x_2$.

Prendiamo $x_j \in H_j$ con $\|x_j\| = 1$ e definiamo $x := \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \oplus x_2) \in H$; avremo $\|x\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|x_1 \oplus x_2\| = 1$

$\Rightarrow$ lo stato $\omega_x(A) := \langle x, Ax \rangle$ non è puro, infatti:

$$\omega_x(A) = \frac{1}{2} \langle x_1 \oplus x_2, A(x_1 \oplus x_2) \rangle = \frac{1}{2} \langle x_1 \oplus x_2, A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left[\langle x_1, A_1 x_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, A_2 x_2 \rangle_{H_2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\langle x_1 \oplus 0, A(x_1 \oplus 0) \rangle + \langle 0 \oplus x_2, A(0 \oplus x_2) \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2} \omega_{x_1 \oplus 0}(A) + \frac{1}{2} \omega_{0 \oplus x_2}(A)$$

A questo punto ci chiediamo quali siano le rappresentazioni associate agli stati puri.

DEF
Sia $\pi: \mathcal{A} \to B(H_\pi)$ una rappresentazione di $\mathcal{A}$, $K \subset H_\pi$ un sottospazio chiuso. Dirò che K è invariante per π se $\forall a \in \mathcal{A}$, $x \in K$ $\pi(a)x \in K$

OSS
Se K è invariante, pure $K^\perp$ è invariante per π, infatti, se $x \in K^\perp$ e $y \in K$
$\langle \pi(a)x, y \rangle = \langle x, \pi(a)^* y \rangle = \langle x, \pi(a^*) y \rangle = 0$ poiché K era π-invariante $\Rightarrow \pi(a)x \in K^\perp \Rightarrow K^\perp$ è invariante.
Possiamo allora definire, se K è invariante, $\pi_K(a) := \pi(a)|_K$ e $\pi_{K^\perp}(a) := \pi(a)|_{K^\perp}$ $\forall a \in \mathcal{A}$. Per l'invarianza avremo $\pi_K(a) \in B(K)$ e $\pi_{K^\perp}(a) \in B(K^\perp)$.
Possiamo scrivere $H_\pi = K \oplus K^\perp$, dunque ci ritroviamo come nell'esempio precedente, per cui $\forall a \in \mathcal{A}$, $\pi(a) = \pi_K(a) \oplus \pi_{K^\perp}(a)$.

DEF
Una rappresentazione π è detta irriducibile se non ammette sottospazi invarianti non banali (cioè diversi da $\{0\}$ e tutto H_π)

LEMMA (Schur)
Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra e π una rappresentazione.
π è irriducibile $\Leftrightarrow \pi(\mathcal{A})' = \{T \in B(H_\pi) \mid T\pi(a) = \pi(a)T \ \forall a \in \mathcal{A}\} = \mathbb{C}\mathbb{1}$, cioè $\pi(\mathcal{A})'$, detto il commutante di π consiste solo dei multipli dell'identità.
idea della dim
Si parte col constatare che K è invariante $\Leftrightarrow P_K \in \pi(\mathcal{A})'$ con P_K il suo proiettore ortogonale. Dopodiché prendiamo $A \in \pi(\mathcal{A})'$ autoaggiunto $\Rightarrow \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(E) \in \pi(\mathcal{A})'$, con P la misura spettrale corrispondente ad A, infatti siccome A è autoaggiunto $\Rightarrow$ ha la sua misura spettrale associata e siccome il commutante è una C^*-algebra, tutte le funzioni continue di A appartengono ancora al commutante; tuttavia non è solo una C^*-algebra, è un algebra di Von Neumann, cioè una C^*-algebra che è chiusa rispetto la topologia forte.
Infine si mostra che π è irriducibile $\Leftrightarrow \forall A = A^* \in \pi(\mathcal{A})'$, i suoi proiettori spettrali sono 0 e $\mathbb{1}$ $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ma per il teorema spettrale questo avviene $\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}\mathbb{1}$.

TEOREMA

Uno stato ω è puro $\Leftrightarrow$ la rappresentazione GNS π_ω è irriducibile

Esempio

Prendiamo $\mathcal{A} = B(H)$, con H spazio di Hilbert e $x \in H : \|x\|=1$ $\Rightarrow x$ è chiaramente un vettore ciclico se prendo come rappresentazione l'identità $\pi : B(H) \longrightarrow B(H)$, $A \longmapsto A$ e $B(H)x = H$, dunque senz'altro denso.
Per cui la rappresentazione GNS di ω_x è $\pi_{\omega_x}(A) = A$ $\forall A \in B(H)$. D'altra parte $B(H)' = \mathbb{C}\mathbb{1}$, per cui π è irriducibile per il lemma di Schur e, per il teorema precedente, ω_x è puro.

OSS

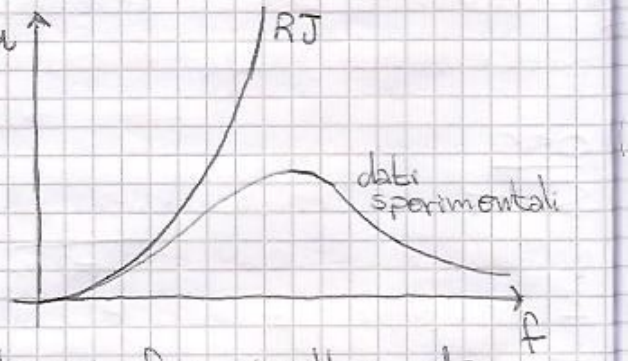
Se π è irriducibile, allora ogni $x \in H_\pi \setminus \{0\}$ è ciclico, infatti l'insieme $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è π-invariante, poiché se $x_0 \in \pi(\mathcal{A})x$, $\exists\, b \in \mathcal{A}$ con $x_0 = \pi(b)x$ e quindi $\forall a \in \mathcal{A}$ $\pi(a)x_0 = \pi(a)(\pi(b)x) = \pi(ab)x$ e $ab \in \mathcal{A}$, dunque $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è π-invariante e non è composto solo da $\{0\}$ $\Rightarrow$ poiché π è irriducibile $\overline{\pi(\mathcal{A})x} = H_\pi \Rightarrow x$ è ciclico.

Adesso vogliamo cominciare a vedere come applicare tutte queste cose alla meccanica quantistica. Prima, però, cerchiamo di capire un minimo che cosa sia questa teoria.
Alcuni esperimenti, agli inizi del '900, avevano evidenziato come a livello atomico e subatomico saltassero fuori conclusioni diverse da quelle che si potevano trarre usando la meccanica Newtoniana e l'elettromagnetismo di Maxwell.
Il primo è stato la cosidoletta radiazione di corpo nero. Cos'è un corpo nero? È un corpo che, colpito da una radiazione, la assorbe per intero. Facendolo, si scalda, riemettendo a sua volta una radiazione. Si voleva capire un pochino come fosse fatta questa radiazione. Si considera una scatola con pareti a temperatura T, isolata termicamente e ci si chiede quanto valga la densità di energia per unità di frequenza della radiazione nella scatola, sia esso

$u(f,T)$. Questo si può fare usando onde stazionarie del campo elettromagnetico, che sono nulle sui bordi della scatola, contandole e calcolando l'energia media. Il numero di moti normali, per unità di frequenza, si può calcolare con considerazioni geometriche e risulta $N(f) = \frac{8\pi}{c^3} f^2$. L'energia media del moto a frequenza f si può calcolare usando l'interpretazione statistica di Boltzmann con

$$\mathcal{E}(E(f,T)) = \frac{\int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{kT}} dE} = kT$$

per cui $u(f,T) = \frac{8\pi}{c^3} f^2 kT$, detta legge di Rayleigh-Jeans Tuttavia con i dati sperimentali si osservava una curva diversa da quella prevista.



Inoltre, l'energia totale nella scatola dovrebbe essere $E_{tot} = \int_0^{+\infty} u(f,T)\,df = +\infty$, che è totalmente assurdo, tanto da meritarsi l'appellativo di catastrofe ultravioletta. Il problema fu risolto da Max Planck. Egli capì che bisognava abbandonare l'idea che le energie avessero tutti i valori possibili, ma che assumessero solo multipli interi di una certa costante nuova, la costante di Planck h. Se uno assume questa ipotesi, il calcolo dell'energia media è

$$\mathcal{E}(E(f,T)) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot hf\, e^{-\frac{nhf}{kT}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{nhf}{kT}}} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

, per cui la nuova formula per la densità dell'energia è $u(f,T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{hf^3}{e^{hf/kT} - 1}$

e, se $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s, questa curva riproduce i dati sperimentali. Per piccole f, poiché $e^x - 1 \sim x$, troviamo proprio la formula prevista con la teoria precedente. Ora, h è un numero minuscolo. Che implicazioni ha questo? Se f è non troppo grande, i vari "livelli" di energia sono molto vicini, a tal punto che sembrano essere un continuo. Se, invece, f è abbastanza grande, questa natura discreta emerge.

Il secondo esperimento è stato l'effetto fotoelettrico.

Consiste nell'emissione di elettroni da un metallo che viene irradiato con radiazioni ultraviolette. Hertz fece delle osservazioni e trovó che c'é una certa frequenza f_0 per cui se $f < f_0$ non c'é alcuna emissione di elettroni (f_0 dipende dal metallo). Trovó inoltre che il numero di elettroni emessi é proporzionale all'intensitá della radiazione ma non alla frequenza. L'energia degli elettroni emessi, peró, é proporzionale alla frequenza ma non all'intensitá.
Secondo Maxwell, peró, l'energia della radiazione dipende dall'intensitá e non dalla frequenza. La spiegazione fu data da Einstein: riprese in mano l'ipotesi di Planck, sostituendo che la radiazione stessa é "composta" da particelle, ciascuna con energia hf, se f é la frequenza della radiazione.
Queste particelle furono battezzate in seguito fotoni e il loro numero é proporzionale all'intensitá della radiazione. Questo spiega le osservazioni di Hertz: gli elettroni sono legati con energia hf_0 al metallo, quando la radiazione colpisce il metallo, il fotone da energia hf all'elettrone, che, se $f < f_0$, non basta a muovere l'elettrone. Se, invece, $f \geq f_0$, l'elettrone si svincola e ne vengono estratti in numero proporzionale ai fotoni, che sono proporzionali all'intensitá. L'energia cinetica dell'elettrone verrá dall'energia del fotone che l'ha colpito, e sará $E_k = hf - hf_0$, se f é la frequenza della radiazione incidente, spiegando perché l'energia é proporzionale alla frequenza e non all'intensitá.
Quasi contemporaneamente, viene rilevato un altro fenomeno, l'effetto compton. Usando radiazioni oltre l'ultravioletto (raggi x o γ), il metallo emetteva non solo elettroni, ma anche una radiazione secondaria con frequenza $f' < f$, la frequenza incidente. Questo si riesce a spiegare aggiungendo che i fotoni abbiano quantitá di moto $\frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$, con λ la lunghezza d'onda della radiazione incidente.
Questi esperimenti evidenziarono che la luce avera una natura corpuscolare, ipotesi abbandonata in passato visto che le equazioni di Maxwell prevedono che sia un'onda. Peró non erano due interpretazioni esclusive, visto che continuano

a presentarsi effetti sia dell' uno che dell' altro.
Questi non erano gli unici problemi, c'era da capire anche la struttura atomica. Rutherford aveva fatto degli esperimenti, deducendo che il modello più realistico è quello di un atomo in cui c'è un nucleo, nel quale è concentrata praticamente tutta la massa dell' atomo ~~[illegible]~~, e gli elettroni che gli orbitano intorno grazie al potenziale coulombiano, che, siccome è dello stesso tipo di quello gravitazionale, imita in buona misura quello che fanno i pianeti con il Sole. Il modello, però ha dei problemi: gli elettroni dovrebbero emettere radiazioni, dal momento che si muovono accelerando attorno al nucleo, con frequenza $f = \frac{1}{T}$, dove T è il periodo. Il periodo, però, è arbitrario, dunque dovrebbe esserlo pure la frequenza, osservando una distribuzione continua della radiazione. Sperimentalmente, però, l'atomo emette radiazioni a frequenze discrete, che per atomi semplici si poteva scrivere $f = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, con $m, n \in \mathbb{N}$ e R è una costante opportuna.
Il secondo problema, più grave, è che l'elettrone, irradiando, perde energia, dunque l'orbita si stringe attorno, finendo per collassare sul nucleo in un periodo dell' ordine di 10^{-10} secondi, che significa che non dovrebbe esistere niente. La soluzione fu proposta da Bohr, ipotizzando che l'elettrone non può avere energia qualunque, ma solo energie discrete E_n, $n \in \mathbb{N}$, detti stati stazionari, e che, emettendo o assorbendo un fotone, l'elettrone passi da uno stato stazionario all' altro. Il fotone avrà l'energia che serve (o che manca) per passare da uno stato all' altro e avrà, pertanto, frequenza $f = h^{-1}|E_n - E_m|$. Un' altra ipotesi che Bohr pone è che le orbite siano circolari e che il momento angolare dell' elettrone è un multiplo di $\hbar := \frac{h}{2\pi}$.
Vediamo il caso dell'atomo di idrogeno: il nucleo ha un solo protone, di carica $+e$, e un elettrone di carica $-e$. Per cui il momento angolare è $L = mvr$, l'energia $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}$ e la forza di Coulomb deve pareggiare la centripeta, per cui $F = \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ ottenendo $r = \frac{e^2}{mv^2}$, perciò $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}mv^2$ e $L = \frac{e^2}{v}$

$\Rightarrow E = -\frac{me^4}{2L^2}$. Ma l'ipotesi di Bohr era $L = n\hbar$

$\Rightarrow E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$, facendo tornare la forma delle frequenze emesse.

Siccome l'elettrone non può stare in posti diversi dagli stati stazionari, non decade sul nucleo, ma può arrivare al massimo allo stato per $n=1$. Però perché bisognerebbe pensare che l'elettrone abiti proprio in quelle orbite? Una risposta fu fornita da De Broglie, partendo dal dualismo onda/particella della luce. Ci sono due principi che presentano dei parallelismi, il principio di Maupertius, che dice che la traiettoria di un punto materiale ad energia E fissata è un punto stazionario dell'azione $\int_A^B T\,dt = \frac{1}{2}\int_A^B p\,ds$, e il principio di Fermat, che dice che la traiettoria di un raggio luminoso che si muove in un mezzo con indice di rifrazione n (che dipende solo dalla posizione) è il punto stazionario del funzionale $\int_A^B n(x)\,ds = \int_A^B \frac{c}{f\lambda}\,ds$.

Per l'effetto Compton, però, per un fotone $p = \frac{h}{\lambda}$, per cui De Broglie suppose che pure l'elettrone avesse natura doppia, per cui se la sua quantità di moto è p avrà associata un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$. Facendo i conti, viene fuori che le orbite degli stati stazionari sono tali che la loro lunghezza ~~decade~~ è un multiplo intero della lunghezza d'onda di cui parla De Broglie. Su questa strada continuò Schröedinger, con la sua equazione d'onda. Perciò l'elettrone doveva presentare figure di diffrazione e interferenza, cosa che venne osservata con l'esperimento di Davisson-Germer, facendo emergere la doppia natura.

Altra cosa furono le relazioni di indeterminazione: per trovare un elettrone lo devo individuare con qualche apparato, però l'elettrone fa una figura di diffrazione, per cui non posso avere precisione arbitraria sulla conoscenza di posizione e quantità di moto contemporaneamente. Se l'elettrone diffonde un fotone di lunghezza d'onda λ, la sua posizione è determinata a meno di un errore $\Delta q \simeq \frac{1}{\lambda}$. Il fotone ha quantità di moto $p = \frac{h}{\lambda}$, per cui l'elettrone avrà un impulso con

imprecisione $\Delta p \simeq h/\lambda$, ottenendo che $\Delta p \Delta q \simeq h$, indipendentemente da come compio la misura, dunque non dipende dagli strumenti o dalla procedura ma è intrinseca della cosa che sto osservando.
Qual è il problema che c'è dietro a questi risultati alieni alla meccanica classica? Visto che questi sono esperimenti, deve esserci una qualche ragione sperimentale. In particolare, nella meccanica classica si fanno due tacite ipotesi sulla capacità di misurare una qualsiasi osservabile (oltre al fatto che quasi tutte le grandezze siano osservabili):
(a) È possibile determinare il valore di una qualunque osservabile, in un qualunque stato con precisione arbitraria, perturbando "arbitrariamente poco" lo stato del sistema. In altre parole, posso costruire il mio apparato sperimentale in modo da prendere "misure" precisissime senza perturbare il sistema, o perturbandolo pochissimo.
(b) Date due qualsiasi osservabili in un sistema, posso misurarle simultaneamente o, laddove la misura simultanea sia incompatibile, di poterle misurare in rapida successione, in un qualsiasi stato del sistema

Heisenberg allora propose di abbandonare queste due ipotesi. Il primo passo della formalizzazione della nuova teoria, allora, sarà ridefinire un po' di cose e cambiare le basi d'appoggio. Supponiamo perciò:
(i) Abbiamo a disposizione un sistema fisico S e, di esso, abbiamo infinite copie identiche;
(ii) Abbiamo in mano una collezione di copie di S, detta ensemble e indicata con $\tilde{\omega}$, dove $\tilde{\omega}$ ha cardinalità molto grande, ma finita. Di queste ensembles abbiamo a disposizione un insieme, $\mathcal{E}$;
(iii) Abbiamo una procedura di misura $\tilde{A}$, cioè una lista di operazioni che bisogna eseguire su S per ottenere un numero reale $\lambda(S, \tilde{A})$, che è il risultato della misura di $\tilde{A}$ in S. Di queste $\tilde{A}$ abbiamo un insieme, P.
Chiaramente, λ non sarà univoco in generale.

DEF

Sia $\tilde{A} \in P$ una procedura di misura. La distribuzione dei risultati della misura di $\tilde{A}$ nell'ensemble $\tilde{\omega}$ è

$$F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda) := \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\}$$

OSS

$F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}$ è non decrescente: se $\mu < \lambda$, infatti,
$\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \mu\} \subseteq \{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\}$
$\Rightarrow \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \mu\} \leq \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\}$, per cui $F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\mu) \leq F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda)$. Inoltre, $F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}$ è continua da destra: sia $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione tale che $\lambda_n \searrow \lambda$ e definiamo $E_n := \{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda_n\}$. La famiglia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\omega}$ è una famiglia decrescente e inferiormente limitata, dunque avrem

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = E := \{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\}$$

Perciò $\lim_{n\to+\infty} F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda_n) = F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda) \Rightarrow$ per il teorema ponte, $F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}$ è continua da destra $\Rightarrow F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}$ definisce una misura di L.S. su $\mathbb{R}$, $\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}$. Possiamo dire qualcosa di più su questa misura?

$$\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}((\lambda_1,\lambda_2]) = F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda_2) - F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda_1) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda_1 < \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda_2$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S\in\tilde{\omega}} \delta_{\lambda(S,\tilde{A})}((\lambda_1,\lambda_2])$$

con δ la misura di Dirac. Dunque $\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}} \equiv \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S\in\tilde{\omega}} \delta_{\lambda(S,\tilde{A})}$ sugli intervalli e quindi, al modo consueto, coincidono sui boreliani. Tale misura è una probabilità.

Adesso, se $\#\tilde{\omega}$ è "molto grande", per la legge dei grandi numeri mi aspetto che, scegliendo a caso $\tilde{\omega}'$ un sottoensemble anche lui "molto grande", $F_{\tilde{\omega},\tilde{A}} = F_{\tilde{\omega}',\tilde{A}}$ $\forall \tilde{A} \in P$. Per come ho impostato tutto il discorso, anche se due procedure $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ sono tra loro incompatibili simultaneamente sullo stesso sistema, posso comunque calcolarne le distribuzioni dei risultati, da cui

DEF

Il valore d'aspettazione della procedura $\tilde{A}$ nell'ensemble $\tilde{\omega}$ è $Exp(\tilde{\omega},\tilde{A}) := \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S\in\tilde{\omega}} \lambda(S,\tilde{A})$

OSS

Per quanto abbiamo visto nell'osservazione qui sopra, sappiamo

che $\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}} = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} \delta_{\lambda(s,\tilde{A})}$. Avremo pertanto che

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} \delta_{\lambda(s,\tilde{A})}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\delta_{\lambda(s,\tilde{A})}(\lambda) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} f(\lambda(s,\tilde{A}))$$

Questo, come al solito, si dimostra partendo dalle funzioni semplici e andando avanti. La cosa che ci salva è che quella somma è finita, essendo $\#\tilde{\omega} < +\infty$.

Ma allora segue subito che

$$Exp(\tilde{\omega},\tilde{A}) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} \lambda(s,\tilde{A})$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{s\in\tilde{\omega}} \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\delta_{\lambda(s,\tilde{A})}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda)$$

A questo punto posso introdurre due relazioni d'equivalenza

- Siano $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ due procedure. Dirò $\tilde{A}_1 \sim \tilde{A}_2 \iff$ $Exp(\tilde{\omega},\tilde{A}_1) = Exp(\tilde{\omega},\tilde{A}_2)\ \forall\, \tilde{\omega}\in\mathcal{E}$
- Siano $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ due ensembles. Dirò $\tilde{\omega}_1 \sim \tilde{\omega}_2 \iff$ $Exp(\tilde{\omega}_1,\tilde{A}) = Exp(\tilde{\omega}_2,\tilde{A})\ \forall\, \tilde{A}\in\mathcal{P}$

Queste relazioni ci portano alle seguenti

DEF
Sia $\sim$ la relazione di equivalenza tra ensembles. L'insieme quoziente $\mathcal{E}/\sim$ è detto insieme degli stati del sistema (S)

DEF
Sia $\sim$ la relazione di equivalenza tra procedure. L'insieme quoziente $\mathcal{P}/\sim$ è detto insieme delle osservabili del sistema (S)

Che struttura hanno questi due insiemi? Cominciamo da S.
Siano ω_1 e ω_2 due stati e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ con $\alpha_1+\alpha_2 = 1$.
Consideriamo $\tilde{\omega}_1 \in \omega_1$ e $\tilde{\omega}_2 \in \omega_2$ tali che

$$\frac{\#\tilde{\omega}_1}{\#(\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2)} = \alpha_1 \quad e \quad \frac{\#\tilde{\omega}_2}{\#(\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2)} = \alpha_2.$$

DEF
Siano $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ scelti come sopra. Lo stato $\omega := [\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2]$ è detto miscela statistica di ω_1 e ω_2.

Che proprietà ha la miscela statistica?

DEF

Sia $\omega \in \mathcal{S}$. Il valore d'aspettazione dell'osservabile A nello stato ω è $Exp(\omega, A) := Exp(\tilde{\omega}, \tilde{A})$, dove $\tilde{\omega} \in \omega$ e $\tilde{A} \in A$

PROP

Sia ω una miscela statistica di ω_1 e ω_2, con parametri α_1 e $\alpha_2 \Rightarrow Exp(\omega, A) = \alpha_1 Exp(\omega_1, A) + \alpha_2 Exp(\omega_2, A) \ \forall A \in \mathcal{O}$

dim

Andiamo a studiare la funzione di ripartizione. Sia $\tilde{\omega} \in \omega$ e sia $\tilde{A} \in A$, con $A \in \mathcal{O}$ qualsiasi

$$F_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\} =$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \left(\#\{S \in \tilde{\omega}_1 : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\} + \#\{S \in \tilde{\omega}_2 : \lambda(S,\tilde{A}) \leq \lambda\} \right)$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \left(\#\omega_1 \cdot F_{\tilde{\omega}_1,\tilde{A}}(\lambda) + \#\omega_2 \cdot F_{\tilde{\omega}_2,\tilde{A}}(\lambda) \right) \quad \text{per la scelta di } \omega_1 \text{ e } \omega_2$$

$$= \frac{\#\omega_1}{\#(\omega_1 \cup \omega_2)} F_{\tilde{\omega}_1,\tilde{A}}(\lambda) + \frac{\#\omega_2}{\#(\omega_1 \cup \omega_2)} F_{\tilde{\omega}_2,\tilde{A}}(\lambda)$$

$$= \alpha_1 F_{\tilde{\omega}_1,\tilde{A}}(\lambda) + \alpha_2 F_{\tilde{\omega}_2,\tilde{A}}(\lambda)$$

per cui, $\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}} = \alpha_1 \mu_{\tilde{\omega}_1,\tilde{A}} + \alpha_2 \mu_{\tilde{\omega}_2,\tilde{A}}$, dunque

$Exp(\tilde{\omega},\tilde{A}) = \alpha_1 Exp(\tilde{\omega}_1,\tilde{A}) + \alpha_2 Exp(\tilde{\omega}_2,\tilde{A})$

$\Rightarrow$ per come abbiamo definito Exp sul quoziente avremo

$Exp(\omega, A) = \alpha_1 Exp(\omega_1, A) + \alpha_2 Exp(\omega_2, A)$ ∎

Dunque, siccome stiamo lavorando a meno di equivalenze e queste sono costruite con i valori d'aspettazione, la classe ω dipende solo da α_1, ω_1, α_2 e ω_2. e scriverò che $\omega := \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Dunque sembra che si possa dire che $\mathcal{S}$ è convesso, dove la somma e il prodotto per un numero sono definiti con la miscela statistica. Il fatto è che α_1 e α_2 non sono reali. Però avendo scelto le cardinalità dei vari ensembles molto grandi, possiamo supporre che, in caso, α_1 e α_2 approssimano "arbitrariamente bene" due reali visto che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

DEF

Sia $\omega \in \mathcal{S}$. Dirò che ω è uno stato puro se non può essere espresso come miscela di due stati ω_1 e ω_2 entrambi diversi

da ω stesso.

Dunque, se prendo uno stato puro, comunque scelgo in esso un ensemble e comunque scelgo due sottoensembles $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \subset \tilde{\omega}$, avremo che $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, cioé gli stati in cui sono contenute le varie ensembles coincidono. Questo significa, ritornando a come erano state definite le classi di equivalenza, che comunque misuro un'osservabile $\tilde{A}$ in ω_1 o in ω_2 ottengo le stesse distribuzioni dei risultati. Uno stato puro, perció, descrive proprietá inerenti alle singole copie di S contenute in ciascun ensemble $\tilde{\omega}$ dello stato ω.

DEF

Sia $A \in \mathcal{O}$. Lo spettro fisico di A é $\sigma_{ph}(A) := \{\lambda(S,\tilde{A}) : S \in \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \in \omega, \omega \in \mathcal{S}\}$

Si suppone che $\sigma_{ph}(A)$ sia un compatto di $\mathbb{R}$

Consideriamo ora $f \in \mathcal{C}(\sigma_{ph}(A))$ a valori in $\mathbb{R}$. Possiamo definire una nuova osservabile, detta $f(A)$, tramite la procedura $\widetilde{f(A)}$ = "misura $\tilde{A}$ e poni $\lambda(S, \widetilde{f(A)}) := f(\lambda(S,\tilde{A}))$"

Cosi facendo segue subito che $\sigma_{ph}(f(A)) = f(\sigma_{ph}(A))$.

La funzione di ripartizione sará

$$F_{\tilde{\omega}, \widetilde{f(A)}}(\lambda) := \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S, \widetilde{f(A)}) \leq \lambda\}$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : f(\lambda(S,\tilde{A})) \leq \lambda\}$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \#\{S \in \tilde{\omega} : \lambda(S,\tilde{A}) \in f^{-1}((-\infty, \lambda])\}$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum \delta_{\lambda(S,\tilde{A})}(f^{-1}((-\infty,\lambda])) = \mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(f^{-1}((-\infty,\lambda]))$$

Di conseguenza, andando a vedere il valore di aspettazione

$$Exp(\tilde{\omega}, \widetilde{f(A)}) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \lambda(S, \widetilde{f(A)}) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} f(\lambda(S,\tilde{A}))$$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\delta_{\lambda(S,\tilde{A})}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_{\tilde{\omega},\tilde{A}}(\lambda)$$

Perció, passando alle classi di equivalenza, quell'integrale é comunque il valore di aspettazione di $f(A)$ in ω. Non solo, possiamo anche definire $\|A\| := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ph}(A)\}$.

Inoltre, andando a prendere $\{f(A) : f \in \mathcal{C}(\sigma_{ph}(A))\} \subseteq \mathcal{O}$, ne posso calcolare $\|\cdot\|$

$$\|f(A)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ph}(f(A))\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in f(\sigma_{ph}(A))\}$$

$$= \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_{ph}(A)\} = \|f\|_\infty$$

Quello che ci viene in mente, dunque, è di far corrispondere questo insieme alla parte autoaggiunta della C^*-algebra $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(A)$
Altra cosa che si assume è il <u>principio della ripetibilità delle misure</u>: se si effettua la misura di una stessa procedura due volte "in rapida successione" sulla stessa copia del sistema si ottiene lo stesso risultato. Chiaramente se ho introdotto una nozione di media, ci sarà anche una qualche versione della varianza.

<u>DEF</u>
Sia $A \in \mathcal{O}$ e $\omega \in \mathcal{S}$. La <u>dispersione di A in ω</u> è
$(\Delta_\omega A)^2 := Exp(\omega, (A - Exp(\omega, A)\mathbb{1})^2)$

<u>OSS</u>
Un altro modo per scrivere la dispersione si può ricavare dalla definizione di Exp.
$$\Rightarrow (\Delta_\omega A)^2 = Exp(\omega, A^2) - Exp(\omega, A)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\lambda^2 - Exp(\omega, A)^2)\, d\mu_{\omega,A}(\lambda)$$

<u>LEMMA</u>
Sono equivalenti:
(a) $\Delta_\omega A = 0$
(b) $F_{\omega,A}(\lambda) = \chi_{[Exp(\omega,A), +\infty)}(\lambda)$
(c) $\mu_{\omega,A} = \delta_{Exp(\omega,A)}$

<u>dim</u>
(a) $\Rightarrow$ (b) Mostriamo che possiamo usare la disuguaglianza di Cebyšev. Posso vedere $\lambda(S, \tilde{A})$ come una variabile aleatoria su $\mathbb{R}$, per cui posso calcolare $P(\{\lambda(S,\tilde{A}) = \lambda\})$ usando la funzione di ripartizione, perciò
$P(\{\lambda(S,\tilde{A}) = \lambda\}) = F_{\omega,A}(\lambda) - F_{\omega,A}(\lambda^-) = \mu_{\omega,A}(\{\lambda\})$
A questo punto, $\mathbb{E}(\lambda(S,A)) = Exp(\omega, A)$ e $Var(\lambda(S,A)) = (\Delta_\omega A)^2$
$\Rightarrow$ per la disuguaglianza di Cebyšev, $\forall \varepsilon > 0$
$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = 0$$
Ma allora l'unico misurabile di misura non nulla è $\{|X - \mathbb{E}(X)| = 0\}$, da cui $X = \mathbb{E}(X)$, cioè $\lambda(S,\tilde{A}) = Exp(\omega, A)$
Ma allora, se $\lambda(S,\tilde{A})$ assume un unico valore, è chiaro che $\forall \lambda < Exp(\omega, A)$, $F_{\omega,A}(\lambda) = 0$ e $\forall \lambda \geq Exp(\omega, A)$ $F_{\omega,A}(\lambda) = 1$
$$\Rightarrow F_{\omega,A}(\lambda) = \chi_{[Exp(\omega,A), +\infty)}(\lambda)$$
(b) $\Rightarrow$ (c) È esattamente quello che abbiamo visto la prima

volta che abbiamo incontrato la misura di Dirac su $\mathbb{R}$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\Delta_\omega A)^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 - Exp^2(\omega, A)\, d\mu_{\omega,A}(\lambda)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d\mu_{\omega,A}(\lambda) - Exp^2(\omega, A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d\delta_{Exp(\omega,A)}(\lambda) - Exp^2(\omega,A) = Exp^2(\omega,A) - Exp^2(\omega,A) = 0$$

■

PROP

Sia $A \in \mathbb{O}$. $\sigma_{ph}(A) = \{ Exp(\omega, A) : \Delta_\omega A = 0 \}$

dim

Per definizione di spettro fisico, $\lambda \in \sigma_{ph}(A) \Rightarrow \exists\, \omega^* \in \mathbb{S}$, $\tilde{\omega}^* \in \omega^*$ e $S^* \in \tilde{\omega}^*$ e $\tilde{A} \in A$ tale che $\lambda = \lambda(S^*, \tilde{A})$. Adesso vogliamo costruire un nuovo ensemble, $\tilde{\omega}' := \{ S \in \tilde{\omega}'' \in \omega'' : \lambda(S, \tilde{A}) = \lambda \}$, che sarebbe, detto a parole, la collezione degli S in un qualsiasi ensemble di un qualsiasi stato sui quali valga $\lambda(S, \tilde{A}) = \lambda$. In simboli un pochino più formali,

$$\tilde{\omega}' := \bigcup_{\omega \in \mathbb{S}} \left(\bigcup_{\tilde{\omega} \in \omega} \{ S \in \tilde{\omega} : \lambda(S, \tilde{A}) = \lambda \} \right).$$

$\tilde{\omega}'$ è non vuoto, poiché la "catena di *" della definizione di spettro fisico è tale per cui $S^* \in \tilde{\omega}'$. Definiamo $\omega' := [\tilde{\omega}'] \in \mathbb{S}$. Ora, su tutto ω' $\lambda(S, A)$ è costante $\Rightarrow$

$$F_{\tilde{\omega}', \tilde{A}}(x) = \chi_{[\lambda, +\infty)}(x) \iff \Delta_{\tilde{\omega}'}(A) = 0$$

$\Rightarrow \sigma_{ph}(A) \subseteq \{ Exp(\omega, A) : \Delta_\omega A = 0 \}$ poiché c'è solo $\lambda(S, A) = Exp(\omega, A)$

Viceversa, se $\lambda \in \{ Exp(\omega, A) : \Delta_\omega A = 0 \} \Rightarrow \exists\, \omega \in \mathbb{S}$ tale per cui $\Delta_\omega A = 0 \Rightarrow \lambda(S, \tilde{A})$ assume un unico valore $\forall S \in \tilde{\omega}, \forall \tilde{\omega} \in \omega$, $\lambda(S, \tilde{A}) = Exp(\omega, A) = \lambda \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ph}(A) \Rightarrow \sigma_{ph}(A) = \{ Exp(\omega, A) : \Delta_\omega A = 0 \}$

■

Vogliamo ora definire una "somma" di osservabili.

Siano $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ due procedure compatibili (eseguibili simultaneamente), A e B le corrispondenti osservabili e definiamo $A+B$ come la classe di equivalenza della procedura

$\widetilde{A+B}$:= "misura $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ poi poni $\lambda(S, \tilde{A} + \tilde{B}) = \lambda(S, \tilde{A}) + \lambda(S, \tilde{B})$", in modo molto naturale. In modo altrettanto naturale, mi aspetto che valga $Exp(\omega, A+B) = Exp(\omega, A) + Exp(\omega, B)$ $\forall \omega \in \mathbb{S}$

infatti $Exp(\omega, A+B) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \lambda(S, \widetilde{A+B}) = \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \lambda(S, \tilde{A}) + \lambda(S, \tilde{B})$

$$= \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \lambda(S, \tilde{A}) + \frac{1}{\#\tilde{\omega}} \sum_{S \in \tilde{\omega}} \lambda(S, \tilde{B}) = Exp(\omega, A) + Exp(\omega, B)$$

Facciamo l'ipotesi di poter "sommare" sempre due osservabili pure se incompatibili, cioé supponiamo che $\forall A, B \in \mathcal{O}$ $\exists C \in \mathcal{O}$ t.c. $Exp(\omega, C) = Exp(\omega, A) + Exp(\omega, B)$ e alla luce della precedente osservazione ha senso battezzare $C := A + B$. Abbiamo una somma, quindi. In verità, dato $A \in \mathcal{O}$, abbiamo pure il prodotto per uno scalare reale α, definito da $f(A) = \alpha A$, dove $f(x) = \alpha x$ é chiaramente continua su $\sigma_{pn}(A)$ essendo continua su $\mathbb{R}$. Dunque $\mathcal{O}$ ha struttura di spazio vettoriale. Non solo, se supponiamo di poter definire anche le potenze di $A+B$, su $\mathcal{O}$ ho pure un prodotto di Jordan, $A \circ B := \frac{1}{2}\left((A+B)^2 - A^2 - B^2\right)$ per cui $\mathcal{O}$ é pure un'algebra di Jordan. Adesso imponiamo:

Postulato C^*:

Sia $\mathcal{O}$ un insieme di osservabili. $\exists$ una C^*-algebra $\mathcal{A}$ tale per cui

(i) $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{sa}$, cioé gli elementi di $\mathcal{O}$ corrispondono agli elementi autoaggiunti di $\mathcal{A}$

(ii) $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$, cioé gli stati ω corrispondono agli stati della C^*-algebra $\mathcal{A}$

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{S}$, $\forall A \in \mathcal{O}$, $Exp(\omega, A) = \omega(A)$

Useremo pertanto la stessa lettera per indicare stati nel senso dello finora e stati nel senso delle C^*-algebre e per indicare osservabili ed elementi di $\mathcal{A}$.

Le corrispondenze quindi sono le seguenti

- $\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  $\omega \longleftrightarrow \omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$
- $\mathcal{O} \longleftrightarrow \{A = A^*\} \subset \mathcal{A}$
  $A \longleftrightarrow A$
- $Exp(\omega, \cdot) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $A \longmapsto Exp(\omega, A)$
  $\longleftrightarrow \omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

Chiaramente, la C^*-algebra puó avere qualcosa in piú, come la commutatività, e questa ha effetti sulle osservabili.

LEMMA

Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra e ω uno stato di $\mathcal{A}$
ω é moltiplicativo $\iff$ la sua rappresentazione GNS é $\pi_\omega(A) = \omega(A) \cdot \mathbb{1}$

dim

$\Rightarrow$) Dato che la rappresentazione é unica, mostriamo che $\omega(A)\mathbb{1}$ rispetta le proprietá che vogliamo da una tale rappresentazione. Scegliamo $H_\omega = \mathbb{C}$, $x_\omega = 1$ e

$\pi_\omega(a) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \omega(a)\cdot z$

Fatta questa scelta, chiaramente abbiamo $\omega(a) = 1 \cdot \pi_\omega(a)(1)$ poiché il prodotto scalare su $\mathbb{C}$ è $\langle z, w\rangle = \bar{z}\cdot w$.
Bisogna solo mostrare che π_ω è una rappresentazione.
Poiché $\pi_\omega(a) = \omega(a)\,\mathbb{1}$ avremo chiaramente che π è lineare.
Inoltre, poiché ω è moltiplicativo, se prendo $a, b \in \mathcal{A}$ e $z \in \mathbb{C}$ qualunque $\pi_\omega(a\cdot b)(z) = \omega(a\cdot b)z = \omega(a)\omega(b)z$
$= \omega(a)(\pi_\omega(b)(1))$
$= [\pi_\omega(a)\pi_\omega(b)](z)$
$\Rightarrow \pi_\omega$ è moltiplicativo.
Mostriamo che è involutivo: Siano z e $z' \in \mathbb{C}$ qualsiasi.
Osserviamo che, poiché ω è moltiplicativo, $\omega(a^*a) = \omega(a^*)\omega(a)$
d'altra parte, poiché $\omega(a^*a) \geq 0$ per definizione di stato, $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$, dunque
$\langle z', \pi_\omega(a^*)(z)\rangle = \bar{z}'\,\pi_\omega(a^*)(z) = \bar{z}'\,\omega(a^*)z = \bar{z}'\,\overline{\omega(a)}\,z$
$= \overline{\pi_\omega(a)(z')}\,z = \langle \pi_\omega(a)(z'), z\rangle$
dunque $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega^*(a) \Rightarrow \pi_\omega$ è involutivo
$\Rightarrow \pi_\omega$ è $*$-omomorfismo $\Rightarrow$ è una rappresentazione.
Mostriamo che x_ω è ciclico per π_ω. Ora, poiché ω è uno stato e $\mathcal{A}$ è unitaria, $\omega(\mathbb{1}) = 1$, dunque $\omega(\mathcal{A})$ è un sottospazio di $\mathbb{C}$ diverso da $\{0\} \Rightarrow \omega(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$, ma allora
$\pi_\omega(\mathcal{A})(1) = \omega(\mathcal{A})\cdot 1 = \mathbb{C} \Rightarrow 1$ è ciclico, poiché $\mathbb{C}$ è denso in se stesso $\Rightarrow \pi_\omega(a) = \omega(a)\,\mathbb{1}$ è veramente la rappresentazione GNS di ω per unicità.
$\Leftarrow$) Sia $\pi_\omega(a) = \omega(a)\,\mathbb{1}$ la rappresentazione GNS. Avremo,
$\forall a, b \in \mathcal{A}$ $\omega(ab)\cdot 1 = \pi_\omega(a\cdot b)(1) = (\pi_\omega(a)\circ\pi_\omega(b))(1)$
$= \pi_\omega(a)(\omega(b)\cdot 1) = \omega(b)\cdot\omega(a)\cdot 1$
$= \omega(a)\cdot\omega(b)\cdot 1$
$\Rightarrow \omega(ab) = \omega(a)\omega(b) \Rightarrow \omega$ è moltiplicativo ∎

LEMMA
Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra commutativa e ω uno stato di $\mathcal{A}$
$\Rightarrow \omega$ è puro $\Leftrightarrow \omega$ è un carattere

dim
$\Rightarrow$) Sia ω uno stato puro. Mostriamo che è moltiplicativo e abbiamo fatto. Sia π_ω la rappresentazione GNS di ω. Per un precedente teorema sappiamo che π_ω è irriducibile. Mostriamo che allora è della forma $\omega(a)\,\mathbb{1}$

Per come abbiamo scelto H_ω, comunque preso $a \in \mathcal{A}$, $\pi_\omega(a) \in \pi(\mathcal{A})'$ infatti $\forall b \in \mathcal{A}$ $\pi_\omega(a) \circ \pi_\omega(b) = \pi_\omega(ab)$ $= \pi_\omega(ba) = \pi_\omega(b) \circ \pi_\omega(a) \Rightarrow \pi_\omega(a) = \lambda_a \cdot \mathbb{1}$ poiché π_ω è irriducibile (lemma di Schur).

Ma allora, per il teorema GNS, $\omega(a) = \langle x_\omega, \pi_\omega(a)(x_\omega)\rangle = \langle x_\omega, \lambda_a x_\omega\rangle$. In generale, $\|x_\omega\| = 1$ se x_ω è il vettore ciclico della rappresentazione GNS, infatti comunque preso ω, $\omega(\mathbb{1}) = 1$ per definizione di stato. Inoltre, poiché π_ω è $*$-omomorfismo, $\pi_\omega(a)(x_\omega) = \pi_\omega(\mathbb{1}\cdot a)(x_\omega) = (\pi_\omega(\mathbb{1}) \circ \pi_\omega(a))(x_\omega)$, ma $\pi_\omega(\mathcal{A})(x_\omega)$ è denso in H_ω $\Rightarrow \pi_\omega(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{B(H_\omega)}$, perciò abbiamo

$1 = \omega(\mathbb{1}) = \langle x_\omega, \pi_\omega(\mathbb{1})(x_\omega)\rangle = \langle x_\omega, \mathbb{1}(x_\omega)\rangle = \langle x_\omega, x_\omega\rangle = \|x_\omega\|^2$

$\Rightarrow \|x_\omega\| = 1$, perciò $\omega(a) = \langle x_\omega, \lambda_a x_\omega\rangle = \lambda_a$

$\Rightarrow \pi(\omega)(a) = \omega(a)\,\mathbb{1}$

$\Rightarrow$ per il lemma precedente ω è moltiplicativo $\Rightarrow \omega$ è un carattere.

$\Leftarrow$) Sia ω un carattere, in particolare è moltiplicativo $\Leftrightarrow \pi_\omega(a) = \omega(a)\,\mathbb{1}$ per il lemma precedente

$\Rightarrow$ poiché $H_\omega = \mathbb{C}$ e gli unici operatori lineari da $\mathbb{C}$ in sé sono della forma $z\,\mathbb{1}$ avremo sicuramente che $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\,\mathbb{1} \Rightarrow \pi_\omega$ è irriducibile $\Leftrightarrow \omega$ è uno stato puro.

PROP

Sia $\mathcal{A}$ la C^*-algebra associata a $\mathcal{O}$

$\mathcal{A}$ è commutativa $\Leftrightarrow \Delta_\omega(A) = 0$ $\forall \omega$ stato puro $\forall A \in \mathcal{O}$

dim

$\Rightarrow$) Lo stato puro ω è moltiplicativo per il lemma precedente. Per il postulato C^* avremo

$(\Delta_\omega A)^2 = \omega(A^2) - \omega^2(A) = \omega^2(A) - \omega^2(A) = 0$

$\Leftarrow$) Sia ω uno stato puro e sia (π_ω, x_ω) la sua rappresentazione GNS.

$\|\pi_\omega(A)x_\omega - \omega(A)x_\omega\|^2 = \langle \pi_\omega(A)x_\omega - \omega(A)x_\omega, \pi_\omega(A)x_\omega - \omega(A)x_\omega\rangle$

$= \langle \pi_\omega(A)x_\omega, \pi_\omega(A)x_\omega\rangle - \langle \pi_\omega(A)x_\omega, \omega(A)x_\omega\rangle - \langle \omega(A)x_\omega, \pi_\omega(A)x_\omega\rangle +$

$+ \langle \omega(A)x_\omega, \omega(A)x_\omega\rangle = \dots$

Ora, però, π_ω è una rappresentazione, dunque $\pi_\omega^*(A) = \pi_\omega(A^*) = \pi_\omega(A)$ poiché $A = A^*$. Per il teorema GNS $\omega(A) = \langle x_\omega, \pi_\omega(A)x_\omega\rangle$ e, poiché $\omega(A) \in \mathbb{R}$, $\omega(A) = \overline{\omega(A)} = \overline{\langle x_\omega, \pi_\omega(A)x_\omega\rangle} = \langle \pi_\omega(A)x_\omega, x_\omega\rangle$

Infine, come abbiamo visto $\langle x_\omega, x_\omega \rangle = 1$, dunque

$$\ldots = \langle x_\omega, \pi_\omega(A^2) x_\omega \rangle - 2\omega^2(A) + \omega^2(A) = \omega(A^2) - \omega^2(A)$$
$$= \Delta_\omega^2(A) = 0$$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{O} \quad \pi_\omega(A) x_\omega = \omega(A) x_\omega$.

Inoltre, se $A \in \mathcal{A}$ (quindi non necessariamente pure in $\mathcal{O}$, che corrisponde alla sola parte autoaggiunta), posso scrivere $A = A_1 + i A_2$, avendo scelto al solito $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ e $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.
A_1 e A_2 sono autoaggiunti, dunque su di loro vale quello che ho appena mostrato. Avremo allora che

$$\pi_\omega(A) x_\omega = \pi_\omega(A_1 + i A_2) x_\omega = [\pi_\omega(A_1) + i \pi_\omega(A_2)] x_\omega =$$
$$= \pi_\omega(A_1) x_\omega + i \pi_\omega(A_2) x_\omega = \omega(A_1) x_\omega + i \omega(A_2) x_\omega =$$
$$= \omega(A_1 + i A_2) x_\omega = \omega(A) x_\omega$$

Dunque la precedente relazione vale $\forall A \in \mathcal{A}$, in particolare, presi $A, B \in \mathcal{A}$ qualsiasi, abbiamo

$$\omega(AB) x_\omega = \pi_\omega(AB) x_\omega = [\pi_\omega(A) \circ \pi_\omega(B)] x_\omega$$
$$= \pi_\omega(A)(\omega(B) x_\omega) = \omega(B)\omega(A) x_\omega = \omega(A)\omega(B) x_\omega$$
$$= \omega(A) \pi_\omega(B) x_\omega = \pi_\omega(B)(\omega(A) x_\omega)$$
$$= [\pi_\omega(B) \circ \pi_\omega(A)] x_\omega = \pi_\omega(BA) x_\omega = \omega(BA) x_\omega$$

Perciò, se vado a prendere $[A, B] := AB - BA$ il commutatore di A e B abbiamo $\omega([A, B]) = \omega(BA) - \omega(AB) = 0$ comunque scelti $A, B \in \mathcal{A}$. Ora, c'è un teorema che dice che comunque preso $C \neq 0 \in \mathcal{A}$ $\exists$ ω stato puro per cui $\omega(C) \neq 0$. Ora, però, $\Delta_\omega A = 0$ $\forall \omega$ stato puro per ipotesi, dunque tutto quello che abbiamo fatto vale $\forall \omega$ stato puro, in particolare $\omega([A, B]) = 0$ $\forall \omega$ stato puro $\Rightarrow$ usando la contronominale del risultato appena detto $\omega([A, B]) = 0$ $\forall \omega$ stato puro $\Rightarrow [A, B] = 0$, cioè $AB = BA$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \mathcal{A}$ è commutativa

Che implicazioni ha questo risultato? Per il teorema dell'isomorfismo di Gelfand, questo significa che $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}(X)$ per qualche X spazio compatto di Hausdorff se è commutativa, cioè che tutte le osservabili sono descritte da funzioni. Ma allora questo X è lo spazio delle fasi, dove tutte le osservabili sono dedotte in funzione di posizione e velocità. Ma dire questo è dire che il formalismo che abbiamo

introdotto contiene la meccanica classica, dunque effettivamente condurrà agli stessi risultati sulle "cose" che già la meccanica classica riusciva a vedere. A questo punto ci piacerebbe capire chi è la C^* algebra che cerco per astrarre le osservabili. Chiaramente non dovrà essere commutativa, sennó ho ritrovato la meccanica classica. Prima però facciamo delle osservazioni.

OSS

Sia $\mathcal{A}$ la C^*-algebra per cui $\mathcal{A}_{sa} = \mathcal{O}$, $\omega \in S(\mathcal{A})$ e sia (π_ω, x_ω) la rappresentazione GNS di ω. Avremo allora che, $\forall A \in \mathcal{O}$, risulterà $\omega(A) = \langle x_\omega, \pi_\omega(A) x_\omega \rangle$ ma $\pi_\omega(A) \in B(H_\omega)$, e, poiché $A^* = A$, $\pi_\omega^*(A) = \pi_\omega(A^*) = \pi_\omega(A)$ dunque π_ω è autoaggiunto $\Rightarrow$ per il teorema spettrale $\exists!$ P misura spettrale e μ_{x_ω} misura di Lebesgue-Stieltjes associata a x_ω e definita dalla famiglia spettrale di $\pi_\omega(A)$ per cui $\omega(A) = \langle x_\omega, \pi_\omega(A) x_\omega \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_{x_\omega}(\lambda)$.
Se, dunque, p è un polinomio, avremo, applicando la linearità di π_ω $\omega(p(A)) = \langle x_\omega, p(\pi_\omega(A)) x_\omega \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) \, d\mu_{x_\omega}(\lambda)$
D'altra parte, $\omega(p(A)) = Exp(\omega, p(A))$, perciò
$\omega(p(A)) = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) \, d\mu_{\omega,A}(\lambda) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) \, d\mu_{x_\omega}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) \, d\mu_{\omega,A}(\lambda)$
Per densità, la stessa ~~disuguaglianza~~ vale per funzioni continue, dunque misurabili. In particolare, preso un qualsiasi misurabile E per le due misure (possiamo prendere un boreliano)

$$\Rightarrow \mu_{\omega,A}(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(\lambda) \, d\mu_{\omega,A}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(\lambda) \, d\mu_{x_\omega}(\lambda) = \mu_{x_\omega}(E)$$

$\Rightarrow \mu_{\omega,A} \equiv \mu_{x_\omega}$ poiché coincidono sui boreliani.
Perciò, misurare un intervallo con la misura indotta dalla misura spettrale é $\mu_{x_\omega}(\mathbb{1}(a,b]) = F_{\omega,A}(b) - F_{\omega,A}(a) =$ "probabilitá di ottenere un risultato in $(a,b]$ misurando A nello stato ω"
In particolare, se x_ω è un autovettore per $\pi_\omega(A)$ avremo
$\pi_\omega(A) x_\omega = \bar{\lambda} x_\omega \iff (\pi_\omega(A) - \lambda \mathbb{1}) x_\omega = 0$
$\iff \| (\pi_\omega(A) - \lambda \mathbb{1}) x_\omega \|^2 = 0$
Il che equivale a dire che $\Delta_\omega^2(A) = 0$
Dunque dire che x_ω è autovettore per $\pi_\omega(A)$ equivale a dire che A ha dispersione nulla in ω, cioé A assume con probabilitá 1 il valore $\bar{\lambda}$.

OSS

Sia π una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{A}$ e siano x_1 e x_2 due vettori in H_π con $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Possiamo definire due stati $\omega_1(A) := \langle x_1, \pi(A)x_1\rangle$ e $\omega_2(A) := \langle x_2, \pi(A)x_2\rangle$. Adesso abbiamo 2 modi per definire un nuovo stato

(i) Convessità: prendiamo $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e definiamo

$$\omega := \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$$

(ii) Definiamo $x := \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\|}$ e $\omega(A) := \langle x, \pi(A)x\rangle$

Cosa posso dire su ω?

Innanzitutto, x è ciclico per π poiché $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ o è $\{0\}$ o è tutto H_π. Chiaramente, $\overline{\pi(\mathcal{A})x}$ è non nullo, altrimenti $\omega(A)$ sarebbe il funzionale nullo $\Rightarrow \overline{\pi(\mathcal{A})x} = H_\pi \Rightarrow x$ è ciclico per π. Dunque π è unitariamente equivalente alla rappresentazione GNS di ω, per cui π_ω è irriducibile $\Leftrightarrow \omega$ è puro. Andiamo a calcolarlo esplicitamente.

Supponiamo che $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ era già di norma 1

$$\begin{aligned}\omega(A) &= \langle x, \pi(A)x\rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \pi(A)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\rangle \\ &= |\alpha_1|^2\langle x_1, \pi(A)x_1\rangle + |\alpha_2|^2\langle x_2, \pi(A)x_2\rangle \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha_1}\alpha_2\langle x_1, \pi(A)x_2\rangle\right) \\ &= |\alpha_1|^2\omega_1(A) + |\alpha_2|^2\omega_2(A) + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha_1}\alpha_2\langle x_1, \pi(A)x_2\rangle\right)\end{aligned}$$

(termine di interferenza)

ω è detto <u>sovrapposizione coerente</u> di ω_1 e ω_2.

Quello che salva la purezza è il termine con la parte reale, che potrebbe anche essere nullo e, in tal caso, se α_1 e α_2 sono tali che $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, ω non è puro, poiché combinazione convessa di ω_1 e ω_2.

In tal caso diciamo che esistono delle regole di superselezione, cioé lo spazio di Hilbert su cui è rappresentata la C^*-algebra delle osservabili è somma diretta di sottospazi su cui le osservabili agiscono tramite una rappresentazione irriducibile (sottospazi coerenti). All'interno di questi sottospazi vale il principio di sovrapposizione (cioé combinazioni lineari di vettori danno luogo a stati puri), mentre non vale per combinazioni lineari di vettori appartenenti a sottospazi coerenti diversi.

<u>PROP</u> (principio di Heisenberg generalizzato)

Siano $A, B \in \mathcal{A}_{sa}$ e $\omega \in S(\mathcal{A}) \Rightarrow \Delta_\omega A \cdot \Delta_\omega B \geq \dfrac{1}{2}|\omega([A,B])|$

dim

Osserviamo prima di tutto che
$[A, \omega(B)\mathbb{1}] = 0 = [\omega(A)\mathbb{1}, B]$, perciò avremo che
$[A, B] = [A - \omega(A)\mathbb{1}, B - \omega(B)\mathbb{1}]$. Battezzando A' e B', rispettivamente, i due oggetti avremo che, poiché A e B sono autoaggiunti, $\omega(A)$ e $\omega(B)$ sono reali dunque autoaggiunti (in $\mathbb{C}$ l'involuzione è il coniugio), e, pertanto, sono autoaggiunti pure $\omega(A')$ e $\omega(B')$ per cui

$$|\omega([A,B])| = |\omega([A',B'])| = |\omega(A'B') - \omega(B'A')|$$
$$\leq |\omega(A'B')| + |\omega(B'A')| = |\omega(A'^*B')| + |\omega(B'^*A')| \leq$$

Ora $(A', B') \longmapsto \omega(A'^*B')$ è una forma hermitiana $\Rightarrow$ vale Cauchy-Schwarz

$$\leq 2\,\omega(A'^*A')^{1/2}\,\omega(B'^*B')^{1/2} = 2\,\omega(A'^2)^{1/2}\,\omega(B'^2)^{1/2} =$$
$$= 2\,\omega\left((A - \omega(A)\mathbb{1})^2\right)^{1/2}\omega\left((B - \omega(B)\mathbb{1})^2\right)^{1/2} = 2\,\Delta_\omega A\,\Delta_\omega B$$
$$\Rightarrow \Delta_\omega A\,\Delta_\omega B \geq \frac{1}{2}|\omega([A,B])|$$

Cosa diceva il principio di indertminazione per particelle quantistiche? $\Delta_p \Delta_q \geq \frac{\hbar}{2}$, dove q e p sono posizione e impulso della particella; q e p sono chiaramente osservabili, per cui ammettono controparti p e q in $\mathcal{O}$, inoltre è naturale identificare le indeterminazioni delle misure con le loro dispersioni come elementi dell'algebra. Dunque, dopo aver fatto queste identificazioni, se si confrontano le due disuguaglianze si conclude che il principio di indeterminazione è verificato se il valore d'attesa del commutatore in ogni stato è un multiplo di $\hbar$, cioè se $[q,p] = i\hbar\mathbb{1}$ (detta relazione di commutazione canonica). Così facendo, infatti, troviamo

$$|\omega([q,p])| = \left(\omega([q,p])\,\overline{\omega([q,p])}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\omega([q,p])\,\omega([q,p]^*)\right)^{1/2} = \left(\omega([q,p])\,\omega(-[q,p])\right)^{1/2}$$
$$= \left(\omega(i\hbar\mathbb{1})\,\omega(-i\hbar\mathbb{1})\right)^{1/2} = \left(\hbar^2\omega(\mathbb{1})\right)^{1/2} = \hbar$$

Dunque la C^*-algebra che cerco dovrà contenere due autoaggiunti p e q con $[q,p] = i\hbar\mathbb{1}$ (nel caso unidimensionale del moto, altrimenti vorrò che, se p_j e q_k sono le componenti nelle singole dimensioni, $[q_k, p_j] = i\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}$) per avere in mano il principio di Heisenberg, che si impone come evidenza sperimentale.

Allora potremmo pensare di definire $\mathcal{A}$ come la C^*-algebra generata da due elementi p e q con la proprietà

$[q,p] = i\hbar\mathbb{1}$.
Tuttavia c'è un piccolo problema. In generale, presi $A,B,C \in \mathcal{A}$ risulta che

$$[A,BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA$$
$$= [A,B]C + B[A,C]$$

In particolare

$$[q,p^2] = [q,p]p + p[q,p] = 2i\hbar p$$
$$[q,p^3] = [q,p^2]p + p^2[q,p] = 2i\hbar p^2 + i\hbar p^2 = 3i\hbar p^2$$

Andando avanti, troviamo

$$[q,p^n] = ni\hbar p^{n-1}$$

Sia a questo punto $\|\cdot\|$ la norma che vorrò mettere su $\mathcal{A}$.

$$\Rightarrow \|ni\hbar p^{n-1}\| = n\hbar \|p^{n-1}\|$$

Dunque, esplicitando il commutatore, avremo che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n\hbar \|p^{n-1}\| = \|[q,p^n]\| = \|qp^n - p^n q\| \leq 2\|q\|\|p^n\| \leq 2\|q\|\|p\|\|p^{n-1}\|$$

Osserviamo che possiamo dividere per $\|p^{n-1}\|$, infatti

$\|p^{n-1}\| = 0 \iff p^{n-1} = 0$, ma se $p^{n-1} = 0 \Rightarrow [q,p^{n-1}] = 0$ e $[q,p^{n-1}] = (n-1)\hbar p^{n-2} \Rightarrow p^{n-2} = 0$ e così via ottenendo $p = 0$, ma non è possibile, poiché p deve essere tale da soddisfare il principio di Heisenberg $\Rightarrow \|p^{n-1}\| \neq 0$

$$\Rightarrow n\hbar \leq 2\|q\|\|p\| \rightarrow \|q\|\|p\| \geq \frac{n\hbar}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il che è assurdo se p e q sono due vettori di $\mathcal{A}$, poiché $\|q\|$ e $\|p\|$ sono due numeri. Quindi questa tipologia di formulazione del problema non può dar luogo a soluzioni, poiché p e q non sono limitati.

Supponiamo (anche se non è vero) che p e q siano limitati e definiamo $U(\alpha) = e^{i\alpha q}$, $V(\beta) = e^{i\beta p}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (dove quegli esponenziali sono da intendersi come operatori esponenziali definiti tramite la serie di "potenze").

Definiamo $Z(t) := e^{it\alpha q} e^{it\beta p} e^{-it(\alpha q + \beta p)}$ e proviamo a farne la derivata

$$\frac{d}{dt}(e^{it\alpha q}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{i(t+h)\alpha q} - e^{it\alpha q}}{h} = e^{it\alpha q} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih\alpha q} - \mathbb{1}}{h}$$

$$= e^{it\alpha q} \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} i^n \alpha^n h^{n-1} q^n = i\alpha q\, e^{it\alpha q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(Z(t)) = e^{it\alpha q}(i\alpha q) e^{it\beta p} e^{-it(\alpha q+\beta p)} + e^{it\alpha q} e^{it\beta p}(i\beta p) e^{-it(\alpha q+\beta p)} - e^{it\alpha q} e^{it\beta p}(i(\alpha q+\beta p)) e^{-it(\alpha q+\beta p)} =$$

$= e^{it\alpha q}\left[i\alpha q, e^{it\beta p}\right] e^{-it(\alpha q+\beta p)}$

Supponiamo di aver scelto una unità di misura per cui $\hbar = 1$

$\Rightarrow [q, e^{it\beta p}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it\beta)^n}{n!}[q, p^n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it\beta)^n}{n!} i n p^{n-1}$

$= -t\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it\beta p)^{n-1}}{(n-1)!} = -t\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it\beta p)^n}{n!} = -t\beta e^{it\beta p}$

Per cui

$\frac{d}{dt}(Z(t)) = -i\alpha\beta t\, e^{it\alpha q} e^{it\beta p} e^{-it(\alpha q+\beta p)} = -i\alpha\beta t\, Z(t)$

Dunque $Z(t)$ è soluzione di $\begin{cases} Z'(t) = -i\alpha\beta t\, Z(t) \\ Z(0) = \mathbb{1} \end{cases}$

$\Rightarrow Z(t) = e^{-i\alpha\beta\frac{t^2}{2}}\mathbb{1}$, per cui andando a sostituire nella def di Z

$e^{it\alpha q} e^{it\beta q} = e^{-i\alpha\beta\frac{t^2}{2}} e^{it(\alpha q+\beta p)}$. Se calcolo per $t=1$, ottengo

$U(\alpha)V(\beta) = e^{-\frac{i\alpha\beta}{2}} e^{i(\alpha q+\beta p)}$

Ma dalla stessa relazione da cui ricavo l'identità che ho appena scritto, deduco pure $e^{it\beta p} e^{it\alpha q} = e^{i\alpha\beta t^2/2} e^{it(\alpha q+\beta p)}$ che in $t=1$

$V(\beta)U(\alpha) = e^{\frac{i\alpha\beta}{2}} e^{i(\alpha q+\beta p)}$

$\Rightarrow$ indipendentemente dalla scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U(\alpha)V(\beta) = e^{-i\alpha\beta} V(\beta)U(\alpha)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ detta

relazione di Weyl

Inoltre a questa si aggiungono le altre relazioni che deduciamo dalla stessa definizione di U e V, cioé

$U(\alpha_1+\alpha_2) = U(\alpha_1)U(\alpha_2)$, $V(\beta_1+\beta_2) = V(\beta_1)V(\beta_2)$

$U^*(\alpha) = U(-\alpha)$, $V^*(\beta) = V(-\beta)$.

Allora, quello che facciamo è cercare una C^*-algebra che soddisfi la relazione di Weyl e le altre quattro equazioni.

Date $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ possiamo definire anche, se $z = \alpha + i\beta$, $W(z) := e^{+\frac{i}{2}\alpha\beta} U(\alpha)V(\beta)$ che soddisfa le cosiddette relazioni di Weyl in forma complessa.

LEMMA

(a) Siano $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ che soddisfano le relazioni di Weyl

$\Rightarrow W(z)$ è tale che:

(i) $W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(z_1,z_2)} W(z_1+z_2)$, dove $\sigma(z_1,z_2) := \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)$ è la forma simplettica standard di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(X spazio vettoriale, $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineare, antisimmetrica è una forma simplettica se è non degenere, cioé $\sigma(x,y) = 0\ \forall x \in X \Rightarrow y = 0$)

(ii) $W^*(z) = W(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(b) Sia $W(z)$ che soddisfa le relazioni di Weyl in forma complessa, $z = \alpha + i\beta$, $\Rightarrow U(\alpha) := W(\alpha + i0)$ e $V(\beta) := W(0 + i\beta)$ soddisfano le relazioni di Weyl

dim

(a)

(i) Siano $z_1 = \alpha + i\beta$ e $z_2 = \gamma + i\delta$

$$\Rightarrow W(z_1)W(z_2) = e^{+i/2\alpha\beta} U(\alpha)V(\beta) e^{+i/2\gamma\delta} U(\gamma)V(\delta)$$
$$= e^{+i/2(\alpha\beta+\gamma\delta)} U(\alpha)V(\beta)U(\gamma)V(\delta)$$
$$\xrightarrow{\text{relazione di Weyl}} = e^{+i/2(\alpha\beta+\gamma\delta)} U(\alpha) e^{i\gamma\beta} U(\gamma)V(\beta)V(\delta)$$
$$= e^{+i/2[(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) - \alpha\delta - \gamma\beta]} e^{i\gamma\beta} U(\alpha+\gamma)V(\beta+\delta)$$
$$= e^{+i/2(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)} U(\alpha+\gamma)V(\beta+\delta)\, e^{+i/2(\gamma\beta - \alpha\delta)}$$
$$= W(z_1+z_2)\, e^{-i/2(\alpha\delta - \beta\gamma)} = e^{-i/2\,\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)} W(z_1+z_2)$$
$$= e^{-\frac{i}{2}\sigma(z_1,z_2)} W(z_1+z_2)$$

(ii) $W(-z) = e^{i/2\alpha\beta} U(-\alpha)V(-\beta) = e^{i/2\alpha\beta} U^*(\alpha)V^*(\beta)$
$$= \left(e^{-i/2\alpha\beta} V(\beta)U(\alpha)\right)^* = \left(e^{i/2\alpha\beta} U(\alpha)V(\beta)\right)^* = W^*(z)$$

∎

A questo punto sia $H = L^2(\mathbb{R})$. Sappiamo che le C^*-algebre non commutative sono isomorfe a qualche $*$-sottoalgebra chiusa di un qualche $B(H)$, dunque prendiamo due operatori su $L^2(\mathbb{R})$ così definiti:

$(U(\alpha)\psi)(x) := e^{i\alpha x}\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

$(V(\beta)\psi)(x) := \psi(x+\beta)$, $x \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

Verifichiamo che questi due operatori soddisfino le relazioni di Weyl. Cominciamo dalla formula di commutazione

$$(U(\alpha)V(\beta)\psi)(x) = e^{i\alpha x}(V(\beta)\psi)(x) = e^{i\alpha x}\psi(x+\beta)$$
$$(V(\beta)U(\alpha)\psi)(x) = (U(\alpha)\psi)(x+\beta) = e^{i\alpha(x+\beta)}\psi(x+\beta)$$
$$= e^{i\alpha\beta} e^{i\alpha x}\psi(x+\beta) = e^{i\alpha\beta}(U(\alpha)V(\beta)\psi)(x)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \psi \in L^2$$

$$\Rightarrow U(\alpha)V(\beta) = e^{-i\alpha\beta} V(\beta)U(\alpha)$$

Passiamo a quelle sulla somma: siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi

$$[U(\alpha_1+\alpha_2)(\psi)](x) = e^{i(\alpha_1+\alpha_2)x}\psi(x) = e^{i\alpha_1 x} e^{i\alpha_2 x}\psi(x)$$
$$= e^{i\alpha_1 x}[U(\alpha_2)(\psi)](x) = [(U(\alpha_1)U(\alpha_2))(\psi)](x)$$

$\Rightarrow U(\alpha_1+\alpha_2) = U(\alpha_1)U(\alpha_2)$ poiché non dipende da $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

Siano $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$[V(\beta_1+\beta_2)(\psi)](x) = \psi(x+\beta_1+\beta_2) = [V(\beta_2)(\psi)](x+\beta_1)$$
$$= [(V(\beta_1)V(\beta_2))(\psi)](x)$$ ∎

$\Rightarrow V(\beta_1+\beta_2) = V(\beta_1)V(\beta_2)$, poiché non dipende da $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

Mostriamo quelle sull'involuzione

$$\langle \varphi, U(-\alpha)(\psi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\,[U(-\alpha)(\psi)](x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, e^{-i\alpha x}\psi(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{i\alpha x}\varphi(x)}\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{[U(\alpha)(\varphi)](x)}\,\psi(x)\,dx$$

$$= \langle U(\alpha)(\varphi), \psi\rangle \Rightarrow U^*(\alpha) = U(-\alpha)$$

$$\langle \varphi, V(-\beta)(\psi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\,[V(-\beta)(\psi)](x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\,\psi(x-\beta)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(y+\beta)}\,\psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \overline{[V(\beta)(\varphi)](x)}\,\psi(x)$$

$$= \langle V(\beta)(\varphi), \psi\rangle \Rightarrow V^*(\beta) = V(-\beta)$$

Dunque, $U(\alpha)$ e $V(\beta)$ come li ho definiti prima soddisfano le relazioni di Weyl e sono dette <u>realizzazione di Schröedinger</u> (delle relazioni di Weyl). Scegliamo allora come C^*-algebra la chiusura (in norma) della *-sottoalgebra di $B(L^2(\mathbb{R}))$ generata da $\{U(\alpha), V(\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e la indichiamo con W. Essa è detta <u>C^*-algebra di Weyl</u> e risolve il nostro problema.

<u>OSS</u>

Prendiamo $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists R>0 \text{ t.c. } \psi(x)=0 \ \forall x : |x| \geq R\}$ d$L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{d\alpha}\left([U(\alpha)(\psi)](x)\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(e^{i\alpha x}\psi(x)\right) = ixe^{i\alpha x}\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha}\left([U(\alpha)(\psi)](x)\right)\Big|_{\alpha=0} = ix\psi(x)$$

$$\frac{d}{d\beta}\left([V(\beta)(\psi)](x)\right) = \frac{d}{d\beta}\left(\psi(x+\beta)\right) = \psi'(x+\beta) \Rightarrow \frac{d}{d\beta}\left([V(\beta)(\psi)](x)\right)\Big|_{\beta=0} = \psi'(x)$$

Definiamo allora due operatori su $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

$$q, p : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$(q\psi)(x) = x\psi(x) \quad , \quad (p\psi)(x) = -i\psi'(x)$$

che sono ben definiti, poiché se $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e dunque sia $x\psi(x)$ che $-i\psi'(x)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$, poiché si annullano fuori da due compatti.

Dunque le derivate calcolate prima le possiamo riscrivere come

$$\frac{d}{d\alpha}(U(\alpha)\psi)(x)\Big|_{\alpha=0} = iq\psi \quad , \quad \frac{d}{d\beta}(V(\beta)\psi)\Big|_{\beta=0} = ip\psi$$

e

$\frac{d}{d\alpha}(U(\alpha)\psi) = iqU(\alpha)\psi$, $\frac{d}{d\beta}(V(\beta)\psi) = ipV(\beta)\psi$

Se dunque p e q fossero numeri potrei affermare che

"$U(\alpha) = e^{i\alpha q}$" e "$V(\beta) = e^{i\beta p}$"

Questa cosa avrà un senso in futuro. Inoltre

$$([q,p]\psi)(x) = (qp\psi)(x) - (pq\psi)(x) = -ix\psi'(x) + i\frac{d}{dx}(x\psi(x))$$
$$= -ix\psi'(x) + i\psi(x) + ix\psi'(x)$$
$$= i\psi(x)$$

$\Rightarrow [q,p] = i\mathbb{1}$ che era proprio la relazione di commutazione canonica.

Adesso siccome W è una C^*-algebra avrà delle rappresentazioni. In particolare consideriamo la rappresentazione

$$\pi_S : W \longrightarrow B(L^2(\mathbb{R})) \quad \text{(è praticamente un'immersione)}$$
$$A \longmapsto \dot{A}$$

detta rappresentazione di Schröedinger di W.

Chiaramente, questa non è l'unica rappresentazione di W. Quello che vogliamo mostrare è che sono tutte equivalenti.

DEF

Sia π una rappresentazione di W. Dirò che π è regolare se $\forall z \in \mathbb{C}$ e $\forall x \in H_\pi$ la funzione $t \in \mathbb{R} \longmapsto \pi(W(tz))x \in H_\pi$ è continua (cioé $t \longmapsto \pi(W(tz))$ è fortemente continua) dove $W(z) = e^{i/2\alpha\beta}U(\alpha)V(\beta)$ se $z = \alpha + i\beta$.

PROP

π è regolare $\iff \forall z \in \mathbb{C}, \forall x,y \in H_\pi \quad t \longmapsto \langle x, \pi(W(tz))y\rangle$ è continua

dim

$\Rightarrow$) ovvio per la continuità di $(x,y) \longmapsto \langle x,y\rangle$.
Composizione di continue è continua

$\Leftarrow$) Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e andiamo a studiare

$$\|\pi(W(tz))x - \pi(W(t_0z))x\|^2 =$$
$$= \|\pi(W(tz))x\|^2 + \|\pi(W(t_0z))x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi(W(t_0z))x, \pi(W(tz))x\rangle$$

Ora, però, $\forall z \in \mathbb{C}$ $W(-z) = W^*(z)$, inoltre

$W(z)W(-z) = e^{-i/2\,\sigma(z,-z)}W(0) = e^0 W(0) = \mathbb{1} = W(-z)W(z)$,

dunque $W(z)W^*(z) = W^*(z)W(z) = \mathbb{1} \Rightarrow W$ è unitario $\forall z \in \mathbb{C}$.

A questo punto, poiché π è una rappresentazione, in particolare è uno *-omomorfismo, per cui

$\pi(W(z))\pi^*(W(z)) = \pi(W(z))\pi(W^*(z)) = \pi(W(z)W^*(z)) = \pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e

analogamente, vale pure per $\pi^*(W(z))\pi(W(z)) \Rightarrow \pi(W(z))$ è unitario $\forall z \in \mathbb{C}$ per cui, tornando all'uguaglianza abbiamo

$$\|\pi(W(tz))x - \pi(W(t_0 z))x\|^2 = 2\left(\|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle x, \pi(W(-t_0 z)W(tz))x\rangle\right)$$
$$= 2\left(\|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle x, \pi(W((t-t_0)z))x\rangle\right) \xrightarrow{t\to t_0} 0$$

$$\downarrow t \to t_0 \qquad \Uparrow$$
$$\langle x, \pi(W(0))x\rangle = \|x\|^2$$

■

PROP

La rappresentazione di Schröedinger è regolare

dim

Sfruttiamo la caratterizzazione appena vista. Il mio H_π adesso è $L^2(\mathbb{R})$, dunque prendiamo $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ e scriviamo quel prodotto scalare

$$\langle \varphi, \pi_S(W(tz))(\psi)\rangle = \langle \varphi, e^{\frac{i}{2}t^2\alpha\beta} U(t\alpha)V(t\beta)\psi\rangle$$
$$= e^{\frac{i}{2}t^2\alpha\beta}\langle U(-t\alpha)\varphi, V(t\beta)\psi\rangle$$

Basta dunque mostrare che $\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto U(\alpha)\varphi \in L^2$

$\beta \in \mathbb{R} \longmapsto V(\beta)\psi \in L^2$

sono funzioni continue.

$$\|U(\alpha)\psi - U(\alpha_0)\psi\|_{L^2}^2 = \|U(\alpha)(\psi - U^*(\alpha)U(\alpha_0)\psi)\|_{L^2}^2 = \overset{\text{ma } U \text{ è unitario}}{}$$
$$= \|\psi - U^*(\alpha)U(\alpha_0)\psi\|_{L^2}^2$$
$$= \|\psi - U(-\alpha)U(\alpha_0)\psi\|_{L^2}^2$$
$$= \|\psi - U(\alpha_0 - \alpha)\psi\|_{L^2}^2$$

Basta allora dimostrare che ho continuità in 0.

$$\|U(\alpha)\psi - \psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{i\alpha x}\psi(x) - \psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{i\alpha x} - 1|^2}_{\leq 4} |\psi(x)|^2 dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Dunque l'argomento è dominato da $4|\psi|^2$, integrabile poiché $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ per TCD

$\|U(\alpha)\psi - \psi\|_{L^2}^2 \xrightarrow{\alpha\to 0} 0 \Rightarrow U(\alpha)\psi$ è continua

Passiamo a $V(\beta)$. Supponiamo che $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Sotto questa ipotesi ψ è chiaramente uniformemente continua. Per cui, preso $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : |\beta| < \delta \Rightarrow |\psi(x+\beta) - \psi(x)| < \varepsilon$

Avremo allora, controllando solo in 0

$$\|V(\beta)\psi - \psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x+\beta) - \psi(x)|^2 dx = \int_{-(R+1)}^{R+1} |\psi(x+\beta) - \psi(x)|^2 dx$$

dove $R > 0$ è t.c. $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq [-R, R]$ $\leq \varepsilon^2(2R+2)$, dunque $\lim_{\beta\to 0} \|V(\beta)\psi - \psi\|_{L^2} = 0$

Ora, siccome $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$, preso $\varepsilon > 0$ $\exists \varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ t.c. $\|\psi - \varphi_\varepsilon\|_{L^2} < \varepsilon$ (con $\psi \in L^2(\mathbb{R})$). Inoltre, essendo $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, per lo stesso ε, $\exists \delta > 0 : |\beta| < \delta \Rightarrow$

$\|V(\beta)\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L^2} < \varepsilon$. Avremo allora

$$\|V(\beta)\psi - \psi\|_{L^2} = \|[V(\beta)\psi - V(\beta)\varphi_\varepsilon] + [V(\beta)\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon] + [\varphi_\varepsilon - \psi]\|_{L^2}$$
$$\leq \|V(\beta)(\psi - \varphi_\varepsilon)\|_{L^2} + \|V(\beta)\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L^2} + \|\varphi_\varepsilon - \psi\|_{L^2}$$
$$= 2\|\varphi_\varepsilon - \psi\|_{L^2} + \|V(\beta)\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L^2} < 3\varepsilon$$

$\Rightarrow V(\beta)\psi$ è continua

$\Rightarrow$ quel prodotto scalare è continuo $\Rightarrow \pi_s$ è regolare. ∎

LEMMA 1

Sia π una rappresentazione regolare di $W \Rightarrow$

(i) $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^2)\ \exists!\ W_\pi(f) \in B(H_\pi) : \forall \xi, \eta \in H_\pi$
$\langle \xi, W_\pi(f)\eta\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\langle \xi, \pi(W(z))\eta\rangle\, dz$

(ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, $W_\pi(f) = 0 \iff f \equiv 0$.

dim

(i) Definiamo $S_f(\xi,\eta) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\langle \xi, \pi(W(z))\eta\rangle\, dz$

S_f è chiaramente sesquilineare, poiché l'integrale è lineare e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è sesquilineare. Mostriamo allora che è limitata

$$|S_f(\xi,\eta)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|\,|\langle \xi, \pi(W(z))\eta\rangle|\, dz$$
$$\overset{CS}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|\,\|\xi\|\,\|\pi(W(z))\eta\|\, dz \qquad \text{im}_{\pi(W(z))} \text{ è unitario}$$
$$= \|\xi\|\|\eta\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|\, dz \leq C\|\xi\|\|\eta\|$$
poiché f è sommabile

$\Rightarrow S_f$ è sesquilineare e limitata $\Rightarrow$ per il solito lemma $\exists!\ W_\pi(f) \in B(H_\pi)$ t.c. $S_f(\xi,\eta) = \langle \xi, W_\pi(f)\eta\rangle$

(ii) $\Rightarrow$) Sia $W_\pi(f) = 0$ e consideriamo, preso $z \in \mathbb{C}$ e $\xi, \eta \in H_\pi$

$$\langle \pi(W(z))\xi, W_\pi(f)\pi(W(z))\eta\rangle = \text{(per il punto (i))}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\langle \pi(W(z))\xi, \pi(W(z))\pi(W(\zeta))\eta\rangle\, dz$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\langle \xi, \pi(W(-z)W(z)W(\zeta))\eta\rangle\, dz$$

$$\left[\text{ma } W(-z)W(z)W(\zeta) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(-z,z)}W(z-z)W(\zeta) = e^{\frac{1}{2}\sigma(z,z)}e^{-\frac{i}{2}(z-z,\zeta)}W(z) \overset{\text{poiché } \sigma(z-\zeta,\zeta)=\sigma(z,\zeta)}{=} e^{-i\sigma(z,\zeta)}W(z)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\, e^{-i\sigma(z,\zeta)}\langle \xi, \pi(W(z))\eta\rangle\, dz \qquad \left(\text{posto } \begin{matrix} z=\alpha+i\beta \\ \zeta = x+iy \end{matrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha,\beta)\, e^{-i(\alpha y - \beta x)}\langle \xi, \pi(W(\alpha+i\beta))\eta\rangle\, d\alpha\, d\beta$$

che è la trasformata di Fourier di $(\alpha,\beta) \mapsto f(\alpha,\beta)\langle \xi, \pi(W(\alpha+i\beta))\eta\rangle$ calcolata in $(y,-x)$. Allora, poiché $W_\pi(f)=0$,
$f(\alpha,\beta)\langle \xi, \pi(W(\alpha+i\beta))\eta\rangle = 0$ q.o. $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
Ma per ipotesi f è continua, inoltre anche $\pi(W(\alpha+i\beta))\eta$ è continua per definizione di rappresentazione regolare, perciò $f(\alpha,\beta)\langle \xi, \pi(W(\alpha+i\beta))\eta\rangle$ è continua $\Rightarrow$ è nulla ovunque (se così non fosse basta andare per assurdo e usare la permanenza del segno). Ora, però, $\pi(W(z))$ è unitario
$\Rightarrow \forall \xi \neq 0 \in H_\pi \ \exists z\in\mathbb{C}$ con $\langle \xi, \pi(W(z))\xi\rangle \neq 0$ e dunque
$\exists B_r(z)$ t.c. $\langle \xi, \pi(W(z'))\xi\rangle \neq 0 \ \forall z'\in B_r(z)$
$\Rightarrow f(z')=0 \ \forall z'\in B_r(z) \Rightarrow f\equiv 0$.
$\Leftarrow$) ovvio: se $f\equiv 0$ avremo $\langle \xi, W_\pi(f)\eta\rangle = 0 \ \forall \xi,\eta\in H_\pi \Rightarrow W_\pi(f)=0$ ∎

Introduciamo ora la notazione bra-Ket

DEF
Dati due vettori $x,y\in H$, con H spazio di Hilbert, definiamo
$|x\rangle\langle y|(z) := \langle y,z\rangle x \quad \forall z\in H$

NOTAZ.
Dato H Hilbert, in fisica quantistica si indicano i vettori $\xi\in H$ con $|\xi\rangle$, detti Ket, e si indica il funzionale $\xi\in H \mapsto \langle \eta,\xi\rangle \in \mathbb{C}$, $\eta\in H$ con $\langle\eta|$, detto bra. Il risultato dell'applicazione del funzionale $\langle\eta|$ al vettore $|\xi\rangle$, cioè il numero complesso $\langle\eta,\xi\rangle$, viene allora indicato con $\langle\eta|\xi\rangle$, detto bra-Ket (bracket = parentesi).
Con queste notazioni l'azione dell'operatore $|\xi\rangle\langle\eta|$ su $x\in H$ si indica con $(|\xi\rangle\langle\eta|)|x\rangle = |\xi\rangle\langle\eta|x\rangle = \langle\eta,x\rangle\xi$.

LEMMA
Sia H uno spazio di Hilbert e siano $x,y\in H$
(i) $|x\rangle\langle y| \in B(H)$
(ii) $\| |x\rangle\langle y| \| = \|x\|\cdot\|y\|$
(iii) $(|x\rangle\langle y|)^* = |y\rangle\langle x|$
(iv) $(|x\rangle\langle y|)(|x'\rangle\langle y'|) = \langle y,x'\rangle(|x\rangle\langle y'|)$

dim
(i) Sia $z\in B_1(0)$
$\| |x\rangle\langle y|(z)\| = \|\langle y,z\rangle x\| = |\langle y,z\rangle|\,\|x\| \leq \|y\|\,\|z\|\,\|x\| \leq \|x\|\,\|y\|$
$\Rightarrow \| |x\rangle\langle y|\| < +\infty \Rightarrow |x\rangle\langle y| \in B(H)$
(ii) Basta trovare uno z che realizza l'uguaglianza, visto che ho usato Cauchy-Schwarz prendiamo $z = y/\|y\|$, avremo

$\| |x\rangle\langle y|(z)\| = \| \langle y, z\rangle x\| = |\langle y, \frac{y}{\|y\|}\rangle| \|x\| = \|x\|\|y\|$

$\Rightarrow \| |x\rangle\langle y|\| = \|x\|\|y\|$

(iii) Come al solito, mostriamo che quello è un aggiunto: siano $\xi, \eta \in H \Rightarrow$

$\langle |y\rangle\langle x|\xi, \eta\rangle = \langle \langle x, \xi\rangle y, \eta\rangle = \langle \xi, x\rangle\langle y, \eta\rangle =$

$= \langle \xi, \langle y, \eta\rangle x\rangle = \langle \xi, |x\rangle\langle y|\eta\rangle$

$\Rightarrow (|x\rangle\langle y|)^* = |y\rangle\langle x|$

(iv) Sia $z \in H$

$\Rightarrow (|x\rangle\langle y|)(|x'\rangle\langle y'|(z)) = (|x\rangle\langle y|)(\langle y', z\rangle x') = \langle y, \langle y', z\rangle x'\rangle x$

$= \langle y, x'\rangle\langle y', z\rangle x = \langle y, x'\rangle (|x\rangle\langle y'|(z))$

$\Rightarrow |x\rangle\langle y||x'\rangle\langle y'| = \langle y, x'\rangle |x\rangle\langle y'|$

LEMMA 2

Sia π_S la rappresentazione di Schröedinger $\Rightarrow$ la $W_{\pi_S}(f_0)$ associata a $f_0(z) := e^{-|z|^2/4}$ è $W_{\pi_S}(f_0) = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, dove $\psi_0(x) := \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2}$

dim

Per il lemma 1 precedente, $W_{\pi_S}(f_0)$ è tale che $\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo $\langle \varphi, W_{\pi_S}(f_0)\psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|\alpha+i\beta|^2}{4}} \langle \varphi, \pi_S(W(\alpha+i\beta))\psi\rangle \, d\alpha d\beta =$

Calcoliamo quel prodotto scalare

$\langle \varphi, \pi_S(W(\alpha+i\beta))\psi\rangle = e^{i/2\alpha\beta}\langle \varphi, U(\alpha)V(\beta)\psi\rangle =$

$= e^{i/2\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\,[U(\alpha)V(\beta)\psi](x)\,dx$

$= e^{i/2\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, e^{i\alpha x}[V(\beta)\psi](x)\,dx$

$= e^{i/2\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, e^{i\alpha x}\psi(x+\beta)\,dx$

Allora abbiamo

$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}\left[\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, e^{i\alpha(x+\beta/2)}\psi(x+\beta)\,dx\right] d\alpha d\beta$

Per il teorema di Tonelli abbiamo

$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}} |\overline{\varphi(x)}|\,|e^{i\alpha(x+\beta/2)}|\,|\psi(x+\beta)|\,dx\right] d\alpha d\beta =$

$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}|e^{i\alpha(x+\beta/2)}|\,|\overline{\varphi(x)}|\,|\psi(x+\beta)|\,dx\,d\alpha\,d\beta$

ma $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}} |\overline{\varphi(x)}|\,|e^{i\alpha(x+\beta/2)}|\,|\psi(x+\beta)|\,dx\right] d\alpha\,d\beta =$

$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}} |\overline{\varphi(x)}|\,|\psi(x+\beta)|\,dx\right] d\alpha\,d\beta < +\infty$ poiché φ e $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

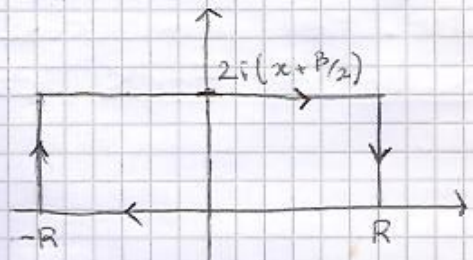
dunque quella funzione che è il prodotto di tutto è integrabile in $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow$ per Fubini, posso scambiare l'ordine di integrazione e trovo

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(x+\beta)\,e^{-\beta^2/4}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}} e^{i\alpha(x+\beta/2)}\,d\alpha\right] dx\,d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(x+\beta)\,e^{-\beta^2/4}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\left[(\alpha-2i(x+\beta/2))^2+4(x+\beta/2)^2\right]}\,d\alpha\right] dx\,d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(x+\beta)\,e^{-\beta^2/4}\,e^{-(x+\beta/2)^2}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\left[\alpha-2i(x+\beta/2)\right]^2} d\alpha\right] dx\,d\beta$$

A questo punto l'idea è di integrare la forma differenziale $e^{-\frac{1}{4}(z-2i(x+\beta/2))^2}\,dz$ su γ_R e sfruttare il teorema di Morera.



Ad ogni modo, quell'integrale fa $2\sqrt{\pi}$
Dunque tornando alle uguaglianze abbiamo

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(x+\beta)\,e^{-\beta^2/4}\,e^{-(x+\beta/2)^2}\,dx\,d\beta = \quad (x+\beta=y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(y)\,e^{-\frac{(y-x)^2}{4}}\,e^{-\frac{(x+y)^2}{4}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\psi(y)\,e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi(x)}\,\frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}\,dx \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-y^2/2}\,\psi(y)\,dy = \langle\varphi,\psi_0\rangle\langle\psi_0,\psi\rangle$$

$= \langle\varphi,\langle\psi_0,\psi\rangle\psi_0\rangle = \langle\varphi,|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi\rangle$, indipendentemente da φ e $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow W_{\pi_S}(f_0) = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$

L'abbiamo utilizzato nella dimostrazione quindi richiamiamolo

TEOREMA (Fubini)

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi di misura e sia $f: X\times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ misurabile (rispetto alla σ-algebra in $X\times Y$ generata dagli insiemi $\{E\times F \mid E\in\mathcal{M}, F\in\mathcal{N}\}$)

$\Rightarrow$ se $\int_X d\mu(x)\int_Y d\nu(y)\,|f(x,y)| < +\infty$

$$\Rightarrow \int_X d\mu(x)\int_Y d\nu(y)\,f(x,y) = \int_Y d\nu(y)\int_X d\mu(x)\,f(x,y) = \int_{X\times Y} d(\mu\times\nu)(x,y)\,f(x,y)$$

dove $\mu\times\nu$ è l'unica misura sulla σ-algebra definita sopra t.c. $(\mu\times\nu)(E\times F) = \mu(E)\nu(F)$

oss
ψ_0 è detto lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico.
$|\psi_0><\psi_0|$ è un proiettore ortogonale su $\mathbb{C}\psi_0$, infatti
$(|\psi_0><\psi_0|)^2 = |\psi_0><\psi_0|\psi_0><\psi_0| = <\psi_0,\psi_0>|\psi_0><\psi_0|$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\ |\psi_0><\psi_0| = |\psi_0><\psi_0|$$

$\Rightarrow$ idempotente
$(|\psi_0><\psi_0|)^* = |\psi_0><\psi_0| \Rightarrow$ autoaggiunto
Inoltre, chiaramente, proietta su $\mathbb{C}\psi_0$ poiché comunque presa $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ $|\psi_0><\psi_0|(\varphi) = <\psi_0,\varphi>\psi_0$ con $<\psi_0,\varphi> \in \mathbb{C}$

Veniamo ora ad un risultato importante. Per prima cosa introduciamo un nuovo oggetto, lo <u>stato di Fock</u>, che indico con ω_0.

$$\omega_0 : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$W(z) \longmapsto e^{-\frac{|z|^2}{4}}$$

<u>TEOREMA</u>
La rappresentazione di Schröedinger π_S è irriducibile e coincide con la rappresentazione GNS definita dallo stato di Fock ω_0.
<u>dim</u>
Sia $K \neq \{0\} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un sottospazio invariante per $\pi_S \Rightarrow$ anche $K^\perp$ è invariante per π_S.
Definiamo $\pi_1 := \pi_S|_K$ e $\pi_2 := \pi_S|_{K^\perp}$. Poiché π_S è regolare, sono regolari anche π_1 e π_2. Ora, poiché f_0 non è nulla, per il lemma 1 $W_{\pi_1}(f_0) \neq 0$ e $W_{\pi_2}(f_0) \neq 0$
$\Rightarrow \exists \psi_1 \in K$ e $\psi_2 \in K^\perp$ tali che $\varphi_1 := W_{\pi_1}(f_0)\psi_1 \neq 0$ e $\varphi_2 := W_{\pi_2}(f_0)\psi_2 \neq 0$. Ora, chiaramente φ_1 e $\varphi_2 \in \mathrm{Im}(W_\pi(f_0))$ ma, per il lemma 2, $W_\pi(f_0) = |\psi_0><\psi_0|$, che era un proiettore ortogonale su $\mathbb{C}\psi_0$, per cui $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\varphi_1 = \alpha\psi_0$ e $\varphi_2 = \beta\psi_0 \Rightarrow$ assurdo, poiché $\varphi_1 \in K$ e $\varphi_2 \in K^\perp$ e dunque non possono essere multipli dello stesso vettore.
$\Rightarrow K = \{0\}$, cioè π_S è irriducibile. Allora, da questo segue che ogni funzione $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ è ciclica per $\pi_S \Rightarrow \pi_S$ è la rappresentazione GNS di $\omega(A) := <\psi, \pi_S(A)\psi>$, con $A \in \mathcal{W}$.
Basta allora far vedere che $\exists \psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ con $\omega_0(W(z)) = <\psi_0, \pi_S(W(z))\psi_0>$ ma se prendo proprio

$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ avremo

$$\langle \psi_0, \pi_s(W(z))\psi_0 \rangle = \frac{e^{\frac{i}{2}\alpha\beta}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i\alpha x} e^{-\frac{(x+\beta)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{e^{\frac{i}{2}\alpha\beta}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta^2/2} \cdot e^{-(x^2 - x(i\alpha - \beta))} dx$$

$$= \frac{e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} e^{-\beta^2/2} e^{\left(\frac{i\alpha-\beta}{2}\right)^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x - \frac{i\alpha-\beta}{2}\right)^2} dx$$

$$= e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} e^{-\beta^2/2} e^{-\alpha^2/4} e^{\beta^2/4} e^{-\frac{i}{2}\alpha\beta} = e^{-(\alpha^2+\beta^2)/4}$$

$$= e^{-|z|^2/4} = \omega_0(W(z)) \blacksquare$$

OSS

Da questo otteniamo subito che lo stato di Fock è puro, poiché la sua rappresentazione GNS è irriducibile.

TEOREMA (Von Neumann)

Sia π una rappresentazione regolare e irriducibile di W $\Rightarrow$ π è unitariamente equivalente a π_s

dim

Come visto nel teorema precedente, sappiamo che π_s è la rappresentazione GNS di ω_0, che per il teorema GNS è unica a meno di equivalenze unitarie. Siccome π è irriducibile, preso $x_0 \in H_\pi \setminus \{0\}$ è ciclico. Se riesco a trovare un $x_0 \in H_\pi$, con $\|x_0\| = 1$, t.c. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\omega_0(W(z)) = \langle x_0, \pi(W(z))x_0 \rangle$ ho fatto, poiché così facendo, π è unitariamente equivalente a π_s.

Definiamo $P := W_\pi(f_0)$, con $f_0(z) = e^{-|z|^2/4}$, cioè, per il lemma 1 $\forall \xi, \eta \in H_\pi$ $\langle \xi, P\eta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(z))\eta \rangle dz$

Per lo stesso lemma, poiché $f_0 \neq 0 \Longrightarrow P \neq 0$. Il punto è far vedere che P è un proiettore ortogonale, cosa che in un certo senso abbiamo già visto nel caso in cui usiamo π_s.

Cominciamo da $P = P^*$:

$$\langle P\xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, P\xi \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} \overline{\langle \eta, \pi(W(\alpha+i\beta))\xi \rangle} d\alpha d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} \langle \pi(W(\alpha+i\beta))\xi, \eta \rangle d\alpha d\beta$$

$\pi^*(W(z)) = \pi(W(-z))$

$$\overset{t=-\beta}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(\alpha-i\beta))\eta \rangle d\alpha d\beta$$

$$\overset{t=-\beta}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(\alpha+i\beta))\eta \rangle d\alpha d\beta$$

$= \langle \xi, P\eta \rangle \Rightarrow P = P^*$

Dobbiamo adesso mostrare che $P^2 = P$. A tal scopo, mostriamo che, preso comunque $z \in \mathbb{C}$ abbiamo $P\pi(W(z))P = e^{-\frac{|z|^2}{4}} P$. Siano allora $\xi, \eta \in H_\pi$

$$\langle \xi, (P\pi(W(z))P)\eta \rangle = \langle \xi, P((\pi(W(z))P)\eta) \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z_1|^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(z_1)W(z))P\eta \rangle \, dz_1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z_1|^2}{4}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z_2|^2}{4}} \langle \xi, \pi(W(z_1)W(z)W(z_2))\eta \rangle \, dz_2 \right) dz_1$$

Adesso, applicando come al solito prima Tonelli, vediamo che quell'integrale converge, per cui, per il teorema di Fubini, posso considerare l'integrale su $\mathbb{C}^2$. Inoltre

$$W(z_1)W(z)W(z_2) = e^{-i/2\,\sigma(z_1,z)} W(z_1+z)W(z_2)$$
$$= e^{-i/2\,\sigma(z_1,z)} e^{-i/2\,\sigma(z_1+z,z_2)} W(z_1+z_2+z)$$

Allora

$$\langle \xi, P\pi(W(z))P\eta \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{C}^2} e^{-\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{4}} e^{-\frac{i}{2}[\sigma(z_1,z)+\sigma(z_1+z,z_2)]} \langle \xi, \pi(\ldots$$

$$\ldots W(z_1+z_2+z))\eta \rangle \, dz_1 \, dz_2$$

A questo punto cambiamo variabile

$$\begin{cases} \xi_1 = z_1 + z_2 + z \\ \zeta_2 = z_1 - z_2 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = \dfrac{\xi_1 + \zeta_2 - z}{2} \\ z_2 = \dfrac{\xi_1 - \zeta_2 - z}{2} \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della Jacobiana

$$\det \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{1}_2 & \frac{1}{2}\mathbb{1}_2 \\ \frac{1}{2}\mathbb{1}_2 & -\frac{1}{2}\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

Dunque col cambio di variabile come diventa il nuovo esponente!

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{4}(|\xi_1 + \zeta_2 - z|^2 + |\xi_1 - \zeta_2 - z|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(2|\xi_1|^2 + 2|\zeta_2|^2 + 2|z|^2 + 2\cancel{Re(\bar{\xi}_1\zeta_2)} - 2Re(\bar{\xi}_1 z) - 2\cancel{Re(\bar{\zeta}_2 z)}$$
$$- 2\cancel{Re(\bar{\xi}_1\zeta_2)} - 2Re(\bar{\xi}_1 z) + 2\cancel{Re(\bar{\zeta}_2 z)})$$
$$= \frac{1}{2}(|\xi_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |z|^2) - Re(\bar{\xi}_1 z)$$

Mentre

$$\sigma(z_1,z) + \sigma(z_1+z,z_2) = \frac{1}{2}\sigma(\xi_1+\zeta_2-z,z) + \frac{1}{4}\sigma(\xi_1+\zeta_2+z, \xi_1-\zeta_2-z)$$
$$= \frac{1}{2}(\cancel{\sigma(\xi_1,z)} + \sigma(\zeta_2,z)) + \frac{1}{4}(-2\sigma(\zeta_2,\zeta_2) - 2\cancel{\sigma(\xi_1,z)}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma(\zeta_2, z) - \frac{1}{2}\sigma(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2}\sigma(\zeta_2, \zeta_1 + z) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_2(\zeta_1 + z))$$

$$\Rightarrow \langle \xi, P\pi(W(z))P\eta \rangle$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2} d\zeta_1 d\zeta_2 \, e^{-\frac{1}{8}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |z|^2)} \, e^{\frac{i}{4}\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 z)} \, e^{-\frac{i}{4}\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_2(\zeta_1 + z))} \langle \xi, \pi(W(\zeta_1))\eta \rangle$$

Sempre per Fubini, posso calcolare prima l'integrale in $d\zeta_2$, per cui

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{1}{8}|\zeta_2|^2} e^{-\frac{i}{4}\mathrm{Im}(\bar{\zeta}_2(\zeta_1 + z))} \, d\zeta_2 \qquad = \begin{pmatrix} \zeta_2 = x_2 + iy_2 \\ \zeta_1 = x_1 + iy_1 \\ z = \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{8}(x_2^2 + y_2^2)} e^{-\frac{i}{4}(x_2(y_1 + \beta) - y_2(x_1 + \alpha))} \, dx_2 dy_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{8}x_2^2} e^{-\frac{i}{4}x_2(y_1 + \beta)} \, dx_2 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{8}y_2^2} e^{\frac{i}{4}y_2(x_1 + \alpha)} \, dy_2$$

Facendo calcoli troviamo che

$$= \left(2\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{8}(y_1 + \beta)^2}\right) \cdot \left(2\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{8}(x_1 + \alpha)^2}\right)$$

$$= 8\pi \, e^{-\frac{1}{8}(y_1^2 + x_1^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2y_1\beta + 2x_1\alpha)}$$

$$= 8\pi \, e^{-\frac{1}{8}(|\zeta_1|^2 + |z|^2)} \, e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 z)}$$

Tornando all'integrale abbiamo

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{1}{8}(|\zeta_1|^2 + |z|^2)} \cancel{e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 z)}} \, e^{-\frac{1}{8}(|\zeta_1|^2 + |z|^2)} \cancel{e^{\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\bar{\zeta}_1 z)}} \cdot \langle \xi, \pi(W(\zeta_1))\eta \rangle \, d\zeta_1$$

$$= e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{1}{4}|\zeta_1|^2} \langle \xi, \pi(W(\zeta_1))\eta \rangle \, d\zeta_1 = e^{-\frac{|z|^2}{4}} \langle \xi, P\eta \rangle$$

Dunque $P\pi(W(z))P = e^{-|z|^2/4}P$. In particolare, preso $z = 0$, avremo $W(0) = \mathbb{1} \Rightarrow \pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \Rightarrow P^2 = P \Rightarrow P$ è un proiettore ortogonale e poiché $P \neq 0$, $\exists\, x_0 \neq 0 \in \mathrm{Im}(P)$, cioè tale che $x_0 = Px_0$. È chiaro che posso prendere $\|x_0\| = 1$

$$\Rightarrow \langle x_0, \pi(W(z))x_0 \rangle = \langle Px_0, \pi(W(z))Px_0 \rangle = \langle x_0, P\pi(W(z))Px_0 \rangle$$

$$= e^{-|z|^2/4} \langle x_0, Px_0 \rangle = e^{-|z|^2/4}\|x_0\|^2 =$$

$$= e^{-|z|^2/4} = \omega_0(W(z))$$

■

Il teorema di Von Neumann ci dice quindi la rappresentazione di Schrödinger è l'unica vera interessante nell'algebra di Weyl e quindi dal punto di vista fisico questo vuol dire che esiste un'unica meccanica quantistica. Ci suggerisce, inoltre, un modo per rappresentare una classe più ampia di osservabili: prendiamo $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tale che anche

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (funzioni di questo tipo sono dense in $L^1(\mathbb{R}^2)$).
In tal caso, posso applicare la formula di inversione, per cui abbiamo $f(x,p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\alpha,\beta)\, e^{i(\alpha x + \beta p)}\, d\alpha d\beta$

Il termine $e^{i(\alpha x+\beta p)}$ è "moralmente" proprio l'operatore di Weyl nella forma complessa, poiché ricalcando il procedimento visto per costruire le relazioni di Weyl, $W(z) = " e^{i(\alpha q + \beta p)} "$. Questo suggerisce

DEF

La quantizzazione di Wigner-Weyl di f è l'operatore $Q(f) := W_{\pi_s}(\hat{f})$

OSS

Questo significa, per un lemma precedente, che $Q(f) \in B(L^2(\mathbb{R}))$ e che $\forall\, \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi, Q(f)\psi \rangle = \langle \varphi, W_{\pi_s}(\hat{f})\psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\alpha,\beta) \langle \varphi, \pi_s(W(\alpha+i\beta))\psi \rangle d\alpha d\beta$$

L'idea, quindi, è sostituire l'osservabile "classica" $f(x,p)$ con la sua versione "quantistica" e quello che faccio è "piazzare al posto di $e^{i(\alpha x+\beta p)}$ il corrispondente $\langle \varphi, \pi_s(W(\alpha+i\beta))\psi \rangle$".
In questo modo, se ho una certa osservabile nello spazio delle fasi (che è sufficiente a descrivere tutte le osservabili classiche) che è isomorfo a $\mathbb{R}^2$ nel caso di moto unidimensionale, come quello che stiamo studiando, essa si esprimerà come $f(x,p)$ e la sua gemella quantistica è $Q(f)$.
Chiediamoci ora cosa possiamo dire sulla dinamica di stati e osservabili. A monte, le osservabili erano classi di equivalenza di procedure di misura e, in particolare, nella lista delle operazioni potrebbe esserci una richiesta da soddisfare in un certo intervallo di tempo. A tal proposito, chiamerò A l'osservabile definita come classe di equivalenza di una procedura di misura effettuata per $t=0$, mentre A_t è un'osservabile definita allo stesso modo, ma ad un tempo $t>0$.
Un'ipotesi molto naturale è che le relazioni tra le osservabili non dipendano dal tempo in cui vengono misurate; cioè abbiamo due osservabili, A e B, misurate in tempi diversi, e tra loro hanno delle relazioni. Queste relazioni dipendono solo dalla distanza temporale tra le due

misure, non dal momento in cui queste misure vengono compiute. Ciò significa, dunque, che stiamo ipotizzando che, definita $\alpha_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{R}$, con $\mathcal{A}$ l'algebra delle
$A \longmapsto A_t$
osservabili, l'applicazione $A \in \mathcal{A} \longmapsto \alpha_t(A)$ è uno *-automorfismo traducendo l'idea che, muovendomi nel tempo, non perdo né guadagno osservabili. Ha inoltre senso ipotizzare che, siccome le relazioni dipendono solo dagli intervalli di tempo, $\alpha_{t_2}(\alpha_{t_1}(A)) = \alpha_{t_1+t_2}(A)$ comunque scelta $A \in \mathcal{A}$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, cioé che presa $F : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (Aut(\mathcal{A}), \circ)$
$t \longmapsto \alpha_t$
F definisce un gruppo ad 1 parametro, $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$, di automorfismi di $\mathcal{A}$. Altra ipotesi naturale è che, fissato uno stato, cambiando di poco il tempo, pure il valore d'aspettazione cambi di poco. Quindi, in sostanza, sto facendo un'ipotesi di continuità, cioé $\forall \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ e $\forall A \in \mathcal{A}$ la funzione $t \in \mathbb{R} \longmapsto \omega(\alpha_t(A)) \in \mathbb{C}$ è continua.

DEF
Il gruppo $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ è detto debolmente continuo se $t \in \mathbb{R} \longmapsto \omega(\alpha_t(A)) \in \mathbb{C}$ è continua $\forall \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ e $\forall A \in \mathcal{A}$.

DEF
La dinamica di un sistema quantistico descritto dall'algebra delle osservabili $\mathcal{A}$ è definita da un gruppo ad un parametro $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ debolmente continuo di automorfismi di $\mathcal{A}$

DEF
Sia H uno spazio di Hilbert. Un gruppo ad un parametro fortemente continuo di unitari su H è un'applicazione $U : \mathbb{R} \longrightarrow B(H)$ tale che
(i) $U(t)$ è unitario $\forall t \in \mathbb{R}$
(ii) $U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
(iii) $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t)x \in H$ è continua $\forall x \in H$

oss
Similmente a quanto già fatto la (iii) equivale a dire che $\forall x, y \in H$ $t \in \mathbb{R} \longmapsto \langle x, U(t)y\rangle \in \mathbb{C}$ è continua
Inoltre, come già osservato, quest'ultima equivale a $\forall x, y \in H$ $t \in \mathbb{R} \longmapsto \langle x, U(t)y\rangle$ è continua in 0.

DEF

Sia $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un gruppo ad un parametro debolmente continuo di automorfismi di $\mathcal{A}$. $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ è detto invariante per $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ se $\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.

TEOREMA

Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra unitaria, $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} \subseteq Aut(\mathcal{A})$ un gruppo ad un parametro debolmente continuo, $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ invariante per $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ e sia (π_ω, x_ω) la sua rappresentazione GNS $\Rightarrow \exists!\ U: \mathbb{R} \longrightarrow B(H_\omega)$ gruppo di unitari ad un parametro fortemente continuo tale che

(i) $U(t)\pi_\omega(A)U^*(t) = \pi_\omega(\alpha_t(A))\ \forall A \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $U(t)x_\omega = x_\omega\ \forall t \in \mathbb{R}$

Dirò allora che $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ è implementato da $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

dim

Poiché ω è uno stato su $\mathcal{A}$, per il teorema GNS

$\omega(\alpha_t(A)) = \langle x_\omega, \pi_\omega(\alpha_t(A))x_\omega\rangle$

Ma, per ipotesi, ω è invariante per $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$, perciò

$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A) \Rightarrow \omega(A) = \langle x_\omega, \pi_\omega(\alpha_t(A))x_\omega\rangle$.

Ora, $\pi_\omega \alpha_t$ è ancora una rappresentazione di $\mathcal{A}$, poiché composizione di uno *-omomorfismo con uno *-automorfismo. Inoltre, poiché α_t è un automorfismo $\forall t \in \mathbb{R}$, $\alpha_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, dunque $\overline{\pi_\omega(\alpha_t(\mathcal{A}))x_\omega} = \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})x_\omega} = H_\omega$ poiché x_ω è ciclico per $\pi_\omega \Rightarrow x_\omega$ è ciclico pure per $\pi_\omega \alpha_t \Rightarrow$ siccome la rappresentazione GNS è unica a meno di equivalenze unitarie $\exists!\ U: H_\omega \longrightarrow H_\omega$ unitario tale che $U\pi_\omega(A)U^* = \pi_\omega(\alpha_t(A))$ e $Ux_\omega = x_\omega$. Ora, siccome questo vale $\forall t \in \mathbb{R}$ è lecito definire come $U(t)$ l'unitario U corrispondente a questo ragionamento appena concluso. Per cui abbiamo un candidato a gruppo di unitari ad un parametro $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Mostriamo che è fortemente continuo:

(i) è gratis, visto che abbiamo appena detto che $U(t)$ è unitario $\forall t$

(ii) Mostriamo che vale l'uguaglianza su un denso. Prendiamo dunque elementi della forma $\pi_\omega(A)x_\omega$

$[U(t_1)U(t_2)\pi_\omega(A)]x_\omega = U(t_1)[U(t_2)\pi_\omega(A)U^*(t_2)]x_\omega =$

$U(t_1)\pi_\omega(\alpha_{t_2}(A))x_\omega = [U(t_1)\pi_\omega(\alpha_{t_2}(A))U^*(t_1)]x_\omega =$

$\pi_\omega(\alpha_{t_1}(\alpha_{t_2}(A)))x_\omega = \pi_\omega(\alpha_{t_1+t_2}(A))x_\omega =$

$= \left[U(t_1+t_2)\, \pi_\omega(A)\, U^*(t_1+t_2) \right] x_\omega = U(t_1+t_2)\, \pi_\omega(A)\, x_\omega$

$\Rightarrow U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2)$ su $\pi(\mathcal{A})x_\omega$, che è denso

$\Rightarrow U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2)$ su tutto H_ω

(iii) Mostriamo che $t \in \mathbb{R} \longmapsto \langle x, U(t)y \rangle \in \mathbb{C}$ è continua in 0 $\forall x, y \in H$. Sia allora $x \in H_\omega$ e andiamo a studiare $\| U(t)\pi_\omega(A)x_\omega - \pi_\omega(A)x_\omega \|^2 =$ (come ho fatto nel passo precedente)

$= \| \pi_\omega(\alpha_t(A))x_\omega - \pi_\omega(A)x_\omega \|^2 = \| \pi_\omega(\alpha_t(A) - A)x_\omega \|^2 =$

$= \langle \pi_\omega(\alpha_t(A) - A)x_\omega, \pi_\omega(\alpha_t(A) - A)x_\omega \rangle$

$= \langle x_\omega, \pi_\omega((\alpha_t(A)-A)^*(\alpha_t(A)-A))x_\omega \rangle = \omega((\alpha_t(A)-A)^*(\alpha_t(A)-A))$

$= \omega((\alpha_t(A^*) - A^*)(\alpha_t(A) - A)) =$

$= \omega(\alpha_t(A^*A)) - \omega(\alpha_t(A^*)A) - \omega(A^*\alpha_t(A)) + \omega(A^*A)$

Andiamo a vedere cosa accade a quei 4 termini per $t \to 0$

- poiché $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ è debolmente continuo abbiamo

$$\lim_{t\to 0} \omega(\alpha_t(A^*A)) = \omega\left(\lim_{t\to 0} \alpha_t(A^*A)\right) = \omega(\alpha_0(A^*A))$$

ma la F che definisce il gruppo ad un parametro è un omomorfismo di gruppi $\Rightarrow \alpha_0 = F(0) = \mathbb{1}$

perciò $\omega(\alpha_0(A^*A)) = \omega(A^*A)$.

- $\omega(A^*\alpha_t(A)) = \langle x_\omega, \pi_\omega(A^*\alpha_t(A))x_\omega \rangle = \langle \pi_\omega(A)x_\omega, \pi_\omega(\alpha_t(A))x_\omega \rangle$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle \underbrace{\pi_\omega(A)x_\omega + (-i)^k x_\omega}_{:= \eta_k}, \pi_\omega(\alpha_t(A))(\pi_\omega(A)x_\omega + (-i)^k x_\omega) \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \langle \eta_k, \pi_\omega(\alpha_t(A))\eta_k \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|\eta_k\|^2 \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(\alpha_t(A)) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle$$

Ora, detto $\omega_k(B) := \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle$, con $k = 0, \dots, 3$

$\omega_k \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, poiché

$$\omega_k(\alpha B) = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(\alpha B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \alpha \omega_k(B)$$

$$\omega_k(A+B) = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(A+B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(A) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \omega_k(A) + \omega_k(B)$$

$$\omega_k(\mathbb{1}) = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(\mathbb{1}) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = 1$$

$$\omega_k(B^*B) = \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(B^*B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle = \left\langle \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle$$

$$= \left\| \pi_\omega(B) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\|^2 \geq 0$$

Per cui, nuovamente perché $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ è debolmente continuo avremo $\lim_{t\to 0} \omega_k(\alpha_t(A)) = \omega_k(\alpha_0(A)) = \omega_k(A)$

dunque, continuando l'uguaglianza e passando al limite

$$\lim_{t\to 0} \omega(A^* \alpha_t(A)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|\eta_k\|^2 \omega_k(\alpha_t(A))$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|\eta_k\|^2 \omega_k(A)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|\eta_k\|^2 \left\langle \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}, \pi_\omega(A) \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right\rangle$$

$$= \langle \pi_\omega(A) x_\omega, \pi_\omega(A) x_\omega \rangle = \omega(A^* A)$$

Allo stesso modo si mostra che pure $\omega(\alpha_t(A) A^*) \xrightarrow{t\to 0} \omega(A^* A)$

- Sempre perché $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ è debolmente continuo abbiamo

$$\lim_{t\to 0} \omega(\alpha_t(A^*) A) = \omega(\alpha_0(A^*) A) = \omega(A^* A)$$

Riassumendo, dunque

$$\lim_{t\to 0} \|U(t) \pi_\omega(A) x_\omega - \pi_\omega(A) x_\omega\|^2 = 2\omega(A^* A) - 2\omega(A^* A) = 0$$

cioé $U(t) \pi_\omega(A) \xrightarrow{t\to 0} \pi_\omega(A) = U(0) \pi_\omega(A) \quad \forall x \in H_\omega$

$\Rightarrow U(t)$ è continuo in 0 $\forall x \in H_\omega$

$\Rightarrow (U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ è gruppo fortemente continuo di unitari su H_ω. ∎

In conclusione se ho uno stato invariante per un gruppo ad un parametro debolmente continuo sull'algebra delle osservabili che definisce una rappresentazione di $\mathcal{A}$, la dinamica è rappresentata da un gruppo di unitari ad un parametro fortemente continuo.

Giunti a questo punto ci serve sapere qualcosa sugli operatori non limitati.

DEF

Sia H spazio di Hilbert, $D(T) \subseteq H$ sottospazio.

$T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ lineare è detto chiuso se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ t.c. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x \in H$ e $T(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y \in H$

$\Rightarrow x \in D(T)$ e $T(x) = y$

OSS

Se T fosse limitato, avremo, per continuità, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$

OSS

È possibile definire una relazione d'ordine tra gli operatori non limitati. Siano $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ e $S: D(S) \subseteq H \longrightarrow H$, diró che $T \prec S$ se $D(T) \subseteq D(S)$ e $S|_{D(T)} \equiv T$.

Questa è effettivamente una relazione d'ordine.

Talvolta diremo che, se $T \prec S$, S estende T

DEF

Sia $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ lineare. Dirò che T è *chiudibile* se $\exists\, S: D(S) \subseteq H \longrightarrow H$ chiuso t.c. $T \preccurlyeq S$

TEOREMA (Grafico chiuso)

Sia H spazio di Hilbert, $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$

T è chiuso $\iff \Gamma(T) := \{(x, Tx) \in H \oplus H : x \in D(T)\}$ è chiuso

dim

$\Rightarrow$) Sia $(x,y) \in H \oplus H$ tale che $\exists \{(x_n, Tx_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma(T)$ con $(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x,y)$. Per come è definita la convergenza su $H \oplus H$ abbiamo

$$\|(x_n, Tx_n) - (x,y)\| \longrightarrow 0 \iff \begin{cases} \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \\ \|Tx_n - y\| \longrightarrow 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n \to x \in H \\ Tx_n \to y \in H \end{cases}$$

Ma T è chiuso $\Rightarrow x \in D(T)$ e $Tx = y \Rightarrow (x,y) \in \Gamma(T)$

$\Rightarrow \Gamma(T)$ contiene i limiti delle sue successioni convergenti $\Rightarrow \Gamma(T)$ è chiuso.

$\Leftarrow$) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ tale che $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$

Ciò avviene $\iff (x_n, Tx_n) \longrightarrow (x,y)$. Ora, però, questo mi dice che $(x,y) \in \Gamma(T)$, poiché $\{(x_n, Tx_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in $\Gamma(T)$, che è chiuso per ipotesi $\Rightarrow x \in D(T)$ e $Tx = y \Rightarrow T$ è un operatore chiuso ∎

OSS

La convergenza che metto su $\Gamma(T)$ è quella indotta dalla cosiddetta *norma del grafico*, che nel nostro caso si può esprimere come $\|(x,y)\|_{H\oplus H} := \|x\|_H + \|y\|_H$. Da questo discende che $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ nel senso di $\|\cdot\|_{H\oplus H} \iff \begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$

La norma del grafico è indotta da

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

PROP

Sia $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$

T è chiudibile $\iff \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ tale che $x_n \to 0$ e $Tx_n \to y \Rightarrow y = 0$

dim

$\Rightarrow$) Sia T chiudibile $\Rightarrow \exists\, S: D(S) \subseteq H \longrightarrow H$ chiuso con $T \preccurlyeq S$. In particolare, poiché $D(T) \subseteq D(S)$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(S)$ e $Tx_n = Sx_n \Rightarrow$ poiché S è chiuso, $0 \in D(S)$ e $S(0) = y \Rightarrow y = 0$ poiché S è lineare

$\Leftarrow$) Mostriamo che è possibile definire un'estensione

chiusa di T.
Definiamo $E := \{x \in H : \exists \{x_n\}_n \subseteq D(T)$ con $x_n \to x$ e $Tx_n \to y\}$
Chiaramente, $D(T) \subset E$. Battezziamo $E = D(S)$ e definiamo
$S : D(S) \subseteq H \longrightarrow H$
$x \longmapsto y$
È una buona definizione, infatti se $\exists y'$ tale che $S(x) = y'$ avremmo una successione $z_n \to 0$ e $Tz_n \to y - y' \to$ per ipotesi $y - y' = 0$ cioè $y = y'$.
Per come abbiamo definito S e $D(S)$, S è ovviamente chiuso e $S|_{D(T)} \equiv T \Rightarrow T \prec S \Rightarrow T$ è chiudibile

PROP
Sia $T : D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ chiudibile $\Rightarrow \exists! \overline{T} : D(\overline{T}) \to H$ estensione chiusa di T tale che $\forall S : D(S) \subseteq H \to H$ estensione chiusa di T si ha $\overline{T} \prec S$. (cioè $\overline{T}$ è la più piccola estensione chiusa di T). $\overline{T}$ è detta chiusura di T.

dim
Consideriamo $\Gamma(T)$. L'idea è dimostrare che $\overline{\Gamma(T)}$ è il grafico di qualche operatore. Ora, $\overline{\Gamma(T)}$ è il grafico di qualcosa $\Leftrightarrow$ le coppie (x,y) e (x,z) stanno entrambe in $\overline{\Gamma(T)}$ se e solo se $y = z \Leftrightarrow$ il fatto che $(0,y) \in \overline{\Gamma(T)}$ implica $y = 0$ $\Leftrightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq D(T)$ tale che $x_n \to 0$ e $Tx_n \to y$ implica $y = 0$.
Ma T è chiudibile, allora quest'ultima proprietà è vera per la proposizione precedente $\Rightarrow \overline{\Gamma(T)}$ è un grafico, definisco allora $D(\overline{T}) = \{x \in H : \exists y \in H$ con $(x,y) \in \overline{\Gamma(T)}\}$ e $\overline{T}x := y$. Bisogna mostrare che $\overline{T}$ è chiuso, che $T \prec \overline{T}$ e $\overline{T} \prec S$ $\forall S$ estensione chiusa di T.
Ora, $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$ per come ho definito $\overline{T}$ e quindi, per il teorema del grafico chiuso, $\overline{T}$ è chiuso. Che estenda T è ovvio, poiché $\Gamma(\overline{T}) \subseteq \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$.
Sia ora S un'estensione chiusa di $T \Leftrightarrow \Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ e $\Gamma(S)$ è chiuso. Ma allora $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)} \subseteq \Gamma(S) \Rightarrow \overline{T} \prec S$.
Infine, la chiusura è unica: supponiamo ce ne sia un'altra, $\overline{T}_*$, avremmo $\overline{T}_* \prec \overline{T}$, poiché $\overline{T}$ è estensione chiusa di T e per lo stesso motivo, $\overline{T} \prec \overline{T}_* \Rightarrow \overline{T} = \overline{T}_*$

Esempio
Sia $H = L^2(\mathbb{R})$ e $D(q) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \varphi(x) := x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$
È chiaro che $D(q)$ non esaurisce tutto $L^2(\mathbb{R})$, basta prendere

$\psi(x) := \frac{1}{x}\chi_{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)}(x) + x\,\chi_{[-1,1]}(x)$

Senz'altro, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ poiché

$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

che è chiaramente un integrale convergente.

D'altra parte $\varphi \notin L^2(\mathbb{R})$. Possiamo dunque definire

$q : D(q) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$\psi \longmapsto q(\psi) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longmapsto x\,\psi(x)$

q non è limitato: prendiamo $\psi_n(x) := \chi_{[n,n+1]}(x)$. $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(q)$

Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\| = 1$. Abbiamo, però

$\|q(\psi_n)\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 \chi_{[n,n+1]}(x)\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_n^{n+1} x^2 dx\right)^{1/2} \geq \left(n^2 \int_n^{n+1} dx\right)^{1/2} = n$

che per $n \to +\infty$ chiaramente diverge.

Però q è chiuso: prendiamo $\{\psi_n\}_n \subseteq D(q)$ t.c. $\psi_n \to \psi$ e $q(\psi_n) \to \varphi$. A meno di andare a lavorare con le sottosuccessioni, quelle due convergenze, oltre ad essere in $L^2(\mathbb{R})$, sono convergenze q.o. (come conseguenza di Riesz-Fischer), cioè $\psi_n(x) \xrightarrow{q.o.} \psi(x)$ e $q(\psi_n)(x) \xrightarrow{q.o.} \varphi(x)$.

Per come ho definito q, allora, se x è un punto di convergenza

$x\,\psi(x) = \lim_{n\to+\infty} x\,\psi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} q(\psi_n)(x) = \varphi(x)$

dunque $\psi \in D(q)$, poiché $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ e $q(\psi) = \varphi$ in $L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ q è chiuso

DEF

L'insieme delle funzioni assolutamente continue su $\mathbb{R}$ è

$$AC(\mathbb{R}) := \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \exists \varphi \in L^1([a,b])\ \forall [a,b] \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } \psi(x) = c + \int_0^x \varphi(t)\,dt \right\}$$

Esempio

Prendiamo nuovamente $H = L^2(\mathbb{R})$ e definiamo

$D(p) := \{\psi \in AC(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) : \psi' \in L^2(\mathbb{R})\}$, dove intendiamo con ψ' la "derivata debole di ψ", cioè φ ($\psi' = \varphi$ q.o.)

Definiamo $p(\psi) := -i\psi'$

p non è limitato: possiamo prendere $\psi_n(x) := e^{inx}\psi(x)$, con $\psi \in D(p) \cap C^1(\mathbb{R})$. $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(p)$: per prima cosa, vediamo se sta in $L^2(\mathbb{R})$

$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < +\infty$ poiché $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

Siccome e^{inx} e $\psi(x)$ sono derivabili, possiamo calcolare

$\psi_n'(x) = in\, e^{inx}\psi(x) + e^{inx}\psi'(x)$
ma entrambi gli addendi sono in $L^2(\mathbb{R})$, poiché $\psi \in D(p) \Rightarrow \psi_n' \in L^2(\mathbb{R})$
Mostriamo che le ψ_n sono assolutamente continue:
$\psi_n(x) = \psi_n(0) + \int_0^x \psi_n'(t)\,dt \Rightarrow \psi_n$ è AC
$\Rightarrow \{\psi_n\}_n \subseteq D(p)$. Ora, $\|\psi_n\| = \|\psi\|\ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque abbiamo
$\|p(\psi_n)\| = \|ne^{inx}\psi(x) - ie^{inx}\psi'(x)\| = \|n\psi_n - ie^{inx}\psi'\|$
$\geq |\,\|n\psi_n\| - \|\psi'\|\,| = |\,n\|\psi\| - \|\psi'\|\,| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$
dunque p non è limitato.
Mostriamo che è chiuso: sia $\{\psi_n\}_n \subseteq D(p)$ con $\psi_n \not\to \psi$ e $p(\psi_n) \longrightarrow \varphi$, con $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Di nuovo, a meno di sottosuccessioni, $\psi_n \xrightarrow{q.o.} \psi$ e $p(\psi_n) \xrightarrow{q.o.} \varphi$.
Sia x_0 un punto di convergenza
$\psi_n(x_0) = \psi_n(x_0) + \int_{x_0}^x \psi_n'(t)\,dt$. Andiamo a vedere come si comporta quell'integrale al limite
$\left|\int_{x_0}^x \psi_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^x i\varphi(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^x \psi_n'(t) - i\varphi(t)\,dt\right| =$
$= \left|\int_{\mathbb{R}} (\psi_n'(t) - i\varphi(t))\,\chi_{[x_0,x]}(t)\,dt\right| = |\langle \chi_{[x_0,x]}, \psi_n' - i\varphi\rangle|$
$\leq \|\chi_{[x_0,x]}\|\,\|\psi_n' - i\varphi\| \longrightarrow 0$ poiché $p(\psi_n) \longrightarrow \varphi$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^x \psi_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^x i\varphi(t)\,dt$, perciò quasi ovunque
$\psi(x) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x_0) + \int_{x_0}^x \psi_n'(t)\,dt = \psi(x_0) + \int_{x_0}^x i\varphi(t)\,dt$
dunque $\psi(x)$ è assolutamente continua inoltre $\psi'(x) = i\varphi(x)$, dunque $\psi' \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi \in D(p)$. Infine $p(\psi) = -i\psi' = \varphi \Rightarrow$ p è chiuso.

Avevamo visto, quando ci eravamo occupati degli operatori limitati, che una nozione importante era quella di aggiunto di un operatore. Come ce la possiamo cavare adesso?
Prendiamo $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ e andiamo a considerare:
$E := \{x \in H : y \in D(T) \xrightarrow{\varphi_x} \langle x, Ty\rangle \in \mathbb{C} \text{ è continua}\}$
Ora, $\forall x \in E$, l'applicazione $y \longrightarrow \langle x, Ty\rangle \in H^* \Rightarrow$ per il teorema di Riesz $\exists!\, z \in H$ tale che quell'applicazione può essere scritta $\forall y \in D(T)$ come $\langle z, y\rangle$ ($\varphi_x(y) = \langle z, y\rangle$).
Siccome ad ogni x corrisponde z in modo unico, posso definire $T^*(x) := z$, ottenendo $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

DEF

Sia $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$, con $D(T)$ denso.

Sia $D(T^*) := \{x \in H : y \in D(T) \longmapsto \langle x, Ty\rangle \in \mathbb{C} \text{ è continua}\}$

L'aggiunto di T è l'operatore T^*, definito su $D(T^*)$ t.c. $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall y \in D(T) \ \forall x \in D(T^*)$

OSS

Come ci aspettiamo, se $T \preccurlyeq S \Rightarrow S^* \preccurlyeq T^*$.

Sia $x \in D(S^*) \Rightarrow y \in D(S) \longmapsto \langle x, Sy\rangle \in \mathbb{C}$ è continua. Però $T \preccurlyeq S$, dunque $D(T) \subseteq D(S)$ e quindi la restrizione a $D(T)$ sarà anch'essa continua. Inoltre $\varphi_x|_{D(T)}(y) = \langle x, Sy\rangle = \langle x, Ty\rangle \Rightarrow x \in D(T^*) \Rightarrow D(S^*) \subseteq D(T^*)$.

Prendiamo ora $x \in D(S^*)$ e $y \in D(T)$

$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, Sy\rangle$ dunque, su $D(S^*)$, $T^*|_{D(S^*)} = S^*$

$\Rightarrow S^* \preccurlyeq T^*$

PROP

Sia $T: D(T) \subseteq H \longrightarrow H$ con $D(T)$ denso in H

(i) T^* è chiuso

(ii) T è chiudibile $\Leftrightarrow D(T^*)$ è denso (e, in tal caso, $\overline{T} = T^{**}$)

dim

(i) Prendiamo $\{x_n\}_n \subseteq D(T^*)$ t.c. $x_n \longrightarrow x$ e $T^*(x_n) \longrightarrow y$

Mostriamo che $x \in D(T^*)$. Sia $z \in D(T)$

$$\langle x, Tz\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, Tz\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T^*x_n, z\rangle = \langle y, z\rangle$$

($x_n \in D(T^*)$)

Dunque $\varphi_x(z)$ è continua $\Rightarrow x \in D(T^*)$. Inoltre abbiamo

$\langle y, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = \langle T^*x, z\rangle$

ma questo vale $\forall z \in D(T) \Rightarrow y = T^*x$ su un denso

$\Rightarrow y = T^*x \Rightarrow T^*$ è chiuso.

(ii) $\Rightarrow$) Andiamo a considerare $\Gamma(T)$. Ora $(y, z) \in \Gamma(T)^\perp$

$\Leftrightarrow 0 = \langle (y, z), (x, Tx)\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, Tx\rangle$, perciò

$\langle z, Tx\rangle = -\langle y, x\rangle \Leftrightarrow z \in D(T^*)$ e $T^*z = -y$. Quindi

$\Gamma(T)^\perp = \{(-T^*z, z) : z \in D(T^*)\}$

Sia ora $x \in D(T^*)^\perp \Rightarrow$

$\langle (0, x), (-T^*z, z)\rangle = \langle x, z\rangle = 0$ poiché $z \in D(T^*)$

$\Rightarrow (0, x) \in (\Gamma(T)^\perp)^\perp = \overline{\Gamma(T)}$, dunque $\exists \{(x_n, Tx_n)\}_n \subseteq \Gamma(T)$ tale che $(x_n, Tx_n) \longrightarrow (0, x)$, cioè $x_n \longrightarrow 0$ e $Tx_n \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ poiché T è chiudibile per una proposizione precedente $x = 0 \Rightarrow D(T^*)^\perp = \{0\}$, per cui $\overline{D(T^*)} = [D(T^*)^\perp]^\perp = H$

$\Rightarrow D(T^*)$ è denso

Inoltre $\overline{\Gamma(T)} = [\Gamma(T)^\perp]^\perp = \{(x, T^{**}x) : x \in D(T^{**})\} = \Gamma(T^{**})$

ma, per quanto abbiamo visto, $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$

$\Rightarrow T^{**} = \overline{T}$ perché hanno lo stesso grafico.

$\Leftarrow$) Sia $D(T^*)$ denso $\Rightarrow$ posso definire anche $D(T^{**})$ e T^{**}.
Sia $x \in D(T)$ e $y \in D(T^*)$. Avremo $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$, che è dunque continua in $y \Rightarrow x \in D(T^{**})$. Da questo stesso conto, inoltre, si ha $T^{**}|_{D(T)} = T \Rightarrow T \preccurlyeq T^{**}$.
Inoltre, chiaramente $T^{**} = (T^*)^*$ e $D(T^*)$ è denso
$\Rightarrow$ per il punto (i), T^{**} è chiuso $\Rightarrow T$ è chiudibile ∎

DEF
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$, con $D(A)$ denso. A è detto simmetrico (o hermitiano) se $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall x, y \in D(A)$

Questa definizione, quindi, mi dice che se $x \in D(A)$ $\Rightarrow x \in D(A^*)$, perché φ_x sarebbe continua e, per l'unicità dell'aggiunto, $A^*|_{D(A)} = A$, perciò, se A è simmetrico $\Rightarrow A \preccurlyeq A^*$.

DEF
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$, con $D(A)$ denso. A è autoaggiunto se $A = A^*$ (dove $=$ è da intendersi nel senso di $\preccurlyeq$)

OSS
Se A è autoaggiunto è ovviamente chiuso, poiché per il punto ~~precedente~~ (i) della prop. precedente A^* è chiuso e $A = A^*$.

DEF
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$, con $D(A)$ denso. Dirò che A è essenzialmente autoaggiunto se è chiudibile e $\bar{A}$ è autoaggiunto

TEOREMA (criterio fondamentale di autoaggiuntezza)
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ simmetrico. Sono equivalenti:
(i) $A = A^*$
(ii) A è chiuso e $\ker(A^* + i\mathbb{1}) = \ker(A^* - i\mathbb{1}) = \{0\}$
(iii) $\mathrm{Im}(A + i\mathbb{1}) = \mathrm{Im}(A - i\mathbb{1}) = H$

dim
(i) $\Rightarrow$ (ii) per l'osservazione precedente, A è chiuso. Sia ora

$x \in \mathrm{Ker}(A^* - i\mathbb{1}) \Rightarrow$

$-i\langle x,x\rangle = \langle ix, x\rangle$ (perché $x \in \mathrm{Ker}(A^* - i\mathbb{1})$, $A^*x = ix$)

$= \langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, ix\rangle = i\langle x,x\rangle$ ($A = A^*$)

$\Rightarrow \langle x,x\rangle = 0$, ma questo avviene $\Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A^* - i\mathbb{1}) = \{0\}$. In modo analogo lo si dimostra per $A^* + i\mathbb{1}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Mostriamo che $\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})$ è denso e chiuso. Sia $x \in \mathrm{Im}(A-i\mathbb{1})^\perp$, cioè $\forall y \in D(A)$ abbiamo $0 = \langle x, (A - i\mathbb{1})y\rangle = \langle x, Ay\rangle - i\langle x, y\rangle$, cioè $\langle x, Ay\rangle = i\langle x, y\rangle \Rightarrow x \in D(A^*)$. Inoltre, $\forall y \in D(A)$, che per ipotesi è denso, abbiamo $A^*x - i\mathbb{1}x = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A^* - i\mathbb{1})$

$\Rightarrow x = 0$ per ipotesi $\Rightarrow \mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})} = (\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})^\perp)^\perp = H \Rightarrow \mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})$ è denso.

Sia ora $x \in D(A)$ e calcoliamo

$\|(A - i\mathbb{1})x\|^2 = \|Ax - ix\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(i\langle x, Ax\rangle)$

Se non che, A è simmetrico, dunque

$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow i\langle x, Ax\rangle \in i\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}(i\langle x, Ax\rangle) = 0$, dunque

$\|(A - i\mathbb{1})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$

Prendiamo allora $\{x_n\}_n \subseteq D(A)$ t.c. $y_n := (A - i\mathbb{1})x_n \longrightarrow y$

Mostriamo che x_n è di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$

$\|x_n - x_m\|^2 = \|(A - i\mathbb{1})(x_n - x_m)\|^2 - \|A(x_n + x_m)\|^2$

$\leq \|(A - i\mathbb{1})(x_n - x_m)\|^2 = \|(A - i\mathbb{1})x_n - (A - i\mathbb{1})x_m\|^2$

$= \|y_n - y_m\|^2$

ma $\{y_n\}_n$ è convergente $\Rightarrow$ è di Cauchy e dunque ~~anche~~ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\}_n$ è di Cauchy $\Rightarrow$ converge perché H è di Hilbert $\Rightarrow \exists\, x \in H$ con $x_n \longrightarrow x$. D'altra parte già sappiamo che $(A - i\mathbb{1})x_n \longrightarrow y \Rightarrow Ax_n \longrightarrow y + ix$.

Ma A è chiuso, dunque $x \in D(A)$ e $Ax = y + ix$

$\Rightarrow (A - i\mathbb{1})x = y + ix - ix = y \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(A - i\mathbb{1}) \Rightarrow$

$\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1})$ è chiuso $\Rightarrow$ coincide con la sua chiusura, cioè $\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1}) = H$; (in modo analogo si fa per $A + i\mathbb{1}$).

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Poiché A è simmetrico, sappiamo già che $A \prec A^*$. Ci basta dunque dimostrare che $D(A^*) \subseteq D(A)$, cosicché $A = A^*$.

Sia $x \in D(A^*)$. Per ipotesi $\mathrm{Im}(A - i\mathbb{1}) = H \Rightarrow \exists\, z \in D(A)$ t.c.

$(A^*-i\mathbb{1})x$, che è un elemento di H, si possa scrivere come $(A-i\mathbb{1})z$, per suriettività.
Però $A \preccurlyeq A^* \Rightarrow A = A^*$ su $D(A)$, dunque $(A-i\mathbb{1})x = (A^*-i\mathbb{1})z$
$\Rightarrow (A^*-i\mathbb{1})(x-z) = 0 \iff x-z \in \ker(A^*-i\mathbb{1})$. Ora, però, se
$y \in \ker(A^*-i\mathbb{1})$ $\forall w \in D(A)$ abbiamo
$0 = \langle (A^*-i\mathbb{1})y, w\rangle = \langle y, (A+i\mathbb{1})w\rangle$
ma $\mathrm{Im}(A+i\mathbb{1}) = H \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ker(A^*-i\mathbb{1}) = \{0\} \Rightarrow x = z$
$\Rightarrow x \in D(A) \Rightarrow D(A^*) \subseteq D(A) \Rightarrow D(A) = D(A^*)$. A questo punto, allora, $A^*|_{D(A)} = A$, ma $D(A) = D(A^*) \Rightarrow A^* = A$ ∎

COROLLARIO
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ simmetrico. Sono equivalenti:
(a) A è essenzialmente limitato
(b) $\ker(A^*+i\mathbb{1}) = \ker(A^*-i\mathbb{1}) = \{0\}$
(c) $\overline{\mathrm{Im}(A+i\mathbb{1})} = \overline{\mathrm{Im}(A-i\mathbb{1})} = H$

OSS
1) Sappiamo che A simmetrico $\Rightarrow A \preccurlyeq A^*$. Vale anche l'implicazione opposta, poiché se $A \preccurlyeq A^* \Rightarrow D(A) \subseteq D(A^*)$ e dunque $\forall x, y \in D(A)$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, Ay\rangle \Rightarrow$ A simmetrico

2) Se A è simmetrico, A è pure chiudibile, poiché esteso dal suo aggiunto e A^* è chiuso. Ora, se $\exists B = B^*$ con $A \preccurlyeq B^*$, avremo $B^* \preccurlyeq A^*$ e dunque $A \preccurlyeq B = B^* \preccurlyeq A^*$.
Questo mi fa capire che in effetti c'è un pochino di distanza tra autoaggiunto ed essenzialmente autoaggiunto, visto che non è detto che B sia la chiusura di A. Se non altro, però, mi da speranza che, se ho A simmetrico, "allargando" opportunamente il dominio potrei trovare una sua estensione autoaggiunta, intermedia tra $\bar{A}$ e A^*.

3) Se A è autoaggiunto, è ovviamente simmetrico. Non solo: se B è simmetrico e $A \preccurlyeq B$ avremo $B \preccurlyeq B^* \preccurlyeq A^* = A$, cioè $B \preccurlyeq A \Rightarrow A = B$, cioè A è un operatore simmetrico massimale.

4) Se A fosse essenzialmente autoaggiunto, $\bar{A}$ è l'unica estensione autoaggiunta di A, infatti se $A \preccurlyeq B$, con $B = B^*$, avremmo come al solito, poiché B è chiuso, che $\bar{A} \preccurlyeq B$ e, dunque $B^* \preccurlyeq \bar{A}^*$, cioè $B = B^* \preccurlyeq \bar{A}^* = \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = B$

Insomma, la morale è che se voglio trovare A autoaggiunto, ne dovrei indicare il dominio di autoaggiuntezza, cosa che potrebbe rivelarsi difficile. Ma se riesco a trovare $D \subseteq D(A)$ tale che $A|_D$ è essenzialmente autoaggiunto ho vinto, perché a questo punto $A = \bar{A}|_D$ e, per l'osservazione precedente, A è univocamente individuato da questa operazione.

DEF
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ autoaggiunto. Se $D \subseteq D(A)$ è tale che $A|_D$ è essenzialmente autoaggiunto, D è detto core per A

DEF
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ chiuso. L'insieme risolvente di A è
$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \mathbb{1}$ è invertibile e $(A-\lambda\mathbb{1})^{-1} \in B(H)\}$
Lo spettro di A è $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

Inoltre anche per operatori chiusi vale il seguente
LEMMA
Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ chiuso $\Rightarrow \rho(A)$ è aperto

Può essere utile, a questo punto, uno spazio di funzioni particol

DEF
Lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a decrescita rapida, o spazio delle funzioni di Schwartz è
$$S(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < +\infty \ \forall m, n \in \mathbb{N}\}$$
La cosa carina è che la trasformata di Fourier è una biiezione di $S(\mathbb{R})$ in sé e che tale spazio è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Esempio
Prendiamo $D(q) = S(\mathbb{R})$ e di nuovo q l'operatore posizione $q(\psi)(x) = x\psi(x)$.
Mostriamo che q è essenzialmente autoaggiunto, usando il corollario precedente. Sia $\varphi \in S(\mathbb{R})$ e definiamo
$$\psi_+(x) := \frac{\varphi(x)}{x+i}, \quad \psi_-(x) := \frac{\varphi(x)}{x-i} \Rightarrow \psi_\pm \in S(\mathbb{R})$$
e $(q \pm i\mathbb{1})(\psi_\pm) = \varphi$
Dunque ciascuna funzione di $S(\mathbb{R})$ è immagine, tramite $q \pm i\mathbb{1}$, di una funzione nel dominio, poiché φ era generica
$\Rightarrow S(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Im}(q \pm i\mathbb{1})$ ma $S(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$
$\Rightarrow L^2(\mathbb{R}) = \overline{\mathrm{Im}(q \pm i\mathbb{1})} \Rightarrow q$ è essenzialmente autoaggiunto

Esempio $\left(F(x \mapsto x\psi(x))\right)(k) = i\frac{d}{dk}(F\psi)(k)$

Prendiamo $D(p) = S(\mathbb{R})$ con $(p\psi)(x) = -i\psi'(x)$

Mostriamo che p è essenzialmente autoaggiunto.

Prendiamo F la trasformata di Fourier. Siccome F è una biezione su $S(\mathbb{R})$, è ben definita la formula di inversione, per cui

$(FqF^{-1}\psi)(x) = F(g)(x)$, dove $g: K \longmapsto K(F^{-1}\psi)K$

$= -i\frac{d}{dx}F(F^{-1}\psi)(x) = -i\frac{d\psi}{dx}(x) = (p\psi)(x)$

$\Rightarrow q$ e p sono unitariamente equivalenti su $S(\mathbb{R})$, poiché F è unitario $\Rightarrow$ anche p è essenzialmente autoaggiunto.

Esempio

Sia $H = L^2([0,1])$ e $D(p) := \left\{\psi \in L^2([0,1]) : \psi \in AC([0,1]),\ \psi' \in L^2([0,1]),\ \psi(0) = 0 = \psi(1)\right\}$

e di nuovo $(p\psi)(x) = -i\psi'(x)$ con $\psi \in D(p)$ e $x \in [0,1]$

p è chiuso, poiché avevamo mostrato che p era chiuso in $L^2(\mathbb{R})$ (e quindi la dimostrazione è del tutto analoga). Inoltre, p è simmetrico su $D(p)$: sia φ e $\psi \in D(p) \Rightarrow$

$\langle \varphi, p\psi\rangle = -i\int_0^1 \overline{\varphi(x)}\psi'(x)\,dx$

$= -i\left[\overline{\varphi(1)}\psi(1) - \overline{\varphi(0)}\psi(0)\right] + i\int_0^1 \overline{\varphi'(x)}\psi(x)\,dx$

$= \int_0^1 \overline{-i\varphi'(x)}\,\psi(x)\,dx = \langle p\varphi, \psi\rangle \Rightarrow p$ è simmetrico

Non è però autoaggiunto. Usiamo di nuovo il teorema e prendiamo $\varphi \in \mathrm{Im}(p - i\mathbb{1}) \iff \exists\,\psi \in D(p)$ con $\varphi = p\psi - i\psi = -i(\psi' + \psi)$. Ma questa è un ODE

$\psi(x) = Ce^{-x} + i\int_0^x e^{t-x}\varphi(t)\,dt$

Ora, però, ψ deve stare in $D(p)$, per cui devo richiedere

$0 = \psi(0) = C$, $0 = \psi(1) = i\int_0^1 e^{t-1}\varphi(t)\,dt \iff \int_0^1 e^t\varphi(t)\,dt$

$\Updownarrow$

$\langle e^t, \varphi\rangle = 0$

Dunque $\mathrm{Im}(p - i\mathbb{1}) \subseteq (\mathrm{span}(e^t))^\perp$, che chiaramente non coincide con tutto quanto $L^2([0,1]) \Rightarrow p$ non è autoaggiunto. Si può dimostrare che

$D(p^*) = \left\{\psi \in L^2([0,1]) : \psi \in AC([0,1]),\ \psi' \in L^2([0,1])\right\}$

e l'aggiunto è ancora $p^*(\psi) = -i\psi'$

PROP

Sia $H = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n$ uno spazio di Hilbert, con ciascuno degli H_n di Hilbert, e siano $A_n = A_n^* \in B(H_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia

$D(A) := \{ x \in H : x = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $x_n \neq 0$ per un numero finito di radici $\}$

$A(x) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n(x_n)$

$\Rightarrow$ (i) A è essenzialmente autoaggiunto

(ii) $D(\bar{A}) = D(A^*) = \left\{ x = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} x_n \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \|A_n(x_n)\|^2 < +\infty \right\}$

dim

(i) Nuovamente, usiamo il corollario precedente. Sappiamo che, poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n = A_n^*$, $\mathrm{Im}(A_n \pm i\mathbb{1}) = H_n$. Inoltre $\mathrm{Im}(A_n \pm i\mathbb{1}) \subseteq \mathrm{Im}(A \pm i\mathbb{1})$ (cioè dentro c'è una sua copia isomorfa), dunque $H_n \subseteq \mathrm{Im}(A \pm i\mathbb{1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ma allora c'è pure la "somma algebrica" $H_1 + H_2 + \dots \Rightarrow$

$H = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n = \overline{H_1 + H_2 + \dots} \subseteq \overline{\mathrm{Im}(A \pm i\mathbb{1})}$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{Im}(A \pm i\mathbb{1})} = H \Rightarrow A$ è essenzialmente autoaggiunto.

(ii) Mostriamo che se $x \in D(A^*) \Rightarrow x$ ha quella proprietà

Sia dunque $x = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} x_n \in D(A^*)$ e prendiamo $y := \bigoplus_{n=1}^{N} A_n(x_n) \oplus 000$

$y \in D(A)$, poiché ha solo un numero finito di indici per cui le sue componenti sono non nulle. Poiché $x \in D(A^*)$, φ_x è continuo, in particolare $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tale che

$|\langle x, Ay \rangle| < C\|y\|$

Ma stiamo in una somma diretta, per cui abbiamo

$\langle x, Ay \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x_n, A_n^2 x_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle A_n x_n, A_n x_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \|A_n x_n\|^2$

$= \left(\sum_{n=1}^{N} \|A_n x_n\|^2 \right)^{1/2} \|y\| \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \|A_n x_n\|^2 < +\infty$

Analogamente vale l'inclusione opposta ∎

TEOREMA

Sia $P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to B(H)$ una misura spettrale su H e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ boreliana $\Rightarrow$

(i) $\exists!\, A : D(A) \subseteq H \to H$, con $D(A) = \left\{ x \in H : \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda) < +\infty \right\}$ tale che $\langle x, Ax \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$ $\forall x \in D(A)$

(indicheremo $A = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\, dP_\lambda$)

(ii) Se f è una funzione reale $\Rightarrow A$ è autoaggiunto

dim

(i) Mostriamo che $D(A)$ è un sottospazio. Siano $x, y \in D(A)$ e consideriamo $\alpha x + \beta y$. Abbiamo, se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

$\mu_{\alpha x + \beta y}(E) = \langle \alpha x + \beta y, P(E)(\alpha x + \beta y) \rangle =$

$= \langle P(E)(\alpha x+\beta y), P(E)(\alpha x+\beta y)\rangle = \| P(E)(\alpha x+\beta y)\|^2$

$\leq (|\alpha| \| P(E)x\| + |\beta| \|P(E)\|)^2 \leq 2(|\alpha|^2 \| P(E)x\|^2 + |\beta|^2 \|P(E)y\|^2)$

$= 2(|\alpha|^2 \mu_x(E) + |\beta|^2 \mu_y(E))$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 d\mu_{\alpha x+\beta y}(\lambda) \leq 2\left(|\alpha|^2 \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) + |\beta|^2 \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 d\mu_y(\lambda)\right)$

$< +\infty$ poiché $x, y \in D(A)$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y \in D(A) \Rightarrow D(A)$ è un sottospazio.

Mostriamo ora che è un sottospazio denso.

Prendiamo $E_n := \{|f| < n\}$. Poiché f è boreliana, $E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

Sia ora $x \in H$ e sia $P(E_n)x =: x_n$.

Mostriamo quindi che $x_n \longrightarrow x$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$.

Per prima cosa, se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

$\mu_{x_n}(E) = \| P(E)x_n\|^2 = \| P(E)P(E_n)x\|^2 =$ (ma P è una misura spettrale)

$= \| P(E\cap E_n)x\|^2 = \mu_x(E\cap E_n)$

Come si trasporta questo all'integrale? Mostriamo, come al solito, cosa accade solo sulle funzioni semplici. Sia $\{F_k\}_{k=1}^N$ una partizione misurabile di $\mathbb{C}$ e sia $s(\lambda) := \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{F_k}(\lambda)$

$$\int_{\mathbb{C}} s(\lambda)\, d\mu_{x_n}(\lambda) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu_{x_n}(F_k)$$

$$= \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu_x(F_k\cap E_n) = \int_{\mathbb{C}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{F_k\cap E_n}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{F_k}(\lambda)\cdot \chi_{E_n}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

$$= \int_{\mathbb{C}} s(\lambda)\chi_{E_n}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) = \int_{E_n} s(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

per cui $\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 d\mu_{x_n}(\lambda) = \int_{E_n} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) \leq n^2 \mu_x(E_n) \leq n^2 \|x\|^2 < +\infty$

Ma questo vale $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$. Adesso

$\|x_n - x\|^2 = \|(\mathbb{1} - P(E_n))x\|^2 = \|P(E_n^c)x\|^2 = \mu_x(E_n^c) = \int_{\mathbb{C}} \chi_{E_n^c}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$

ma $\chi_{E_n^c} \in L^1(\mathbb{C}, \mu_x)$, dominata da 1 $\forall n \in \mathbb{N}$, che è integrabile poiché $\mu_x(\mathbb{C}) < +\infty$, e $\lim_{n\to+\infty} \chi_{E_n^c}(x) = 0 \Rightarrow$ per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{C}} \chi_{E_n^c}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \lim_{n\to+\infty} \chi_{E_n^c}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) = 0$$

$\Rightarrow x_n \longrightarrow x \Rightarrow D(A)$ è denso. Sia ora $f_n := f\chi_{E_n}$.

f_n è una funzione boreliana limitata e prendiamo

$F: x \in H \longmapsto \int_{\mathbb{C}} f_n(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \in \mathbb{C} \Rightarrow F \in H^*$

$\Rightarrow$ per il teorema di Riesz $\exists!\ y \in H$ con $F(x) = \langle y, x\rangle$

ma quell'y è individuato univocamente da $x \Rightarrow$ posso pensare $y = Bx$, con $B \in B(H) \Rightarrow$ se definisco $A_n := B^*$ ho trovato che

$\exists!\ A_n \in B(H)$ con $\langle x, A_n x\rangle = \int_{\mathbb{C}} f_n(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \quad \forall x \in H$

Prendiamo ora $x \in D(A)$ e mostriamo che $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ è di Cauchy:

$$\|A_n(x) - A_m(x)\|^2 = \langle x, (A_n - A_m)^*(A_n - A_m)x\rangle = \text{adeguando il teorema spettrale}$$
$$= \int_{\mathbb{C}} |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 \, |\chi_{E_n}(\lambda) - \chi_{E_m}(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 \chi_{E_n \setminus E_m}(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) \leq \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 \chi_{E_m^c}(\lambda) d\mu_x($$

ma per $m \to +\infty$ l'integrando è dominato da $|f(\lambda)|^2$, integrabile poiché $x \in D(A)$ e converge a 0 puntualmente $\Rightarrow$ per il teorema di Lebesgue $\|A_n(x) - A_m(x)\|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \{A_n(x)\}_n$ è di Cauchy $\Rightarrow$ converge e sia $Ax := \lim_{n\to+\infty} A_n x$

$$\Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, A_n x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n(\lambda)\, d\mu_x(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

(sempre per Lebesgue).

(ii)

Prendiamo $F_n := \{n-1 \leq |f| < n\}$ una partizione misurabile di $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ poiché P è una misura spettrale, avremo $\forall x \in H$

$$x = P(\mathbb{C})x = P\Big(\bigcup_n F_n\Big)x = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_n)x$$

Sia $x_n := P(F_n)x$. Avremo allora

$$\|x\|^2 = \Big\langle \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \Big\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} \langle P(F_n)x, P(F_m)x\rangle\Big)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} \langle x, P(F_n)P(F_m)x\rangle\Big) = \Big(\begin{array}{l}\text{ma } F_n \cap F_m = \varnothing \ \forall n \neq m \\ \Rightarrow \text{per la proposizione precedente} \\ P(F_n)P(F_m) = 0 \\ \text{se } n \neq m\end{array}\Big)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\langle x, P(F_n)x\rangle\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2$$

Definiamo allora $H_n := \mathrm{Im}(P(F_n))$. Avremo che $H \simeq \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n$ per il teorema di decomposizione ortogonale. Definiamo quindi $A_n := A|_{H_n}$ e mostriamo che H_n è A_n-invariante. Sia $x \in H_n$, poiché $x \in H_n = \mathrm{Im}(P(F_n)) \Rightarrow x = P(F_n)x$, per cui

$$\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) = \int_{F_n} |f(\lambda)|^2 \, d\mu_x(\lambda) \leq n^2\, \mu_x(F_n) \leq n^2 \|x\|^2 < +\infty$$

$\Rightarrow x \in D(A)$.

Mostriamo che $A_n(x) \in H_n^{\perp}$. Prendiamo $y \in H_n^{\perp}$ e calcoliamo

$$\langle y, A_n x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} (-i)^k \langle x + i^k y, A_n(x + i^k y)\rangle = \frac{1}{4}\sum (-i)^k \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\, d\mu_{x+i^k y}($$

Ora, però, $\mu_{x+i^k y}(E) = \|P(E)(x+i^k y)\|^2 = \|P(E)x\|^2 + \|P(E)y\|^2 +$
$+ 2\,\mathrm{Re}\,[i^k \langle P(E)x, P(E)y\rangle]$

Osserviamo però che

$$\langle P(E)x, P(E)y\rangle = \langle P^2(E)x, y\rangle = \langle P(E)x, y\rangle = \langle P(E)P(F_n)x, y\rangle$$

$= \langle [P(F_n)P(E)]x, y\rangle = 0$ (poiché $(P(F_n)P(E))x \in H_n$)

e dunque

$\langle P(E)x, P(E)y\rangle = \|P(E)x\|^2 + \|P(E)y\|^2 = \mu_x(E) + \mu_y(E)$

$\Rightarrow \langle y, A_n x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k\left(\int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,d\mu_x(\lambda) + \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,d\mu_y(\lambda)\right) = 0$

$\Rightarrow A_n \in H_n^{\perp} = H_n$, poiché H_n è chiuso essendo immagine di un proiettore.

Mostriamo che $A_n \in B(H_n)$. Siano $x, y \in H_n$

$$|\langle y, A_n x\rangle| = \left|\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k\int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,d\mu_{x+i^k y}(\lambda)\right| = \left|\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k\int_{F_n} f(\lambda)\,d\mu_{x+iy}(\lambda)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\|f\|_\infty\,\|x+i^k y\| \leq \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} n(\|x\|+\|y\|) = n(\|x\|+\|y\|)$$

$\Rightarrow A_n \in B(H)$. Siamo allora nel caso della proposizione precedente, poiché posso prendere $x = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $Ax = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n x_n$ e gli A_n sono autoaggiunti poiché f è una funzione reale.

Mostriamo per finire che $D(A) = D(A^*)$ e abbiamo fatto

$x \in D(A) \iff \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2\,d\mu_x(\lambda) < +\infty$

$$\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2\,d\mu_x(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{F_n} |f(\lambda)|^2\,d\mu_x(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2\,d\mu_{x_n}(\lambda)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\|A_n x_n\| < +\infty$$

$\Rightarrow x \in D(A^*) \iff x \in D(A) \Rightarrow A = A^*$ ∎

Con in mano questo risultato, siamo quasi pronti per il teorema spettrale per operatori non limitati, ma prima

LEMMA (proiezione stereografica)

Sia $C: \mathbb{R} \longrightarrow \partial B_1(0)\setminus\{1\} \subseteq \mathbb{C}$. C è un omeomorfismo

$$x \longmapsto \frac{x+i}{x-i}$$

dim

Prendiamo la retta $Re(z) = -1$. Questa è chiaramente omeomorfa a $\mathbb{R}$. Prendiamo un punto qualsiasi su questa retta, tracciamo la congiungente con 1 e becchiamo un valore sul bordo della circonferenza unitaria. Tale punto sarà $C(x)$, dove x è il punto che ottengo se torno indietro con l'omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\{Re(z) = -1\}$. Dunque avrò due applicazioni

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \{Re(z) = -1\} \subseteq \mathbb{C} \qquad \psi: \{Re(z) = -1\} \longrightarrow \partial B_1(0)\setminus\{1\}$$

$$x \longmapsto -1 + 2ix \qquad -1 + ix \longmapsto \frac{x^2-4}{x^2+4} + i\,\frac{4x}{x^2+4}$$

Ora, entrambe le funzioni sono omeomorfismi, dunque $\psi\circ\varphi$

pure è un omeomorfismo. Se facciamo vedere che $\psi \circ \varphi = C$ abbiamo concluso. Sia $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \psi(\varphi(x)) = \frac{(2x)^2 - 4 + i4(2x)}{(2x)^2 + 4} = \frac{x^2 + 2ix - 1}{x^2 + 1} = \frac{x+i}{x-i}$$

$\Rightarrow C$ è un omeomorfismo ∎

LEMMA (trasformazione di Cayley)
Sia H uno spazio di Hilbert e $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ autoaggiunto. Sia $U := (A + i\mathbb{1})(A - i\mathbb{1})^{-1} \Rightarrow$
(i) U è unitario
(ii) $\ker(U - \mathbb{1}) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(U - \mathbb{1}) = D(A)$
(iii) $\forall x \in D(A)$, $Ax = i[(U + \mathbb{1})(U - \mathbb{1})^{-1}]x$

dim
(i) Poichè A è autoaggiunto, per il criterio fondamentale di autoaggiuntezza, $\mathrm{Im}(A \pm i\mathbb{1}) = H$ e $\ker(A \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$
$\Rightarrow A \pm i\mathbb{1}$ è un isomorfismo tra H e $D(A)$. Ma allora abbiamo

$$U : H \xrightarrow{(A-i\mathbb{1})^{-1}} D(A) \xrightarrow{A+i\mathbb{1}} H$$

$\Rightarrow U$ è un isomorfismo di H in sé. Mostriamo che è pure isometrico. Come averamo visto nel criterio di autoaggiuntezza ((ii) $\Rightarrow$ (iii)), $\forall x \in D(A)$

$$\|(A+i\mathbb{1})x\|^2 + \|(A-i\mathbb{1})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x^2\|$$

$$\Rightarrow \|Ux\|^2 = \|(A+i\mathbb{1})((A-i\mathbb{1})^{-1}x)\|^2 = \|(A-i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1}x\|^2 = \|x\|^2$$

$\Rightarrow U$ è isometrico $\Rightarrow U$ è unitario
(ii) Mostriamo che $U - \mathbb{1}$ è un isomorfismo su $D(A)$

$$U - \mathbb{1} = (A+i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1} - \mathbb{1} = (A - i\mathbb{1} + 2i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1} - \mathbb{1} = 2i(A-i\mathbb{1})^{-1}$$

ma $(A-i\mathbb{1})^{-1}$ è un isomorfismo da H in $D(A)$ $\Rightarrow$ lo è anche $U - \mathbb{1}$
(iii) Sia $x \in D(A)$

$$i[(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}]x = i\left[(U+\mathbb{1})\frac{1}{2i}(A-i\mathbb{1})\right]x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left((A+i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1} + \mathbb{1}\right)(A-i\mathbb{1})\right]x = \frac{1}{2}\left[(A+i\mathbb{1}) + (A-i\mathbb{1})\right]x = Ax$$

∎

PROP
Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi di misura e sia $f: Y \longrightarrow X$ misurabile tale che $\forall E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \nu(f^{-1}(E))$
$\Rightarrow \forall g \in L^1(X, \mu)$, $\int_X g\, d\mu = \int_Y g \circ f\, d\nu$

dim

Dimostriamolo sdo per funzioni semplici.

Sia $\{E_n\}_{n=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}$ partizione di X e sia $s(x) := \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{E_n}(x)$

$$\int_X s(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \nu(f^{-1}(E_n))$$

$$= \int_Y \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{f^{-1}(E_n)}(y)\, d\nu(y) = \int_Y \sum_{n=1}^{N} \alpha_n (\chi_{E_n} \circ f)(y)\, d\nu(y)$$

$$= \int_Y (s \circ f)(y)\, d\nu(y)$$

■

TEOREMA (spettrale per operatori autoaggiunti non limitati)

Sia $A: D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ autoaggiunto $\Rightarrow \exists!\ P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H)$ misura spettrale t.c. $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda$, cioé

$D(A) = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\mu_x(\lambda) < +\infty\}$ e $\langle x, Ax\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu_x(\lambda)$ $\quad \forall x \in D(A)$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$

dim

Sia U la trasformazione di Cayley di A, $U = (A+i\mathbb{1})(A-i\mathbb{1})^{-1}$. Poiché é unitario, é un operatore normale, per cui anch' esso avrá una sua misura spettrale e, poiché $\sigma(U) \subseteq \partial B_1(0)$, tale misura spettrale sará definita su $\mathcal{B}(\partial B_1(0))$ e sia essa $Q: \mathcal{B}(\partial B_1(0)) \longrightarrow B(H)$. Definiamo allora

$P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H)$

$E \longmapsto Q(C(E))$, dove C é la proiezione stereografica

P é una misura spettrale, infatti:

(i) $P(E) = Q(C(E))$, ma Q é una misura spettrale, dunque $Q(C(E))$ é un proiettore ortogonale

(ii) $P(\emptyset) = Q(C(\emptyset)) = 0$, sempre perché Q é una misura spettrale. Ora $1 \notin \sigma(U)$, poiché essendo una trasformazione di Cayley, per il lemma precedente, $U - \mathbb{1}$ é invertibile

$\Rightarrow Q(\partial B_1(0)) = Q(\partial B_1(0) \setminus \{1\}) + Q(1) = Q(\partial B_1(0) \setminus \{1\}) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow P(\mathbb{R}) = Q(\partial B_1(0) \setminus \{1\}) = \mathbb{1}$

(iii) Sia $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ una famiglia disgiunta, abbiamo

$$P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)x = Q\Big(C\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)\Big)x = Q\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C(E_k)\Big)x$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} Q(C(E_k))x = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(E_k)x$$

Quindi P é effettivamente una misura spettrale $\Rightarrow$ per il teorema precedente presa $f(\lambda) = \lambda$ $\exists!\ D(B) \subseteq H \longrightarrow H$ con $D(B) = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\mu_x(\lambda) < +\infty\}$.

$\langle x, Bx\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_x(\lambda)$ e $B = B^*$, poiché f è una funzione reale
Basta dimostrare allora che $B = A$.
Prendiamo $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\partial B_1(0))$ t.c. $\partial B_1(0) \setminus \{1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $E_n \cap E_m = \emptyset \ \forall n \neq m$ e $1 \notin \bar{E}_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ e definiamo $H_n := \mathrm{Im}(Q(E_n))$. Avremo che $H_n \perp H_m$ se $n \neq m$ e se prendo $x \in H$ avrò $\sum_{n\in\mathbb{N}} Q(E_n)x = Q(\partial B_1(0)\setminus\{1\})x = x$
$\Rightarrow H \simeq \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n$. Sia dunque $x \in H_n$, mostriamo che $x \in D(B)$, prima però osserviamo che

$$\mu_x(E) = \langle x, P(E)x\rangle = \langle x, Q(C(E))x\rangle = \langle x, Q(D^{-1}(E))x\rangle = \nu_x(D^{-1}(E))$$

(dunque possiamo utilizzare la prop. precedente)

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_x(\lambda) = \int_{\partial B_1(0)} D^2(z)\, d\nu_x(z) = \int_{E_n} \left(i\,\frac{z+1}{z-1}\right)^2 d\nu_x(z) \leq K\|x\|^2 < +\infty \Rightarrow x \in D(B)$$

($1 \notin \bar{E}_n$ (maggiorato col sup K))

allora avremo

$$\langle x, Bx\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_x(\lambda) = \int_{\partial B_1(0)} D(z)\, d\nu_x(z) = \int_{E_n} i\,\frac{z+1}{z-1}\, d\nu_x(z) = \langle x, i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}x\rangle$$

(di nuovo, $1 \notin \bar{E}_n$ dunque questo è un cf limitato di U)

$\Rightarrow$ usando il solito polarizzazione, $\forall x, y \in H_n$, avrò
$\langle y, Bx\rangle = \langle y, i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}x\rangle$.
Dopodiché, se $y \in H_n^{\perp}$, con un conto del tutto analogo, troviamo che se $x \in H_n \Rightarrow \langle y, Bx\rangle = 0$ e inoltre

$$\langle y, i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}x\rangle = \langle y, i[(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}](Q(E_n)x)\rangle = \langle y, Q(E_n)\underbrace{[i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}]x}_{\in H_n}\rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle y, Bx\rangle = \langle y, i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}x\rangle$ sia su H_n che su $H_n^{\perp}$
$\Rightarrow Bx = i(U+\mathbb{1})(U-\mathbb{1})^{-1}x = Ax$ per il lemma della trasformazione di Cayley
Questo vale $\forall x \in \langle \bigcup_n H_n\rangle \Rightarrow B|_{\langle \bigcup_n H_n\rangle} \preccurlyeq A$, ma A è autoaggiunto, dunque chiuso
$\Rightarrow \overline{B|_{\langle \bigcup_n H_n\rangle}} \preccurlyeq A$, ma B è essenzialmente autoaggiunto su $\langle \bigcup_n H_n\rangle$ e quest'ultimo è un core per $B \Rightarrow B \prec A$
$\Rightarrow B = A$ poiché essendo autoaggiunto è simmetrico massimale ∎

TEOREMA (calcolo funzionale)
Sia $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ autoaggiunto e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ boreliana e sia $f(A) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda$, dove P è misura spettrale di A
$\Rightarrow$

(i) $f(A)^* = \bar{f}(A)$
(ii) $f(A)g(A) \subseteq (fg)(A)$
(iii) f, g limitate $\Rightarrow f(A)g(A) = (fg)(A)$
(iv) $f(A)^* f(A) = |f|^2(A)$

Abbiamo dunque visto ciò che ci serve sapere sugli operatori non limitati. Ricordiamoci che eravamo partiti dalla ricerca di una dinamica per il sistema quantistico e quindi ci piacerebbe applicare queste cose allo studio dei gruppi ad un parametro fortemente continuo.

PROP
Sia $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ autoaggiunto $\Rightarrow$ posto $U(t) := e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$ $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di unitari, $D(A) = \left\{ x \in H : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{t} x \right\}$ e posso scrivere $Ax = \frac{1}{i} \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{t} x$

dim
Mostriamo che $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di unitari:
(i) U è unitario, perché $U^{-1} = e^{-itA} = U^*$, dunque $U^*U = UU^* = \mathbb{1}$
(ii) $U(t_1)U(t_2) = e^{it_1A} e^{it_2A} = e^{i(t_1+t_2)A} = U(t_1+t_2)$
per il cf questo è l'operatore che ottengo con $e^{it_1} \cdot e^{it_2}$, poiché e^{it} è limitata
(iii) $\|U(t)x - x\|^2 = \|(e^{itA} - \mathbb{1})x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 \, d\mu_x(\lambda)$
Ora $\mu_x(\mathbb{R}) = \|x\|^2 < +\infty$ e $|e^{it\lambda} - 1|^2 \leq 4$, integrabile
$\xRightarrow{\text{TCD}} \lim_{t\to 0} \|U(t)x - x\|^2 = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 \, d\mu_x(\lambda) = 0$
$\Rightarrow \{U(t)\}_t$ è un g.f.c.u. Mostriamo ora le altre due cose
Sia $x \in D(A)$
$$\left\| \left(\frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} - A \right) x \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\lambda}-1}{it} - \lambda \right|^2 d\mu_x(\lambda)$$
Ora $|e^{ix} - 1|^2 = (\cos x - 1)^2 + \sin^2 x = 2(1 - \cos x)$
$= 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4 \frac{x^2}{4} = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e dunque
$$\left| \frac{e^{it\lambda}-1}{it} - \lambda \right|^2 \leq \left(\left| \frac{e^{it\lambda}-1}{it} \right| + |\lambda| \right)^2 \leq \left(\frac{|t\lambda|}{|t|} + |\lambda| \right)^2 = 4|\lambda|^2$$
che è integrabile, poiché $x \in D(A)$ e quindi, per il teorema spettrale, λ^2 è integrabile.
$\Rightarrow$ per Lebesgue $\lim_{t\to 0} \left\| \left(\frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} - A \right) x \right\| = 0$

cioè $D(A) \subseteq T := \left\{ x \in H : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{t} x \right\}$. Inoltre, se $Bx := \frac{1}{i} \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{t} x$, $A \preccurlyeq B$. Ma B è simmetrico, infatti presi $x, y \in T =: D(B)$ avremo

$$\langle x, By\rangle = \frac{1}{i} \lim_{t\to 0} \left\langle x, \left(\frac{U(t)-\mathbb{1}}{t}\right) y \right\rangle = \frac{1}{i} \lim_{t\to 0} \left\langle \left(\frac{U(-t)-\mathbb{1}}{t}\right) x, y \right\rangle$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{1}{i} \left[\frac{U(-t)-\mathbb{1}}{-t}\right] x, y \right\rangle = \langle Bx, y\rangle \Rightarrow B \text{ è simmetrico,}$$

ma A essendo autoaggiunto è simmetrico massimale $\Rightarrow A = B$ ■

La cosa interessante è che posso invertire questo risultato, cioè dato un g.f.c.u. posso sempre trovare un operatore autoaggiunto di cui il mio g.f.c.u. è l'esponenziale.

TEOREMA (Stone)

Sia $U : \mathbb{R} \longrightarrow B(H)$ un gruppo ad un parametro fortemente continuo di unitari $\Rightarrow \exists A = A^*$ su H tale che $U(t) = e^{itA}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (e quindi $D(A) = \left\{ x \in H : \exists \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} x \right\}$ e

$Ax = \frac{1}{i} \lim_{t\to 0} \frac{U(t)-\mathbb{1}}{t} x$, $x \in D(A)$. A è detto *generatore* del gruppo.

dim

Sia $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-1,1]$, $\varphi \not\equiv 0$ e tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Definiamo $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, in questo modo $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$ e $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Mostriamo che $D(A)$ è denso. Sia $x \in H$ e consideriamo $F : y \in H \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \langle y, U(t)x\rangle\,dt$ (che è antilineare)

Ora $F \in H^*$, dunque per il teorema di Riesz $\exists!\, x_\varepsilon \in H$ con $\langle y, x_\varepsilon\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \langle y, U(t)x\rangle\,dt$, infatti basta mostrare che $y \longmapsto \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \langle y, U(t)x\rangle\,dt}$ è lineare e limitata:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \langle y, U(t)x\rangle\,dt \right| \le \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \|x\| \|y\|\,dt = \|x\|\|y\|$$

Studiamo ora $\|x - x_\varepsilon\|$

$$\|x - x_\varepsilon\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) U(t)x\,dt - x \right\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) (U(t)-\mathbb{1})x\,dt \right\|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) \|(U(t)-\mathbb{1})x\|\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) \|(U(t)-\mathbb{1})x\|\,dt$$

$$\le \sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \|(U(t)-\mathbb{1})x\|$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \|x - x_\varepsilon\| = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \|(U(t)-\mathbb{1})x\| \right) = \lim_{t\to 0} \|(U(t)-\mathbb{1})x\| = 0$$

poiché $U(t)$ è gruppo ad un parametro fortemente continuo di unitari

$\Rightarrow$ Se mostro che $x_\varepsilon \in D(A)\ \forall \varepsilon > 0$, ho mostrato che $D(A)$ è denso, allora:

$$\frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} x_\varepsilon = \frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(s) U(s) x \, ds \right)$$

(l'operatore $U-\mathbb{1}$ è limitato quindi continuo allora posso scambiare l'operatore con l'integrale)

$$= \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{t} [(U(t)-\mathbb{1})U(s)] x \, ds$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{t} [U(t+s) - U(s)] x \, ds$$

$$= \frac{1}{i} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{t} U(\underbrace{t+s}_{s'}) x \, ds - \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{t} U(s) x \, ds \right]$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_\varepsilon(s-t) - \varphi_\varepsilon(s)}{t} \right] U(s) \, ds$$

Ora, $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dunque $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon(s-t)-\varphi_\varepsilon(s)}{t} = -\varphi_\varepsilon'(s)$

$\Rightarrow$

$$\left\| \frac{U(t)-\mathbb{1}}{it} x_\varepsilon - \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} (-\varphi_\varepsilon'(s)) U(s) x \, ds \right\| =$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varphi_\varepsilon(s-t)-\varphi_\varepsilon(s)}{t} + \varphi_\varepsilon'(s) \right] U(s) x \, ds \right\| \leq$$

U è unitario $\|U(s)x\| = \|x\|$ e siccome manderò $t\to 0$, supponiamo che quella roba abbia supporto in $[-1,1]$

$$\leq \int_{-1}^{1} \left| \frac{\varphi_\varepsilon(s-t)-\varphi_\varepsilon(s)}{t} + \varphi_\varepsilon'(s) \right| \|x\| \, ds \xrightarrow{t\to 0}$$

Perché $\frac{\varphi_\varepsilon(s-t)-\varphi_\varepsilon(s)}{t} + \varphi_\varepsilon'(s) \overset{\text{per Lagrange}}{=} -\varphi_\varepsilon'(s-\theta t) + \varphi_\varepsilon'(s)$ con $\theta \in (0,1)$

inoltre φ_ε' è uniformemente continua (perché continua su un compatto e zero altrove)

dunque $\left| \frac{\varphi_\varepsilon(s-t)-\varphi_\varepsilon(s)}{t} + \varphi_\varepsilon'(s) \right| \xrightarrow{t\to 0} 0$ uniformemente in s.

Allora il limite esiste $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subseteq D(A) \Rightarrow D(A)$ è denso

Mostriamo che A è essenzialmente autoaggiunto, sempre col solito corollario. Sia $x \in \ker(A^* - i\mathbb{1})$ e mostriamo che deve essere 0.

Sia $y \in D(A)$

$$\frac{d}{dt} U(t)y = \lim_{h\to 0} \frac{U(t+h)-U(t)}{h} y = U(t) \lim_{h\to 0} \frac{U(h)-\mathbb{1}}{h} y = iU(t)Ay$$

allo stesso modo $\frac{d}{dt} U(t)y = \lim_{h\to 0} \frac{U(h)-\mathbb{1}}{h} (U(t)y)$

$\Rightarrow U(t)y \in D(A)$ e $\lim_{h\to 0} \frac{U(h)-\mathbb{1}}{h}(U(t)y) = iAU(t)y$

$\Rightarrow iAU(t)y = \frac{d}{dt}U(t)y = iU(t)Ay$

Dunque posso calcolare

$\frac{d}{dt}\langle U(t)y, x\rangle = \langle \frac{d}{dt}U(t)y, x\rangle = \langle iAU(t)y, x\rangle$ (ma $x \in \ker(A^*-i\mathbb{1})$ dunque $x \in D(A^*)$)

$= \langle iU(t)y, A^*x\rangle = \langle iU(t)y, ix\rangle = \langle U(t)y, x\rangle$

che è un ODE

$\Rightarrow \langle U(t)y, x\rangle = e^t\langle y, x\rangle$

ma $|\langle U(t)y, x\rangle| \leq \|U(t)y\|\,\|x\| = \|y\|\,\|x\| \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle U(t)y, x\rangle$ è limitata $\Rightarrow$ siccome e^t non è limitata, $\langle y, x\rangle = 0$. Questo vale $\forall y \in D(A)$, che è denso $\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \ker(A^* - i\mathbb{1}) = \{0\}$ (analogamente con $+$)

$\Rightarrow$ A è essenzialmente autoaggiunto.

A questo punto sia $V(t) = e^{it\bar{A}}$ gruppo ad 1 parametro f.c. (prop. precedente)

Siano $x, y \in D(A)$

$\frac{d}{dt}\langle x, V(t)^*U(t)y\rangle = \frac{d}{dt}\langle V(t)x, U(t)y\rangle$

$= \langle \frac{d}{dt}V(t)x, U(t)y\rangle + \langle V(t)x, \frac{d}{dt}U(t)y\rangle$

$= \langle i\bar{A}V(t)x, U(t)y\rangle + \langle V(t)x, iAU(t)y\rangle$

$= \langle iV(t)x, AU(t)y\rangle + \langle V(t)x, iAU(t)y\rangle$

$= \langle iV(t)x, AU(t)y\rangle - \langle iV(t)x, AU(t)y\rangle = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle x, V(t)^*U(t)y\rangle =$ costante $= \langle x, y\rangle$ che è il suo valore in $t=0$

$\Rightarrow V(t)^*U(t) = \mathbb{1}$, ma sono entrambi unitari

$\Rightarrow V(t) \equiv U(t)$

ma allora $A = \bar{A}$ e dunque è autoaggiunto ∎

Giunti a questo punto facciamo un salto indietro. Avevamo detto che se ho uno stato invariante ω per il gruppo ad un parametro $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, dove $\mathcal{A}$ è l'algebra delle osservabili, che è la dinamica del mio sistema quantistico e ho una rappresentazione (π_ω, x_ω), ho un g.f.c.u. $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq B(H_\pi)$ che rappresenta la dinamica.

Adesso il teorema di Stone mi dice che dato tale $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ posso fornire un operatore autoaggiunto $H: D(H) \subseteq H_\pi \longrightarrow H_\pi$, tale che $\forall t\in\mathbb{R}$ $U(t) = e^{itH}$. H è detto operatore

hamiltoniano del sistema quantistico. e sta a rappresentare l'energia del sistema. Perché questo nome e perché gli diamo quel significato? Nel formalismo hamiltoniano, abbiamo una funzione, $H(q,p)$, che ci permette di scrivere le equazioni del moto come

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{cases}$$

dove $q(t)$ e $p(t)$ sono posizione e impulso e

$H(q(t), p(t)) = \frac{p^2(t)}{2m} + V(q(t))$, l'Hamiltoniana vera e propria, é l'energia del sistema.

Dunque H in meccanica classica gioca un duplice ruolo: é l'energia del sistema e genera anche l'evoluzione temporale del sistema. Quindi, in meccanica quantistica, l'operatore Hamiltoniano genera il gruppo che rappresenta l'evoluzione temporale (cioé la dinamica) del sistema, dunque é del tutto naturale interpretarlo come l'energia del sistema quantistico. In particolare, prendendo $\psi \in D(H)$ (in generale H_π é uno spazio di Hilbert, non per forza uno spazio di funzioni, ma tanto andremo a parare su $L^2(\mathbb{R})$) possiamo definire $\psi_t := U(t)\psi$. Come abbiamo detto H genera il gruppo $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, dunque il teorema di Stone mi dice

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}(\psi_t) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(U(t)\psi) = H(U(t)\psi) = H(\psi_t)$$

L'equazione ottenuta, $H(\psi_t) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(\psi_t)$, é detta equazione di Schröedinger e mi dice qual é l'evoluzione temporale degli stati del sistema.

Rimanendo sulle analogie con il formalismo hamiltoniano, se $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é un'osservabile in meccanica classica (di classe $\mathcal{C}^2$), avevamo che se $q(t)$ e $p(t)$ risolvono il sistema di Hamilton e (q_t, p_t) é l'evoluta al tempo t

$$\frac{d}{dt}(f(q_t, p_t)) = \{H, f\}$$

In modo del tutto analogo se scelgo $D_0 := \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) U(t)\psi \, dt : \varphi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \right\}$ e $A : D(A) \subseteq H_\pi \longrightarrow H_\pi$ e tale che $A(D_0) \subseteq D_0$, posto $A_t := e^{itH} A e^{-itH}$, detta evoluzione temporale di A, risulta, su D_0, $\frac{1}{i}\frac{d}{dt}A_t = [H, A_t]$, detta

Equazione del moto di Heisenberg. Chi è H? E che c'entra tutto quello che abbiamo fatto finora? Torniamo nel concreto del modellino, cioè ho una particella in moto unidimensionale. L'algebra delle osservabili è W e, presa π una sua rappresentazione regolare e irriducibile, $H_\pi = L^2(\mathbb{R})$, la dinamica è un qualche gruppo $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
In meccanica classica, l'evoluta temporale del sistema al tempo t è:

$$\begin{cases} q_t = q(t_0) + \frac{p(t)}{m} t \\ p_t = p(t_0) \end{cases}$$

Nel caso quantistico, avevamo detto che moralmente $W(\alpha+i\beta) = "e^{i(\alpha q+\beta p)}"$, dunque l'idea è che l'evoluta al tempo t si possa trovare determinando $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} \leq Aut(\mathcal{A})$ tale che

$$\alpha_t(W(\alpha+i\beta)) = \alpha_t(e^{i(\alpha q+\beta p)}) = e^{i(\alpha(q+p/m\, t)+\beta p)} = W(\alpha+i(\beta+\tfrac{\alpha t}{m}))$$

Quello che vogliamo, per concludere, è che tale gruppo esiste ed è implementato da un g.f.c.u. Ma prima

PROP
Sia H uno spazio di Hilbert, $Z: H \to H$ unitario e siano $A: D(A) \leq H \to H$, $B: D(B) \leq H \to H$ tale che $D(B) = Z(D(A))$ e $B = ZAZ^* \Rightarrow$
(i) B è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ A è autoaggiunto (e in tal caso posso scrivere $e^{itB} = Z e^{itA} Z^*$)
(ii) Se $D \leq D(A)$ è denso, $A|_D$ è essenzialmente autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $B|_{Z(D)}$ è essenzialmente autoaggiunto (e in tal caso $e^{it\overline{B|_{Z(D)}}} = Z e^{it\overline{A|_D}} Z^*$)

dim
(i) Usiamo il criterio fondamentale
$\Rightarrow$) Supponiamo che B sia autoaggiunto, avremo
$A = Z^* B Z$, dunque
$A^* = (Z^* B Z)^* = Z^* B^* Z^{**} = Z^* B Z = A \Rightarrow A = A^*$
$\Leftarrow$) Identico a qui sopra
$B^* = (ZAZ^*)^* = Z^{**} A^* Z^* = ZAZ^* = B \Rightarrow B = B^*$

Il tutto è ben posto, poiché Z fa "avanti e indietro" tra $D(A)$ e $D(B)$. Per quanto riguarda la formula, basta far

vedere che e^{itB} si scriva in quella forma. Ora, sappiamo che

$$Bx = \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{e^{itB}-\mathbb{1}}{t}x \qquad e \qquad Bx = (\mathcal{Z}A\mathcal{Z}^*)x$$

$$Ax = \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{e^{itA}-\mathbb{1}}{t}x$$

$$\Rightarrow Bx = \mathcal{Z}\left(\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{e^{itA}-\mathbb{1}}{t}\right)\mathcal{Z}^* x$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{Z}e^{itA}\mathcal{Z}^* - \mathcal{Z}\mathbb{1}\mathcal{Z}^*}{t}x = \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{Z}e^{itA}\mathcal{Z}^* - \mathbb{1}}{t}x$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}e^{itA}\mathcal{Z}^* = e^{itB}$$

(ii) Siccome $\overline{B_{|\mathcal{Z}(D)}}$ e $\overline{A_{|D}}$ sono autoaggiunti, si ricicla il punto (i)

∎

LEMMA

Siano $D(q) = D(p) = S(\mathbb{R})$, con q e p posizione e impulso $q(\psi)x = x\psi(x)$, $p(\psi)x = -i\psi'(x) \Rightarrow$

(i) $\alpha q + \beta p$ è essenzialmente autoaggiunto su $S(\mathbb{R})$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $W(\alpha+i\beta) = e^{i\overline{(\alpha q+\beta p)}}$

dim

(i) Consideriamo $\mathcal{Z}: \psi \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2}\psi(k) \in L^2(\mathbb{R})$ con $\gamma \in \mathbb{R}$. Ora $\mathcal{Z}$ è isometrico

$$\|\mathcal{Z}\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2}\psi(k)|^2\,dk = \int_{\mathbb{R}} |\psi(k)|^2\,dk = \|\psi\|^2$$

e inoltre è invertibile, con $(\mathcal{Z}^{-1}\psi)(k) := e^{i\frac{\gamma}{2}k^2}\psi(k)$ $\Rightarrow \mathcal{Z}$ è unitario. Inoltre, $\mathcal{Z}$ fissa $S(\mathbb{R})$, poiché se $\psi(k) \in S(\mathbb{R})$ pure $e^{-i\gamma/2k^2}\psi(k) \in S(\mathbb{R})$. Adesso, consideriamo F l'operatore trasformata di Fourier e definiamo $\hat{\mathcal{Z}} := F^{-1}\mathcal{Z}F$. F pure è unitario e fissa $S(\mathbb{R})$. A questo punto, se prendo $\psi \in S(\mathbb{R})$, se torno indietro con $\hat{\mathcal{Z}}^{-1}$, tale funzione sta ancora in $S(\mathbb{R})$, per cui ha senso calcolare

$$[(\hat{\mathcal{Z}}q\hat{\mathcal{Z}}^{-1})\psi]x = [(F^{-1}\mathcal{Z}FqF^{-1}\mathcal{Z}^{-1}F)\psi]x \qquad \text{ma } FqF^{-1} = p$$

$$= [(F^{-1}\mathcal{Z}p\mathcal{Z}^{-1}F)\psi]x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}[(\mathcal{Z}p\mathcal{Z}^{-1}F)\psi]k\,dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2}[(p\mathcal{Z}^{-1}F)\psi]k\,dk$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2} \frac{d}{dk} \left((\mathcal{F}^{-1} F) \psi \right)(k)\, dk$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2} \frac{d}{dk} \left(e^{\frac{i}{2}\gamma k^2} \hat{\psi}(k) \right) dk$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-i\frac{\gamma}{2}k^2} e^{i\frac{\gamma}{2}k^2} \left(i\gamma k \hat{\psi}(k) + \hat{\psi}'(k) \right) dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \left(\gamma k \hat{\psi}(k) - i \hat{\psi}'(k) \right) dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \left[\left((\gamma q + p) F \right) \psi \right](k)\, dk$$

$$= \left[\left(\mathcal{F}^{-1} (\gamma q + p) F \right) \psi \right](x) = \left[(\gamma p + q) \psi \right](x)$$

cioé, riassumendo, $\hat{\mathcal{Z}}\, q\, \hat{\mathcal{Z}}^{-1} = q + \gamma p$. Ora, come abbiamo già visto q è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ per la proposizione precedente $q + \gamma p$ è essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ora, questo vale ~~per~~ $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ se $\alpha \neq 0$ $\alpha q + \beta p = \alpha (q + \frac{\beta}{\alpha} p)$ è essenzialmente autoaggiunto. Se, invece, $\alpha = 0$ poco male, visto che posso ricidare lo stesso ragionamento, $F q F^{-1} = p$.

(ii) $\left[U(\alpha) \psi \right] x = e^{i\alpha x} \psi(x)$, $\left[V(\beta) \psi \right] x = \psi(x + \beta)$

Facciamo vedere che $U(\alpha) := e^{i\alpha \bar{q}}$ e $V(\beta) := e^{i\beta \bar{p}}$ sono i generatori dei rispettivi gruppi ad un parametro.

Partiamo da $U(\alpha)$; prendiamo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mi basta far vedere che la norma della differenza va a zero, cioé

$$\left\| \left(\frac{U(\alpha) - \mathbb{1}}{i\alpha} - q \right) \psi \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{i\alpha x} - 1}{i\alpha} - x \right|^2 |\psi(x)|^2\, dx$$

Ora $\left| \frac{e^{i\alpha x} - 1}{i\alpha} - x \right|^2 \leq \left(\left| \frac{e^{i\alpha x} - 1}{i\alpha} \right| + |x| \right)^2 \leq \left(\frac{|\alpha x|}{|\alpha|} + |x| \right)^2 = 4 |x|^2$

ma $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, per cui, per Lebesgue

$\lim_{\alpha \to 0} \left\| \left(\frac{U(\alpha) - \mathbb{1}}{i\alpha} - q \right) \psi \right\|^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{q}$ genera $U(\alpha)$. Allo stesso modo, $V(\beta)$ è generato da $\bar{p}$. A questo punto definiamo

$$Z(t) := e^{t^2 \frac{\alpha\beta}{2}}\, U(t\alpha) V(t\beta)$$

$\{ Z(t) \}_{t \in \mathbb{R}}$ è un g.f.c.u., infatti:

(i) è unitario, poiché lo sono U e V

(ii) $Z(t_1)Z(t_2) = e^{i(t_1^2+t_2^2)\frac{\alpha\beta}{2}} U(t_1\alpha)V(t_1\beta)U(t_2\alpha)V(t_2\beta)$

$= e^{i(t_1^2+t_2^2)^2\frac{\alpha\beta}{2}} e^{it_1t_2\alpha\beta} U((t_1+t_2)\alpha)V((t_1+t_2)\beta)$

$= e^{i(t_1+t_2)^2\frac{\alpha\beta}{2}} U((t_1+t_2)\alpha)V((t_1+t_2)\beta) = Z(t_1+t_2)$

(iii) $\|Z(t)\psi - \psi\| = \|(e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}} U(t\alpha)V(t\beta) - \mathbb{1})\psi\| =$

$= \|[(e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}}\mathbb{1} - \mathbb{1})U(t\alpha)V(t\beta)]\psi + (U(t\alpha)V(t\beta))\psi \pm U(t\alpha)\psi - \psi\|$

$\leq |e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}} - 1|\,\|U(t\alpha)V(t\beta)\psi\| + \|(V(t\beta)-\mathbb{1})U(t\alpha)\psi\| + \|(U(t\alpha)-\mathbb{1})\psi\|$

$= |e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}} - 1|\,\|\psi\| + \|(V(t\beta)-\mathbb{1})\psi\| + \|(U(t\alpha)-\mathbb{1})\psi\|$

Il primo termine va a zero senza problemi, mentre gli altri due vanno a zero poiché quei due termini sono a loro volta g.f.c.u. $\Rightarrow \{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ è g.f.c.u. Chi è il suo generatore? Sia $\psi \in S(\mathbb{R})$ e andiamo a calcolare

$$\left[\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{Z(t)-\mathbb{1}}{t}\psi\right](x) = \left[\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}}U(t\alpha)V(t\beta)-\mathbb{1}}{t}\psi\right](x)$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{e^{it^2\frac{\alpha\beta}{2}}e^{it\alpha x}\psi(x+t\beta)-\psi(x)}{t} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left(e^{i(t^2\frac{\alpha\beta}{2}+t\alpha x)}\psi(x+t\beta)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{i}\left[(it\alpha\beta + i\alpha x)e^{i(t^2\frac{\alpha\beta}{2}+t\alpha x)}\psi(x+t\beta) + e^{i(t^2\frac{\alpha\beta}{2}+t\alpha x)}\psi'(x+t\beta)\beta\right]\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{i}\left[i\alpha x\psi(x) - \beta\psi'(x)\right] = \alpha x\psi(x) - i\beta\psi'(x) = [(\alpha q+\beta p)\psi](x)$$

perciò, se $Z(t) = e^{itA}$, con $A = A^*$ per il teorema di Stone, sicuramente $\alpha q + \beta p \leq A$, ma di nuovo, come prima $\alpha q + \beta p$ è essenzialmente autoaggiunto e gli autoaggiunti sono simmetrici massimali $\Rightarrow \overline{\alpha q+\beta p} = A$

$\Rightarrow \overline{\alpha q+\beta p}$ genera $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \Rightarrow \overline{\alpha q+\beta p}$ genera $W(\alpha+i\beta)$, cioè

$W(\alpha+i\beta) = e^{i\overline{(\alpha q+\beta p)}}$

■

LEMMA

Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ spazio di misura, $f: X \to \mathbb{R}$ misurabile $\Rightarrow$ detto $D(M_f) := \{\psi \in L^2(X,\mu) : f\cdot\psi \in L^2(X,\mu)\}$, $M_f(\psi) := f\cdot\psi$ è autoaggiunto

TEOREMA

Siano $D(H_0) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \zeta(k) := k^2\hat{\psi}(k) \in L^2(\mathbb{R})\}$ e

$H_0(\psi) := [F M_{\frac{k^2}{2m}} F^{-1}](\psi)$, per $\psi \in D(H_0) \Rightarrow$

H_0 è autoaggiunto e, posto, $\alpha_t(A) := e^{itH_0} A e^{-itH_0}$, per $A \in \mathcal{W}$, $t \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq Aut(\mathcal{W})$ è un gruppo ad un parametro di automorfismi di $\mathcal{W}$ e $\alpha_t(W(\alpha+i\beta)) = W\left(\alpha + i\left(\beta + \frac{t\alpha}{m}\right)\right)$

dim

Mostriamo che H_0 è autoaggiunto. Per il lemma precedente $M_{\frac{k^2}{2m}}$ è autoaggiunto.

$H_0^* = (F M_{\frac{k^2}{2m}} F^{-1})^* = (F^{-1})^* M_{\frac{k^2}{2m}}^* F^* = F M_{\frac{k^2}{2m}} F^{-1}$

$\Rightarrow$ per la proposizione precedente $e^{itH_0} = F e^{it\frac{k^2}{2m}} F^{-1}$

Mostriamo che $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ come definito nella tesi è un gruppo ad un parametro di automorfismi. Mostriamo dunque che è uno *-automorfismo. È banalmente lineare.

$\alpha_t(AB) = e^{itH_0} AB e^{-itH_0} = e^{itH_0} A e^{-itH_0} e^{itH_0} B e^{-itH_0}$

$= \alpha_t(A)\alpha_t(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{W}$

$\alpha_t(A^*) = e^{itH_0} A^* e^{-itH_0} = (e^{itH_0} A e^{-itH_0})^* = \alpha_t^*(A)$

Sia $A \in Ker(\alpha_t) \Rightarrow \alpha_t(A) = 0$, ma $\alpha_t(A) = e^{itH_0} A e^{-itH_0} = 0$

$\Rightarrow A = 0$, dunque α_t è iniettiva. Inoltre è pure suriettiva, poiché riesco ad invertirla senza problemi, poiché $\alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}$

$\Rightarrow \{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo ad un parametro di automorfismi.

Facciamo ora vedere che vale quella formula

$\alpha_t(W(\alpha+i\beta)) = \alpha_t(e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} e^{i\alpha q} e^{i\beta p}) = e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} e^{itH_0} e^{i\alpha q} e^{i\beta p} e^{-itH_0}$

ma $p = FqF^{-1} = F M_k F^{-1}$ per come ho definito q

$\Rightarrow e^{i\beta p} = F e^{i\beta M_k} F^{-1}$ e $e^{i\beta p} e^{-itH_0} = e^{-itH_0} e^{i\beta p}$

quindi $\alpha_t(W(\alpha+i\beta)) = e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} e^{itH_0} e^{i\alpha q} e^{-itH_0} e^{i\beta p}$

Ora $e^{itH_0} e^{i\alpha q} e^{-itH_0}$ è un gruppo ad un parametro coniugato con un operatore unitario $\Rightarrow$ è il gruppo ad un parametro generato da $e^{itH_0} q e^{-itH_0}$ per la proposizione precedente, ma per come ho visto nel lemma precedente

$e^{itH_0} q e^{-itH_0} = q + \frac{t}{m} p$

$\Rightarrow \alpha_t(W(\alpha+i\beta)) = e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} e^{i\alpha(q+\frac{t}{m}p)} e^{i\beta p} = e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} W(\alpha + i\frac{t}{m}\alpha) W(i\beta)$

$= e^{i\frac{\alpha\beta}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sigma(\alpha - i\frac{t\alpha}{m}, i\beta)} W\left(\alpha + i\left(\beta + \frac{t}{m}\alpha\right)\right)$

$= W\left(\alpha + i\left(\beta + \frac{\alpha t}{m}\right)\right)$

Dunque questo H_0 genera la dinamica della particella quantistica. Inoltre, se $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ con $\psi'' \in L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \psi \in D(H_0)$ e $H_0(\psi) = -\frac{1}{2m}\psi''$ poiché la trasformata di Fourier scambia la moltiplicazione per la variabile di ψ in $-i\psi' \Rightarrow H_0(\psi) = \frac{1}{2m} p^2(\psi)$.

Se dunque la particella non è sotto l'effetto di un potenziale, questa è proprio l'energia classica di una particella con impulso p. Inoltre, si può vedere che qualora il potenziale ci fosse avremmo $H = H_0 + V(q)$, come, di nuovo, nella meccanica classica.